УДК 512.542

Полина Александровна Павлушко¹, Александр Александрович Трофимук²¹студент 4-го курса физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²д-р физ.-мат. наук, доц., зав. каф. фундаментальной математики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Polina Pavlushko¹, Alexander Trofimuk²¹4-th Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics

of Brest State A. S. Pushkin University

²Doctor of Physical and Mathematical Sciences,

Head of the Department of Fundamental Mathematics

of Brest State A. S. Pushkin University

email: ¹polinapavlushko@gmail.com; ²alexander.trofimuk@gmail.com**О КОМПОЗИЦИОННЫХ ФАКТОРАХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ,
У КОТОРОЙ НЕКОТОРЫЕ ПОДГРУППЫ ЯВЛЯЮТСЯ tcc -ПОДГРУППАМИ***

Подгруппа A группы G называется tcc -подгруппой в G , если для подгруппы A существует добавление T в группе G такое, что для каждой подгруппы A_1 из A и каждой подгруппы T_1 из T существует элемент $x \in \langle A_1, T_1 \rangle$ такой, что A_1 перестановочна с T_1^x . В работе получено описание композиционных pd -факторов группы, у которой каждая максимальная подгруппа из некоторой силовой p -подгруппы имеет силовайзер, который является tcc -подгруппой.

Ключевые слова: tcc -подгруппа, максимальная подгруппа, силовская подгруппа, силовайзер, композиционные факторы.

On Composition Factors of a Finite Group in Which Some Subgroups are tcc -Subgroups

A subgroup A of a group G is called a tcc -subgroup of G if there is a supplement T to A in G such that for each subgroup A_1 of A and each subgroup T_1 of T there is an element $x \in \langle A_1, T_1 \rangle$ such that A_1 permutes with T_1^x . In this paper, we obtain a description of the pd -composition factors of a group in which each maximal subgroup of some Sylow p -subgroup has a sylowizer that is a tcc -subgroup.

Key words: tcc -subgroup, maximal subgroup, Sylow subgroup, sylowizer, composition factors.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1; 2]. Запись $H \leq G$ означает, что H – подгруппа группы G . Если $H \leq G$ и $H \neq G$, то пишем $H < G$. Запись $H \trianglelefteq G$ означает, что H – нормальная подгруппа группы G . Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Заметим, что равенство $AB = BA$ равносильно тому, что $AB \leq G$.

Согласно [3], подгруппы A и B группы G называются *тотально перестановочными*, если каждая подгруппа из A перестановочна с каждой подгруппой из B . Напомним, что *добавлением (дополнением)* к подгруппе A в группе G называется подгруппа T такая, что $G = AT$ ($G = AT$ и $A \cap T = 1$).

В работе [4] было предложено следующее определение: подгруппы A и B называются X -*перестановочными*, если A перестановочна с B^x для некоторого $x \in X$, где X – некоторое непустое подмножество группы G .

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках выполнения задания «Конечные группы с формационно-арифметическими свойствами структурных объектов» (№ госрегистрации 20211467) ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Математические модели и методы» на 2021–2025 гг.

Если $X = \langle A, B \rangle$, то X -перестановочные подгруппы A и B называются *сс-перестановочными* подгруппами [5]. Очевидно, что если подгруппы A и B перестановочны, то они сс-перестановочны. Естественным обобщением тотально перестановочных подгрупп стало понятие тсс-перестановочных подгрупп: подгруппы A и B группы G называются *тсс-перестановочными*, если каждая подгруппа из A сс-перестановочна с каждой подгруппой из B . Результаты, связанные исследованием групп с заданными системами сс-перестановочных и тсс-перестановочных подгрупп, отражены в монографии [6].

В работе [7] было введено следующее понятие: подгруппа A группы G называется *тсс-подгруппой* в G , если для подгруппы A существует добавление T в группе G такое, что A и T тсс-перестановочны. Подгруппу T в дальнейшем будем называть *тсс-добавлением* к подгруппе A в группе G . Кроме того, в [7] изучены свойства тсс-подгрупп, а также строение конечной группы, у которой сомножители силовские и максимальные подгруппы являются тсс-подгруппами.

