

УДК 512.542

**Дмитрий Владимирович Грицук**канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина**Dmitry Gritsuk**PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,  
Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science  
at the Brest State A.S. Pushkin Universitye-mail: [dmitry.gritsuk@gmail.com](mailto:dmitry.gritsuk@gmail.com)**ПРОИЗВОДНАЯ  $\pi$ -ДЛИНА  $\pi$ -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ**

Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом  $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$ , факторы  $G_{i+1}/G_i$  которого являются либо  $\pi'$ -группами, либо абелевыми  $\pi$ -группами. Наименьшее число абелевых  $\pi$ -факторов среди всех таких субнормальных рядов  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  называется производной  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы. В статье приводится обзор основных результатов, связанных с оценками производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы.

**Ключевые слова:**  $\pi$ -разрешимая группа, силовская  $p$ -подгруппа,  $\pi$ -холлова подгруппа, производная  $\pi$ -длина.

**The Derived  $\pi$ -Length Of The  $\pi$ -Solvable Group**

Let  $G$  is a  $\pi$ -solvable group. Then it has a subnormal series  $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$  whose factors  $G_{i+1}/G_i$  are either  $\pi'$ -groups or abelian  $\pi$ -groups. The smallest number of Abelian  $\pi$ -factors among all such subnormal series of a  $\pi$ -solvable group  $G$  is called the derived  $\pi$ -length of the  $\pi$ -solvable group. This paper reviews the main results related to bounds for the derivative  $\pi$ -length of a  $\pi$ -solvable group.

**Key words:**  $\pi$ -solvable group, Sylow  $p$ -subgroup,  $\pi$ -Hall subgroup, derived  $\pi$ -length.

**Введение**

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются обозначения, принятые в книгах [1; 2].

Пусть  $P$  – множество всех простых чисел, а  $\pi$  – некоторое множество простых чисел. Дополнение к  $\pi$  во множестве  $P$  обозначается через  $\pi'$ . Группа называется  $\pi$ -группой, если все простые делители порядка группы принадлежат множеству  $\pi$ , и  $\pi'$ -группой – в противном случае.

Ряд подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

называется субнормальным, если для любого  $i$  подгруппа  $G_i$  нормальна в  $G_{i+1}$ . Фактор-группы  $G_{i+1}/G_i$  называются факторами этого ряда. Если в (1) нет совпадающих подгрупп, то число  $n$  называется длиной ряда.

Производная длина группы  $G$  определяется как длина самого короткого нормального ряда (1) с абелевыми факторами. Эта длина обозначается через  $d(G)$ .

В 2006 г. В. С. Монахов [3] предложил аналог производной длины для  $\pi$ -разрешимой группы – понятие производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо абелевым  $\pi$ -фактором, либо  $\pi'$ -фактором. Наименьшее число абелевых  $\pi$ -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы  $G$  называется абелевой  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  и обозначается через  $l_\pi^a(G)$ . Ясно, что в случае, когда  $\pi = \pi(G)$ , значение  $l_\pi^a(G)$  совпадает со значением нильпотентной длины группы  $G$ . Оценкам производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы посвящены работы [4–9].

В данной работе приводится обзор основных результатов, связанных с производной  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы.

### 1. Начальные свойства производной $\pi$ -длины $\pi$ -разрешимой группы

Начальные свойства производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы получены В. С. Монаховым, Д. В. Грицуком и О. А. Шпырко в работах [4–8].

Теорема 1 [4]. Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, то  $l_\pi(G) \leq l_\pi^n(G) \leq l_\pi^a(G)$ .

