

УДК 512.542

Екатерина Владимировна Зубей*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Ekaterina Zubey***Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University**e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru*

О КОМПОЗИЦИОННЫХ ФАКТОРАХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С OS -ПРОПЕРЕСТАНОВОЧНОЙ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППОЙ*

Конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Подгруппа A группы G называется OS -проперестановочной в G , если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$, AB является подгруппой группы G и подгруппа A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B . Для $r < 7$ перечислены все неабелевы композиционные факторы группы, в которой силовская r -подгруппа OS -проперестановочна. Доказана разрешимость группы с OS -проперестановочными силовскими 2- и 3-подгруппами.

Ключевые слова: конечная группа, OS -проперестановочная подгруппа, группа Шмидта, силовская подгруппа, p -разрешимая группа.

On Composition Factors of a Finite Group with OS -Propermutable Sylow Subgroup

A finite non-nilpotent group whose all proper subgroups are nilpotent, is called the Schmidt group. A subgroup A of a group G is called OS -propermutable in G if there is a subgroup B such that $G = N_G(A)B$, AB is a subgroup of G and A permutes with all Schmidt subgroups of B . For $r < 7$, all non-Abelian composition factors of a group G in which a Sylow r -subgroup is OS -propermutable. One described the solubility of a group G with OS -propermutable Sylow 2- and 3-subgroups is proved.

Key words: finite group, OS -propermutable subgroup, Schmidt group, Sylow subgroup, p -soluble group.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Начало изучению таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1]. Подробный обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведен в статье В. С. Монахова [2].

Поскольку группы Шмидта присутствуют в качестве подгруппы в каждой ненильпотентной группе, то они являются универсальными подгруппами групп. Поэтому свойства заключенных в группе подгрупп Шмидта оказывают существенное влияние на строение самой группы. Исследованиям строения групп по свойствам подгрупп Шмидта посвящены, например, работы Я. Г. Берковича, В. А. Ведерникова, В. Д. Мазурова, В. С. Монахова, С. А. Сыскина.

Говорят, что подгруппы A и B перестановочны, если $AB = BA$, т. е. множество всех элементов ab , где $a \in A$, $b \in B$ образует подгруппу. Подгруппа группы G называется перестановочной или квазинормальной, если она перестановочна со всеми подгруппами из G . В 1962 г. О. Кегель [3] ввел понятие S -квазинормальной подгруппы.

**Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках выполнения задания «Конечные группы с формационно-арифметическими свойствами»*

структурных объектов» (№ госрегистрации 20211467) ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Математические модели и методы» на 2021–2025 гг.

Определение 1. Подгруппа H группы G называется S -квазинормальной в G , если H перестановочна с каждой силовой подгруппой группы G .

Группы с S -квазинормальной подгруппой изучали многие авторы: М. Асаад, А. А. Гелиель, А. Баллестер-Болинше (1989), А. Баллестер-Болинше и П. Агилера (1996, 1998) и др.

С. Сринивасан доказал, что если максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G нормальны или S -квазинормальны в G , то G сверхразрешима.

Позже А. Шаалан доказал, что если каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 S -квазинормальна в группе G , то G является сверхразрешимой.

Одной из первых работ, посвященных перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта, является работа Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [4]. В этой работе были получены следующие результаты.

Теорема 1 [4, теорема 2]. Пусть каждая не лежащая в $S(G)$ 2-нильпотентная подгруппа Шмидта H четного порядка перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G , порядки которых взаимно просты с H . Тогда группа G разрешима.

Теорема 2 [4, теорема 6]. Пусть все силовые p -подгруппы группы G перестановочны со всеми p -замкнутыми pd -подгруппами Шмидта. Тогда группа G p -разрешима.

Теорема 3 [4, теорема 7]. Пусть каждая силовая 2-подгруппа группы G перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка. Тогда группа G разрешима.

Теорема 4 [4, теорема 8]. Если каждая p -замкнутая pd -подгруппа Шмидта порядка $p^\alpha q^\beta$ перестановочна со всеми силовскими q -подгруппами группы G , то G p -разрешима.

Теорема 5 [4, следствие 3]. Если каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из G , то G разрешима.

Результаты работы [4] развили В. Н. Княгина и В. С. Монахов. В работе [5] они установили признаки r -разрешимости групп с условием перестановочности силовой r -подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта.