Теорема А. *Группа G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

- (1) *каждая максимальная подгруппа из G является тсс-подгруппой в G ;*
- (2) *каждая силовская подгруппа из G является тсс-подгруппой в G ;*
- (3) *$G = AB$, где A и B – сверхразрешимые тсс-подгруппы в G .*

Группы, у которых 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп, минимальные подгруппы удовлетворяют некоторому типу перестановочности, исследовались многими авторами [8; 9].

В теореме В изучено строение конечной группы, у которой 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп или все минимальные подгруппы являются тсс-подгруппами.

Теорема В. 1. *Пусть H – нормальная подгруппа группы G . Предположим, что G/H сверхразрешима и каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из H является тсс-подгруппой в G . Тогда группа G сверхразрешима.*

2. *Если каждая 2-максимальная подгруппа из G является тсс-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима.*

3. *Если каждая максимальная подгруппа из каждой нециклической силовской подгруппы разрешимой группы G является тсс-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима.*

Понятие силовайзера было введено Гашюцем в [10]. Подгруппа S группы G называется *силовайзером* p -подгруппы R в G , если S – максимальная среди подгрупп группы G , в которых R является силовской p -подгруппой. Гашюц [10] показал, что силовайзеры данной p -подгруппы в разрешимой группе не всегда сопряжены, а также привел некоторые достаточные условия, при которых p -подгруппа имеет сопряженные силовайзеры.

В настоящей работе предложены новые признаки p -сверхразрешимости группы с заданными системами тсс-подгрупп.

Теорема 1. *Пусть P – силовская p -подгруппа группы G и G p -разрешима. Если каждая максимальная подгруппа из P имеет силовайзер, который является тсс-подгруппой в G , то G p -сверхразрешима.*

Следствие 1. *Если каждая максимальная подгруппа из каждой силовской подгруппы разрешимой группы G имеет силовайзер, который является тсс-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима.*

Если предположить, что группа не является p -разрешимой, то естественным является описание композиционных pd -факторов группы. Доказана следующая

Теорема 2. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G . Если каждая максимальная подгруппа из P имеет силовайзер, который является тсс-подгруппой, то каждый неабелевый композиционный pd -фактор группы G изоморфен одной из следующих подгрупп:

- 1) $PSL(2, 7)$ и $p = 7$;
- 2) $PSL(2, 11)$ и $p = 11$, M_{11} и $p = 11$;
- 3) M_{23} и $p = 23$;
- 4) $PSL(2, 2^t)$ и $p = 2^t + 1 > 3$ – простое число Ферма;
- 5) $PSL(n, q)$, $n \geq 3$ – простое, $(n; q-1) = 1$ и $p = \frac{q^n - 1}{q - 1}$;
- 5) A_p и $p \geq 5$.

1. Вспомогательные результаты

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах.

Через G' , $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p - и p' -подгруппы соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G . Элементарная абелева группа порядка p^t и циклическая группа порядка m обозначаются E_{p^t} и Z_m соответственно, а $A \rtimes B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B .

Лемма 2.1 ([11, лемма 5]) Предположим, что p -разрешимая группа G не принадлежит pU , но $G/K \in pU$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $Z(G) = O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;
- (2) группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N , $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$;
- (3) G – примитивная группа; $G = N \rtimes M$, где M – максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром;
- (4) N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $n > 1$;
- (5) если подгруппа M – абелева, то M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$.

Здесь $p\mathcal{U}$ – класс всех p -сверхразрешимых групп.

Лемма 2.2 ([7, лемма 3.1]). Пусть A – тсс-подгруппа группы G и Y – тсс-добавление к A в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) A – тсс-подгруппа в H для каждой подгруппы H группы G такой, что $A \leq H$;
- (2) AN/N – тсс-подгруппа в G/N для каждой $N \trianglelefteq G$;

(3) для каждой $A_1 \trianglelefteq A$ и $X \leq Y$ существует $y \in Y$ такой, что $A_1 X^y \leq G$. В частности, $A_1 M \leq G$ для некоторой максимальной подгруппы M группы Y и $A_1 H \leq G$ для некоторой π -холловой подгруппы H разрешимой группы Y и любого $\pi \subseteq \pi(G)$.

Доказательство.