Теорема 2 [4]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда:

- 1) если  $H$  – подгруппа группы  $G$ , то  $l_\pi^a(H) \leq l_\pi^a(G)$ ;
- 2) если  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , то  $l_\pi^a(G/N) \leq l_\pi^a(G)$  и  $l_\pi^a(G) \leq l_\pi^a(G/N) + l_\pi^a(N)$ ;
- 3) если  $N$  – нормальная  $\pi'$ -подгруппа группы  $G$ , то  $l_\pi^a(G/N) = l_\pi^a(G)$ ;
- 4) если  $G$  и  $V$  –  $\pi$ -разрешимые группы, то  $l_\pi^a(G \times V) = \max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\}$ ;
- 5) если  $N_1$  и  $N_2$  – нормальные подгруппы в  $G$ , то  $l_\pi^a(G/(N_1 \cap N_2)) \leq \max\{l_\pi^a(G/N_1), l_\pi^a(G/N_2)\}$ .

Теорема 3 [8]. Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа и  $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ , то  $l_\pi^a(G) \leq l_{\pi_1}^a(G) + l_{\pi_2}^a(G)$ .

### 2. Оценки производной $\pi$ -длины $\pi$ -разрешимой группы, связанные со строением $\pi$ -холловой подгруппы

Первые исследования производной  $\pi$ -длины в зависимости от строения  $\pi$ -холловой подгруппы проведены в работе [4]. Как обычно,  $X'$  и  $Z(X)$  – коммутант и центр группы  $X$  соответственно.

Теорема 4 [4]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа,  $G_\pi$  – ее  $\pi$ -холлова подгруппа.

1. Если  $G_\pi$  абелева, то  $l_\pi^a(G) \leq 1$ .
2. Если  $(G_\pi)' \subseteq Z(G_\pi)$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ .

Напомним, что группой Шмидта называют ненильпотентную группу, в которой все собственные подгруппы нильпотентны. Свойства групп Шмидта перечислены, например, в [2, III.5]. Группа называется дедекиндовой, если все ее подгруппы нормальны.

Следствие 1.1. Если в  $\pi$ -разрешимой группе  $G_\pi$ -холлова подгруппа дедекиндова, то  $l_\pi(G) \leq 1$  и  $l_\pi^a(G) \leq 2$ .

Следствие 1.2. Если в  $\pi$ -разрешимой группе  $G$   $\pi$ -холлова подгруппа является группой Шмидта, то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ .

Напомним, что метабелевой называют группу, у которой коммутант абелев.

Теорема 5 [4]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа с метабелевой  $\pi$ -холловой подгруппой. Если  $2 \notin \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ .

В работе [6] исследована производная  $\pi$ -длина конечной  $\pi$ -разрешимой группы со сверхразрешимой  $\pi$ -холловой подгруппой.

Теорема 6 [6]. Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, у которой коммутант  $\pi$ -холловой подгруппы нильпотентен, то  $l_\pi^a(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi} l_r^a(G)$ .

Дополнением к подгруппе  $H$  в группе  $G$  называется такая подгруппа  $K$ , что  $G = HK$  и  $H \cap K = 1$ . Ю. М. Горчаков [10] показал, что дополняемость всех подгрупп равносильна дополняемости подгрупп простых порядков.

Группа, у которой все подгруппы дополняемы, называется вполне факторизуемой. В 1937 г. Ф. Холл [11] установил, что конечные группы, в которых дополняемы все подгруппы, исчерпываются сверхразрешимыми группами с элементарными абелевыми силовскими подгруппами.

Следствие 6.1. Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа,  $\pi$ -холлова подгруппа которой вполне факторизуема, то  $l_\pi^\alpha(G) \leq 2$ .

Следствие 6.2. Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа со сверхразрешимой  $\pi$ -холловой подгруппой, то  $l_\pi^\alpha(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi} l_r^\alpha(G)$ .

Следствие 6.3. Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, у которой  $\pi$ -холлова подгруппа является группой Миллера-Морена, то  $l_\pi^\alpha(G) \leq 2$ .

В 2014 г. получены оценки производной  $\pi$ -длины группы  $G$  в зависимости от строения подгруппы  $G_\pi$  или  $M$ , где  $M$  – максимальная подгруппа из  $G_\pi$  [7].