Получены также признаки разрешимости групп, в которых некоторые подгруппы Шмидта перестановочны. Одним из основных результатов работы является следующая теорема.

Теорема 6 [5]. (1) Если некоторая силовая r -подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S_r(G)$ 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка, то группа G r -разрешима.

(2) Если некоторая силовая r -подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S_r(G)$ 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка и $r \notin \{3, 5\}$, то G r -разрешима.

(3) Если некоторая силовая r -подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S_r(G)$ r -замкнутыми rd -подгруппами Шмидта, то G r -разрешима.

(4) Если каждая не содержащаяся в $S_r(G)$ r -замкнутая rd -подгруппа Шмидта порядка $r^\alpha q^\beta$ перестановочна с некоторой силовой q -подгруппой группы G , то G r -разрешима.

Здесь $S_r(G)$ – наибольшая нормальная r -разрешимая подгруппа группы G для простого r .

В этой теореме ограничение $r \notin \{3, 5\}$ отбросить нельзя. Примерами служат группы $SL(2, 8)$ и $SL(2, 4)$. В простой группе $PSL(2, 7)$ нет 7-нильпотентных $7d$ -подгрупп Шмидта. Поэтому группа, в которой силовая r -подгруппа перестановочна со всеми r -нильпотентными rd -подгруппами Шмидта, не обязана быть r -разрешимой.

В работе [6] были получены локальные аналоги результатов работы Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [4, следствия 2–4].

Поскольку для любой подгруппы в группе существует добавление, то вполне естественно рассмотреть перестановочность с подгруппами из добавления. Так, в работе [7] было предложено следующее понятие.

Определение 2. Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G , если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_i – собственная в G подгруппа для всех собственных подгрупп B_i из B .

В. С. Монахов и В. Н. Княгина [8] исследовали группы, в которых имеются полунормальные подгруппы Шмидта четного порядка. В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 7 [8, теорема 1]. Если A – полунормальная подгруппа Шмидта группы G и подгруппа A^G неразрешима, то A является 2-замкнутой $\{2, 3\}$ -подгруппой.

Теорема 8 [8, теорема 2]. Если в группе G все $\{2, 3\}$ -подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2, 5\}$ -подгруппы Шмидта полунормальны, то группа G разрешима.

Применив идею О. Кегеля и понятие полунормальной подгруппы, в [9] введено следующее понятие.

Определение 3. Подгруппа A называется S -полунормальной (или SS -перестановочной) в группе G , если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна с каждой силовой подгруппой из B . В этом случае подгруппу B будем называть S -добавлением к A в G .

В работе [10] установлена разрешимость группы с S -полунормальными сверхразрешимыми подгруппами Шмидта четного порядка, перечислены неабелевы композиционные факторы группы, в которой несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка S -полунормальны, доказаны признаки частичной разрешимости групп, некоторые подгруппы Шмидта которых S -полунормальны.

По аналогии с полунормальной подгруппой (определение 2) можно исследовать группы, в которых некоторая силовая подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта из добавления к этой силовой подгруппе. В. С. Монахов предложил следующее понятие.

Определение 4. Подгруппа A группы G называется OS -полунормальной в G , если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B . В этой ситуации подгруппу B будем называть OS -добавлением к подгруппе A в группе G .

Обозначение OS связано с Отто Юльевичем Шмидтом.

Понятие OS -полуноormalьной подгруппы является обобщением понятия полуноormalьной подгруппы.

Автором в работе [11] изучено строение группы, у которой некоторая силовская подгруппа OS -полуноormalьна.

В. Н. Тютянов и П. В. Бычков [12] установили, что неабелевы композиционные факторы группы, в которой нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, принадлежат множеству

$$\Omega = \{PSL(2, 2^n), n \geq 2; PSL(2, q), q = 2^k + 1; PSU(4, 2) \simeq PSp(4, 3); PSp(4, 2^n), n \geq 2; Sz(2^{2n+1}), n \geq 1\}.$$

В работе [13] описаны неабелевы композиционные факторы группы, у которой некоторая силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка, доказана следующая теорема.

Теорема 9 [13]. Если некоторая силовская p -подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка из G , то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2, 7)$ или группам из множества Ω .

В теории конечных групп часто встречается ситуация, когда подгруппы A и B группы G не являются перестановочными, но в G имеется такой элемент x , для которого имеет место $AB^x = B^xA$.