1. Так как Y – тсс-добавление к A в G , то $G = AY$, A и Y – тсс-перестановочные подгруппы из G . По тождеству Дедекинда $H = H \cap AY = A(H \cap Y)$. Так как $H \cap Y \leq Y$, то для любых $X \leq A$ и $Z \leq H \cap Y$ существует элемент $u \in \langle X, Z \rangle$ такой, что $XZ^u \leq G$. Поэтому A и $H \cap Y$ тсс-перестановочны и, значит, A – тсс-подгруппа в H .

2. Так как $G = AY$, то $G/N = (AN/N)(YN/N)$. Пусть B/N – произвольная подгруппа из AN/N и X/N – произвольная подгруппа в YN/N . Так как $N \leq B \leq AN$, то, по тождеству Дедекинда, $B = B \cap AN = (B \cap A)N$.

Аналогично, $X = X \cap YN = (X \cap Y)N$. Так как $B \cap A \leq A$ и $X \cap Y \leq Y$, то $(B \cap A)(X \cap Y)^u \leq G$ для некоторого $u \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle$. Поэтому

$$(B/N)(X/N)^{uN} = (B \cap A)(X \cap Y)^u N/N \leq G/N$$

для $uN \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle N/N \subseteq \langle B, X \rangle N/N = \langle B/N, X/N \rangle$. Значит, AN/N – тсс-подгруппа в G/N .

3. Так как A – тсс-подгруппа группы G , то, по определению, для каждой $A_1 \trianglelefteq A$ и $X \leq Y$ существует $u \in \langle A_1 X \rangle$ такой, что $A_1 X^u \leq G$. Так как $u \in G = AY = YA$, то $u = ya$ для некоторых $y \in Y$ и $a \in A$. Тогда

$$A_1 X^u = A_1 X^{ya} = A_1 (X^y)^a = A_1^a (X^y)^a = (A_1 X^y)^a \leq G.$$

Поэтому существует подгруппа $A_1 X^y$ в группе G для некоторого $y \in Y$. Очевидно, что если X – π -холлова подгруппа группы Y , то $H = X^y$ – π -холлова подгруппа группы Y . Поэтому $A_1 H \leq G$. Аналогично и в случае, когда X – максимальная подгруппа группы Y . Тогда $M = X^y$ – максимальная подгруппа группы Y и $A_1 M \leq G$.

Лемма 2.3 ([10]). Пусть R – p -подгруппа группы G и $N \trianglelefteq G$.

1. Предположим, что $N \leq R$. Тогда S – силовайзер R в G тогда и только тогда, когда $N \leq S$ и S/N – силовайзер R/N в G/N .

2. Предположим, что N – p' -группа. Тогда S – силовайзер R в G тогда и только тогда, когда $N \leq S$ и S/N – силовайзер RN/N в G/N .

3. Предположим, что R – силовская p -подгруппа в RN . Тогда S – силовайзер R в G тогда и только тогда, когда S/N – силовайзер RN/N в G/N .

Лемма 2.4 ([12, теорема 1]). Пусть G – группа, $p \in \pi(G)$. Предположим, что каждая подгруппа простого порядка p дополняема в G . Если G не является p -разрешимой, то неабелевы композиционные pd -факторы группы G изоморфны одной из следующих подгрупп:

- 1) $PSL(2, 7)$ и $p = 7$;
- 2) $PSL(2, 11)$ и $p = 11$, M_{11} и $p = 11$;
- 3) M_{23} и $p = 23$;

- 4) $PSL(2, 2^t)$ и $p = 2^t + 1 > 3$ – простое число Ферма;
- 5) $PSL(n, q), n \geq 3$ – простое, $(n; q-1) = 1$ и $p = \frac{q^n - 1}{q - 1}$;
- 6) A_p и $p \geq 5$.

В дальнейшем для удобства проводимых доказательств неабелевы композиционные pd -факторы группы из заключения леммы 2.4 будем считать принадлежащими множеству Ω .

2. Доказательство теоремы 1 и теоремы 2

Теорема 1. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G и G p -разрешима. Если каждая максимальная подгруппа из P имеет силовайзер в G , который является tcc -подгруппой в G , то G p -сверхразрешима.

Доказательство.

Предположим, что теорема неверна и группа G – контрпример минимального порядка. Пусть N – неединичная нормальная подгруппа группы G . Если $P \leq N$, то G/N – p -подгруппа, а следовательно G/N p -сверхразрешима.