Теорема 7 [7]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа и  $G_\pi$  –  $\pi$ -холлова подгруппа в  $G$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если  $G_\pi$  является группой Миллера – Морено, то  $l_\pi^\alpha(G) \leq 2$ ;

2) если  $G_\pi$  является группой Шмидта, то  $l_\pi^\alpha(G) \leq 3$ .

Теорема 8 [7]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа в  $G$ ,  $G_\pi$  –  $\pi$ -холлова подгруппа и  $M$  – максимальная подгруппа в  $G_\pi$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если подгруппа  $M$  абелева, то  $l_\pi^\alpha(G) \leq 3$ ;

2) если подгруппа  $M$  абелева и холлова, то  $l_\pi^\alpha(G) \leq 2$ ;

3) если подгруппа  $M$  нильпотентна, то

$$l_\pi^\alpha(G) \leq \max_{r \in \pi} d(G_r) \cdot (1 + \max_{r \in \pi} l_r(G));$$

4) если подгруппа  $M$  нильпотентна и холлова, то

$$l_\pi^\alpha(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi(M)} l_r(G) \cdot \max_{r \in \pi} d(G_r).$$

Теорема 9 [7]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа,  $G_\pi$  –  $\pi$ -холлова подгруппа и  $M$  – максимальная подгруппа из  $G_\pi$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если  $M$  – группа Миллера – Морено, то  $l_\pi^\alpha(G) \leq 4$ ; в частности, если  $M$  холлова, то  $l_\pi^\alpha(G) \leq 3$ ;

2) если  $M$  – группа Шмидта, то  $l_\pi^\alpha(G) \leq 5$ ; в частности, если  $M$  холлова, то  $l_\pi^\alpha(G) \leq 4$ .

В работе [12] исследовано влияние 2-максимальной подгруппы  $\pi$ -холловой подгруппы  $\pi$ -разрешимой группы на оценки производной  $\pi$ -длины.

Теорема 10 [12]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа,  $G_\pi$  –  $\pi$ -холлова подгруппа и  $M$  – 2-максимальная подгруппа в  $G_\pi$ . Справедливы следующие утверждения:

1) если подгруппа  $M$  абелева, то

$$l_\pi^m(G) \leq 3 \text{ и } l_\pi^\alpha(G) \leq 4;$$

2) если подгруппа  $M$  нильпотентна, то

$$l_\pi^m(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi} l_r(G) \text{ и } l_\pi^\alpha(G) \leq \max_{r \in \pi} d(G_r) (1 + \max_{r \in \pi} l_r(G)).$$

Число  $n$  свободно от  $m$ -х степеней, если  $p^m$  не делит  $n$  для всех простых  $p$ . При  $m = 2$  говорят, что  $n$  свободно от квадратов, при  $m = 3$  – от кубов. В работе [9] исследовались оценки производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы, у которой порядок  $\pi$ -холловой подгруппы свободен от  $n$ -ых степеней.

Теорема 11 [9]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа.

1) Если порядок  $\pi$ -холловой подгруппы свободен от кубов, то справедливы следующие утверждения:

a) если  $2 \notin \pi$ , то  $l_\pi^\alpha(G) \leq 2$ ;

b) если  $2 \in \pi$ , то  $l_\pi^\alpha(G) \leq 3$ .

2) Если порядок  $\pi$ -холловой подгруппы свободен от квадратов, то  $G$  разрешима и  $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 2$ .

$t$ -группой называют группу, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна. Строение разрешимых  $t$ -групп описал В. Гашюц [13]. В частности, разрешимая  $t$ -группа сверхразрешима.  $\mathfrak{N}$  – класс всех нильпотентных групп,  $G^{\mathfrak{N}}$  –  $\mathfrak{N}$ -корадикал группы  $G$ , т. е. пересечение всех нормальных подгрупп группы  $G$ , фактор-группы по которым принадлежат  $\mathfrak{N}$ . Известно, что если  $G$  является  $t$ -группой, то  $G^{\mathfrak{N}}$  – абелева холлова подгруппа нечетного порядка, все подгруппы из  $G^{\mathfrak{N}}$  – нормальны в  $G$ ,  $G^{\mathfrak{N}}$  – дедекиндова. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 12.** Если  $\pi$ -холлова подгруппа  $\pi$ -разрешимой группы является  $t$ -группой, то  $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 3$ .