Предположим, что $P \not\leq N$. Пусть $\bar{P}_1 = X/N$ – максимальная подгруппа силовской p -подгруппы $\bar{P}$ из G/N . Тогда существует силовская p -подгруппа P в G такая, что $\bar{P} = PN/N$. Далее, $X = X \cap PN = (X \cap P)N$. Так как $P \cap N = X \cap P \cap N$, то

$$\begin{aligned} p &= |\bar{P} : \bar{P}_1| = |PN/N : X/N| = |PN : X| = \\ &= |PN : (X \cap P)N| = \frac{|P \cap N| |X \cap P \cap N|}{|P \cap N| |X \cap P|} = |P : X \cap P|. \end{aligned}$$

Значит, $P_1 = X \cap P$ – максимальная подгруппа в P .

Так как $P \not\leq N$, то $P_1 \cap N = N_p = N \cap P$ и P_1 – силовская p -подгруппа в P_1N . Пусть S – силовайзер для P_1 в G . По лемме 2.3 (3), S/N – силовайзер для P_1N/N в G/N . По условию, S – tcc -подгруппа в G . По лемме 2.2 (2), S/N – tcc -подгруппа в G/N . Тогда по индукции группа G/N p -сверхразрешима.

По лемме 2.1, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N , $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N) \leq P$, $G = N \rtimes M$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $n > 1$.

Пусть P_1 – максимальная подгруппа в P . По условию теоремы, существует силовайзер S для подгруппы P_1 в G и S – tcc -подгруппа в G . Тогда существует подгруппа Y в G такая, что $SY = G$ и, по лемме 2.2 (3), $SY_p \leq G$ для некоторой силовской p -подгруппы Y_p и $SY_q = S$ для некоторой силовской q -подгруппы Y_q , $q \in \pi(Y)$, $q \neq p$ из tcc -добавления Y . Поэтому $SY_p = G$ и $|G : S| = p$.

Предположим, что $N = P$. Так как $|G : S| = p$, то $G = SP$ и P_1 нормальна в G , т. к. G p -замкнута. Противоречие. Если $N < P$, то $P = N \rtimes M_p$. Очевидно, что существует максимальная подгруппа P_2 в P такая, что $M_p \leq P_2$. По условию теоремы, существует силовайзер T подгруппы P_2 в G и T – tcc -подгруппа в G . По доказан-

ному вышэ $|G:T|=p$ и T – максимальная падгрупа в G . Так как $N \not\leq T$, то $NT = G$. Поскольку $N \cap T$ нормальна в $G = NT$, то $N \cap T = 1$ и $|N|=p$. Противоречие.

Теорема 2. Пусть P – силовская p -подгрупа группы G . Если каждая максимальная подгрупа из P имеет силовайзер в G , который является тсс-подгруппой, то каждый неабелевый композиционный pd -фактор группы G изоморфен одной из следующих подгрупп:

- 1) $PSL(2,7)$ и $p=7$;
- 2) $PSL(2,11)$ и $p=11$, M_{11} и $p=11$;
- 3) M_{23} и $p=23$;
- 4) $PSL(2,2^t)$ и $p=2^t+1 > 3$ – простое число Ферма;
- 5) $PSL(n,q)$, $n \geq 3$ – простое, $(n; q-1)=1$ и $p = \frac{q^n-1}{q-1}$;
- 6) A_p и $p \geq 5$.

Доказательство.

Пусть P_1 – максимальная подгрупа в P . По условию теоремы, существует силовайзер S подгруппы P_1 в G и S – тсс-подгрупа в G .

Тогда $SY = G$ и Y – тсс-добавление к S в G . По лемме 2.2 (3), $SY_p \leq G$ для некоторой силовской p -подгруппы Y_p и $SY_q = S$ для некоторой силовской q -подгруппы Y_q , $q \in \pi(Y)$, $q \neq p$. Поэтому $SY_p = G$, $|G:S|=p$ и $G = SP$.

Предположим, что G – простая группа. Тогда G/S_G изоморфна подгруппе симметрической группы S_p степени p , поскольку $|G:S|=p$. Так как G – простая группа, то $S_G = 1$ и G изоморфна подгруппе симметрической группы S_p степени p . Поэтому $|P|=p$ и $P \cap S = 1$, т. к. $|G:S|=p$. Значит, P – дополняемая подгрупа в группе G . По лемме 2.4, $G \in \Omega$.