Обобщенным коммутантом группы  $G$  называется наименьшая нормальная подгруппа  $N$  группы  $G$ , такая, что  $G/N$  является группой с абелевыми силовскими подгруппами. Очевидно, что обобщенный коммутант совпадает с  $\mathfrak{A}$ -корадикалом группы  $G$ , где  $\mathfrak{A}$  – класс всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами. Справедлива следующая теорема

**Теорема 13.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, у которой обобщенный коммутант  $\pi$ -холловой подгруппы нильпотентен. Тогда

$$l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq |\pi(G_{\pi})| - 1 + \max_{p \in \pi} l_p^{\alpha}(G).$$

#### 4. Оценки производной $\pi$ -длины $\pi$ -разрешимой группы, связанные со строением силовских $r$ -подгрупп

**Теорема 14.** Если в  $\pi$ -разрешимой группе  $G$  силовские  $r$ -подгруппы циклические для всех  $r \in \pi$ , то  $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 2$ .

2. Если в  $\pi$ -разрешимой группе  $G$  силовские  $r$ -подгруппы абелевы для всех  $r \in \pi$ , то  $l_{\pi}^{\alpha}(G) = d(G_{\pi}) \leq |\pi(G_{\pi})|$ .

**Следствие.** Если в  $\pi$ -разрешимой группе  $G$   $\pi$ -холлова подгруппа сверхразрешима и силовские  $r$ -подгруппы абелевы для всех  $r \in \pi$ , то  $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 2$ .

**Теорема 15.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, у которой для каждого  $r \in \pi$  силовская  $r$ -подгруппа абелева или экстраспециальна. Тогда  $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 2 \cdot |\pi(G_{\pi})|$ .

**Теорема 16.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, силовские  $r$ -подгруппы которой либо циклические, либо имеют порядок  $p^2$  для всех  $r \in \pi$ . Тогда  $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 3$ . В частности, если  $2 \notin \pi$ , то  $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 2$ .

**Теорема 17.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа с бициклическими силовскими  $r$ -подгруппами для всех  $r \in \pi$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если  $2 \notin \pi$ , то  $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 3$ ;

2) если  $2 \in \pi$ , то  $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 6$ .

**Теорема 18** [5]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, силовские  $r$ -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок  $p^3$  для всех  $r \in \pi$ . Тогда:

1) если  $2 \notin \pi$ , то  $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 4$ .

2) если  $2 \in \pi$ , то  $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 7$ .

Напомним, что число  $n$  свободно от  $n$ -х степеней, если  $p^m$  не делит  $n$  для всех простых  $p$ . При  $m = 2$  говорят, что  $n$  свободно от квадратов, при  $m = 3$  – от кубов. В случае, если порядок  $\pi$ -холловой подгруппы свободен от кубов, то все силовские  $r$ -подгруппы,  $r \in \pi$ , являются абелевыми. В работе [5, теорема 1] показано, что производная  $\pi$ -длина таких  $\pi$ -разрешимых групп не превышает  $|\pi(G_{\pi})|$ , где  $G_{\pi}$  –  $\pi$ -холлова подгруппа.

**Теорема 19** [9]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа.

1) Если порядок  $\pi$ -холловой подгруппы свободен от кубов, то справедливы следующие утверждения:

- a) если  $2 \notin \pi$ , то  $l_{\pi}^a(G) \leq 2$ ;
- b) если  $2 \in \pi$ , то  $l_{\pi}^a(G) \leq 3$ .

2) Если порядок  $\pi$ -холловой подгруппы свободен от квадратов, то  $l_{\pi}^a(G) \leq 2$ .