Предположим, что G непростая группа. Значит, существует минимальная нормальная подгрупа N в G такая, что

$$N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k,$$

где N_i , $i=1, \dots, k$ – неабелевы простые группы, изоморфные между собой.

Предположим, что N – p' -группа. Пусть P_1N/N – максимальная подгрупа силовской p -подгруппы PN/N группы G/N , где P_1 – максимальная подгрупа в P и S/N – силовайзер для P_1N/N в G/N .

По лемме 2.3 (2), S – силовайзер подгруппы P_1 в G . По условию, S – тсс-подгрупа в G . По лемме 2.2 (2), подгрупа S/N – тсс-подгруппой в G/N .

По индукции, все неабелевы композиционные pd -факторы группы G/N изоморфны подгруппам из Ω . Так как N – p' -группа, то все неабелевы композиционные pd -факторы группы G изоморфны подгруппам из Ω .

Значит, $p \in \pi(N)$. Если $P \leq N$, то G/N – p' -подгрупа. Если $P \not\leq N$, то $P_1 \cap N = N_p = N \cap P$ и P_1 – силовская p -подгрупа в P_1N . Пусть S – силовайзер

для P_1 в G . По лемме 2.3 (3), S/N – силовайзер для P_1N/N в G/N . По условию, S – tcc -подгруппа в G . По лемме 2.2 (2), S/N – tcc -подгруппа в G/N . По индукции, все неабелевы композиционные pd -факторы группы G/N изоморфны подгруппам из Ω .

Исследуем все неабелевы композиционные pd -факторы, которые лежат ниже, чем N . Так как $|G:S|=p$ и $S \leq SN \leq G$, то $|SN:S|=1$ или $|SN:S|=p$. Если $|SN:S|=1$, то $SN=S$ и $N \leq S$. Если $N \cap P = N_p \leq \Phi(P)$, то N p -нильпотентна по лемме Тате. Так как N p -нильпотентна, то N_i p -нильпотентна для любого i . Поскольку N_i – простая группа, то N_i – p' -группа для любого i . Поэтому в этом случае теорема доказана. Если $N_p \not\leq \Phi(P)$, то существует максимальная подгруппа P_0 в P такая, что $N_p P_0 = P$. Пусть S_0 – силовайзер подгруппы P_0 в G . Тогда, по доказанному выше, $|G:S_0|=p$ и

$$G = S_0 P = S_0 N_p P_0 = S_0 N_p = S_0 N.$$

Поэтому существует силовайзер S_0 такой, что $S_0 N = G$ и $|G:S_0|=p$.

Таким образом, будем считать, что в обоих случаях существует силовайзер S такой, что $|SN:S|=p$. Тогда $|SN:S|=p=|N:N \cap S|$ и $N \cap S$ – максимальная подгруппа в N . Очевидно, что существует N_r нормальная в N , $r \in \{1, \dots, k\}$, такая, что $N_r \not\leq N \cap S$ и $N = N_r(N \cap S)$. Тогда

$$p = |N:N \cap S| = |N_r:N_r \cap N \cap S| = |N_r:N_r \cap S|.$$

Поэтому

$$N_r / (N_r \cap S)_{N_r} \cong S_p.$$

Так как N_r – простая группа, то $(N_r \cap S)_{N_r} = 1$ и $N_r \cong S_p$. Тогда $|(N_r)_p|=p$ и $N_r \cap S$ – p' -группа. Поэтому $N_r = (N_r)_p(N_r \cap S)$ и $(N_r)_p$ дополняема в N_r . По лемме 2.4, $N_r \in \Omega$, а значит, все неабелевы композиционные pd -факторы группы G , лежащие ниже N , изоморфны подгруппам из Ω .

Заключение

Полученные в данной работе результаты являются основой для исследования композиционных факторов конечной группы, у которой максимальные подгруппы из некоторой силовской p -подгруппы являются tcc -подгруппами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – С. 207.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.
3. Carocca, A. p -supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Mathematical Journal. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.
4. Скиба, А. Н. H -перестановочные подгруппы / А. Н. Скиба // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – № 4. – С. 37–39.
5. Guo, W. Criteria of supersolvability for products of supersoluble groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, Nr 3–4. – P. 433–449.