**Теорема 20** [9]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Если небициклические силовские  $p$ -подгруппы  $\pi$ -холловой подгруппы группы  $G$ ,  $p \in \pi$  имеют порядки  $2^3, 3^3, 2^4, 2^5$ , то справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $2 \notin \pi$ , то  $l_{\pi}^a(G) \leq 3$ ;
- 2) если  $2 \in \pi$ , то  $l_{\pi}^a(G) \leq 6$ .

**Теорема 21** [9]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, такая, что порядок любой силовской  $p$ -подгруппы  $P$ ,  $p \in \pi$  свободен от  $n$ -ых степеней. Тогда:

- 1) если  $\{2,3\} \notin \pi$ , то  $l_{\pi}^a(G) \leq |\pi(G_{\pi})|^{\frac{n+1}{2}}$ ;
- 2) если  $\{2,3\} \in \pi$ , то  $l_{\pi}^a(G) \leq |\pi(G_{\pi})|^{\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$ .

### 5 Оценки производной $\pi$ -длины $\pi$ -разрешимой группы, у которой силовские подгруппы из факторов имеют заданные ограничения

Нахождение инвариантов разрешимых групп с заданными свойствами силовских подгрупп нашло развитие в исследовании строения групп по свойствам силовских подгрупп в факторах их нормальных рядов. Если у группы  $G$  имеется нормальный ряд с циклическими силовскими подгруппами в факторах, то несложно проверить, что  $G$  сверхразрешима. Поэтому группа  $G$  дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен, и нильпотентная длина группы  $G$  не выше 2. Поскольку любая  $p$ -группа имеет нормальный ряд с факторами простых порядков, то производную длину таких групп ограничить сверху нельзя. Однако, производная длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  будет не выше 2.

Исследование разрешимых групп, обладающих нормальным рядом, факторы которого имеют бициклические силовские подгруппы, проведено в 2009 г. в работе [16]. В частности, получены оценки производной длины таких разрешимых групп. В 2013 г. получено развитие теоремы Бэра о сверхразрешимости группы, у которой на участке нормального ряда разрешимой группы между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга факторы имеют простые порядки [17]. В частности, получены оценки производной длины разрешимой группы, у которой на участке нормального ряда между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга силовские подгруппы факторов являются бициклическими.

**Теорема 22.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Если группа  $G$  обладает нормальным рядом, силовские подгруппы  $\pi$ -факторов которого являются:

- 1) циклическими, то  $l_{\pi}^a(G) \leq 2$ ;
- 2) метациклическими, то  $l_{\pi}^a(G) \leq 10$ , если  $2 \in \pi$ ;
- 3) бициклическими, то  $l_{\pi}^a(G) \leq 10$ , если  $2 \in \pi$ ;
- 4) либо бициклическими, либо свободными от четвертых степеней, то  $l_{\pi}^a(G) \leq 18$ , если  $2 \in \pi$ .

Хорошо известно, что свойство нормальности подгруппы в группе не является транзитивным. В 1957 г. Гашюц [18] установил строение разрешимых групп, у которых нормальность обладает транзитивным свойством ( $t$ -группы). Такие группы можно представить в виде полупрямого произведения нормальной абелевой холловой подгруппы нечетного порядка и дедекиндовой подгруппы. Группы, близкие к  $t$ -группам,

можно определять при помощи дефекта субнормальной подгруппы  $H$ , т. е. длины наименьшего субнормального ряда от подгруппы  $H$  до группы  $G$ . Очевидно, что каждая собственная нормальная подгруппа имеет дефект 1, поэтому в  $t$ -группах все субнормальные подгруппы имеют дефект 1. Группы с субнормальными подгруппами дефекта 2 исследовались в [19].

В теории групп всякую подгруппу  $H$  группы  $G$  можно окружить двумя нормальными в  $G$  подгруппами – нормальным замыканием  $H^G$  и ядром  $H_G$ , где  $H^G$  является наименьшей нормальной в  $G$  подгруппой, содержащей  $H$ , а  $H_G$  – наибольшей нормальной в  $G$  подгруппой, содержащейся в  $H$ . Понятно, что в  $t$ -группах  $|H^G:H| = |H:H_G| = 1$  для каждой субнормальной подгруппы  $H$ . Если  $G$  не является  $t$ -группой, то  $|H^G:H| > 1$ ,  $|H:H_G| > 1$  для каждой субнормальной ненормальной подгруппы  $H$ .

**Теорема 23.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда  $l_\pi^a(G/\Phi(G)) \leq 2$ , если  $2 \notin \pi$ , и  $l_\pi^a(G/\Phi(G)) \leq 4$ , если  $2 \in \pi$  в каждом из следующих случаев:

1) порядок кофактора  $H/H_G$  свободен от квадратов, где  $H$  – произвольная субнормальная подгруппа  $G$ ;

2) индекс  $|H^G:H|$  свободен от квадратов, где  $H$  – произвольная субнормальная подгруппа  $G$ .

### Заключение

Получение новых оценок производной  $\pi$ -длины конечной  $\pi$ -разрешимой группы имеет важное значение не только для теории конечных групп и их классов, а и в современной криптографии. В частности, полученные оценки будут полезны при получении новых шифров и новых криптосистем с высокой эффективностью и криптостойкостью. Оценки производной  $\pi$ -длины конечной  $\pi$ -разрешимой группы могут стать основой для создания новых методов современной теории защиты информации и теории кодирования.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 312 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 792 s.
3. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов. // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.
4. Грицук, Д. В. О производной  $\pi$ -длине  $\pi$ -разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
5. Грицук, Д. В. Производная  $\pi$ -длина  $\pi$ -разрешимой группы, силовские  $p$ -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок  $p^3$  / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 54–58.
6. Monakhov, V. S. On derived  $\pi$ -length of a finite  $\pi$ -solvable group with supersolvable  $\pi$ -Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, nr 2. – P. 233–241.
7. Монахов, В. С. О производной  $\pi$ -длине конечной  $\pi$ -разрешимой группы с заданной  $\pi$ -холловой подгруппой / В. С. Монахов, Д. В. Грицук // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 215–223.
8. Грицук, Д. В. Конечные  $\pi$ -разрешимые группы с заданными свойствами 2-максимальных  $\pi$ -подгрупп / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Физика, математика, информатика. – 2017. – № 5 (107). – С. 69–72.

9. Грицук, Д. В. Оценки производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы, у которой  $\pi$ -холловы подгруппы свободны от  $n$ -х степеней / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. А. Артющеня // Вестн. Витеб. гос. ун-та им. П. М. Машерова. – 2018. – № 1 (98). – С. 11–15.
10. Горчаков, Ю. М. Примитивно факторизуемые группы / Ю. М. Горчаков // Учен. зап. Перм. ун-та. – 1960. – № 17. – С. 15–31.
11. Hall, Ph. Complemented group / Ph. Hall / J. London Math. Soc. – 1937. – V. 12. – P. 201–204.
12. Грицук, Д. В. Конечные  $\pi$ -разрешимые группы с заданными свойствами 2-максимальных  $\pi$ -подгрупп / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Физика, математика, информатика. – 2017. – № 5 (107). – С. 69–72.
13. Gaschutz, W. Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.
14. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
15. Грицук, Д. В. О конечных  $\pi$ -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.
16. Monakhov, V. S. On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Communications in Algebra. – 2011. – Vol. 39, nr 9. – P. 3178–3186.
17. Трофимук, А. А. Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах / А. А. Трофимук // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 304–307.
18. Gaschutz, W. Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.
19. McCaughan, D. J. Finite soluble groups whose subnormal subgroups have defect at most two / D. J. McCaughan, S. E. Stonehewer // Arth. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 56–60.

## REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedieniye v teoriyu koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vyssh. shk., 2006. – 312 s.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 792 s.
3. Monakhov, V. S. Koniechnyje grouppy s polunormal'noj khollovoj podgruppoy / V. S. Monakhov // Mat. zamietki. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.
4. Gricuk, D. V. O proizvodnoj  $\pi$ -dlinie  $\pi$ -razrieshimoy grouppy / D. V. Gricuk, V. S. Monakhov, O. A. Shpyrko // Viesn. BGU. Sier. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
5. Gricuk, D. V. Proizvodnaya  $\pi$ -dлина  $\pi$ -razrieshimoy grouppy, silovskije  $p$ -podgrouppy kotoroj libo biciklichieskije, libo imiejut poriadok  $p^3$  / D. V. Gricuk // Problemy fiziki, matematiki i tiehniky. – 2014. – № 2 (19). – С. 54–58.
6. Monakhov, V. S. On derived  $\pi$ -length of a finite  $\pi$ -solvable group with supersolvable  $\pi$ -Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, nr 2. – P. 233–241.
7. Monakhov, V. S. O proizvodnoj  $\pi$ -dlinie koniechnoj  $\pi$ -razrieshimoy grouppy s zadannoj  $\pi$ -khollovoj podgruppoy / V. S. Monakhov, D. V. Gricuk // Tr. In-ta matematiki i miekhaniki UrO RAN. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 215–223.

8. Gricuk, D. V. Koniechnyje  $\pi$ -razrieshimyje grupy s zadannymi svojstvami 2-maksimal'nykh  $\pi$ -podgrupp / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk // Viestn. Briest. gos. tiekhn. un-ta. Fizika, matematika, informatika. – 2017. – № 5 (107). – S. 69–72.
9. Gricuk, D. V. Ocenki proizvodnoj  $\pi$ -dliny  $\pi$ -razrieshimoy grupy, u kotoroj  $\pi$ -kholovy podgruppy svobodny ot  $n$ -ykh stepeniej / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk, T. A. Artiushenia // Viestn. Vitieb. gos. un-ta im. P. M. Masherova. – 2018. – № 1 (98). – S.11–15.
10. Gorchakov, Yu. M. Primitivno faktorizujemyje grupy / Yu. M. Gorchakov // Uchion. zap. Pierm. un-ta. – 1960. – № 17. – S. 15–31.
11. Hall, Ph. Complemented group / Ph. Hall / J. London Math. Soc. – 1937. – V. 12. – P. 201–204.
12. Gricuk, D. V. Koniechnyje  $\pi$ -razrieshimyje grupy s zadannymi svojstvami 2-maksimal'nykh  $\pi$ -podgrupp / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk // Viestn. Briest. gos. tiekhn. un-ta. Fizika, matematika, informatika. – 2017. – № 5 (107). – S. 69–72.
13. Gaschutz, W. Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.
14. Monakhov, V. S. O koniechnykh razrieshimykh gruppakh fiksirovannogo ranga / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sib. mat. zhurn. – 2011. – T. 52, № 5. – S. 1123–1137.
15. Gricuk, D. V. O koniechnykh  $\pi$ -razrieshimykh gruppakh s biciklichieskimi silovskimi podgruppami / D. V. Gricuk, V. S. Monakhov, O. A. Shpyrko // Problemy fiziki, matematiki i tiekhniki. – 2013. – № 1 (15). – S. 61–66.
16. Monakhov, V. S. On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Communications in Algebra. – 2011. – Vol. 39, nr 9. – P. 3178–3186.
17. Trofimuk A. A. Koniechnyje grupy s biciklichieskimi silovskimi podgruppami v fittingovykh faktorakh / A. A. Trofimuk // Tr. In-ta matematiki i mekhaniki UrO RAN. – 2013. – T. 19, nr 3. – S. 304–307.
18. Gaschutz, W. Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.
19. McCaughan, D. J. Finite soluble groups whose subnormal subgroups have defect at most two / D. J. McCaughan, S. E. Stonehewer // Arth. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 56–60.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 19.04.2022*