А. Н. Скиба [14] предложил концепцию X -перестановочных подгрупп.

Определение 5. [14]. Пусть X – непустое множество из группы G .

(1) Подгруппа A называется X -перестановочной с подгруппой B , если существует элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^xA$.

(2) Подгруппа A называется X -перестановочной в G , если A X -перестановочна со всеми подгруппами из G .

Он в соавторстве с коллегами (В. Го, К. П. Шамо) опубликовали цикл работ, в которых установлены признаки разрешимости, сверхразрешимости групп при условии, что некоторые подгруппы X -перестановочны, где X – некоторое непустое множество группы.

А. Н. Скиба и И. Сяолян [15] рассмотрели еще одно обобщение полуноormalьной подгруппы.

Определение 6. Подгруппа A называется проперестановочной в группе G , если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$ и AX – подгруппа для каждой подгруппы X из B . Подгруппу B в дальнейшем будем называть продобавлением к A в G .

Идеи работ [11] и [15] привели к следующему понятию.

Определение 7. Подгруппа A группы G называется OS -проперестановочной в G , если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$, AB является подгруппой группы G и подгруппа A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B . В этой ситуации подгруппу B будем называть OS -прдобавлением к A в G .

Автором в работе [16] установлена для простого числа $r \geq 7$ r -разрешимость группы, в которой силовская r -подгруппа OS -проперестановочна.

В настоящей работе для $r < 7$ перечислены все неабелевы композиционные факторы группы, в которой силовская r -подгруппа OS -проперестановочна, также доказана разрешимость группы с OS -проперестановочными силовскими 2- и 3-подгруппами.

Теорема А. Пусть в группе G силовская p -подгруппа OS -проперестановочна.

(1) Если $p = 2$, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2, 7)$. В частности, группа G $\{2, 3, 7\}$ -разрешима.

(2) Если $p = 3$, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2, 8)$ или являются $3'$ -группами.

(3) Если $p = 5$, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2, 4)$ или являются $5'$ -группами.

(4) Если $p \geq 7$, то группа G p -разрешима.

Отсюда вытекает разрешимость группы с OS-проперестановочными силовскими 2- и 3-подгруппами.

1. Используемые обозначения и результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [17], [18].

Пусть p – простое число. Группа с нормальной силовской p -подгруппой называется p -замкнутой. Группа, содержащая нормальную подгруппу, индекс которой совпадает с порядком силовской p -подгруппы, называется p -нильпотентной. Если порядок подгруппы X делится на простое число p , то говорят, что X – pd -подгруппа. Обозначим через $H^G = \langle H^x \mid x \in G \rangle$ наименьшую нормальную в G подгруппу, содержащую подгруппу H . Центр и коммутант группы G обозначаются через $Z(G)$ и G' соответственно. Симметрическая и знакопеременная группы степени n обозначаются через S_n и A_n ; диэдральная, циклическая и элементарная абелева группы порядков k , m и p^t обозначаются через D_k , Z_m и E_{p^t} соответственно, $[A]B$ – прямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B . (1)

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначим через π' . Итак, $\pi \subseteq P$ и $\pi' = P \setminus \pi$. Символом π обозначается также функция, определенная на множестве N следующим образом: $\pi(m)$ – множество простых чисел, делящих натуральное число m , а $\pi(G) = \pi(|G|)$. Зафиксируем множество простых чисел π . Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется π -числом. Группа G называется: π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$; π' -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. Если $|\pi(G)| = 1$, то группа G называется *примарной*, при $|\pi(G)| = 2$ – *бипримарной*.

Субнормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G_{i+1} для всех $i = 0, 1, \dots, m-1$. Ряд (1) называется *композиционным*, если G_i является максимальной нормальной подгруппой группы G_{i+1} для каждого i , фактор-группы G_{i+1}/G_i называются *композиционными факторами* этого ряда, а числа $|G_{i+1}/G_i|$, $i = 0, 1, \dots, m-1$ – индексами композиционного ряда.

Группа называется π -разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми π -группами, либо π' -группами.

В следующей лемме приведены свойства групп Шмидта, полученные самим О. Ю. Шмидтом в 1924 г.

Лемма 1 [1]. Пусть S – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $S = [P]Q$, где P – нормальная силовская p -подгруппа, Q – ненормальная силовская q -подгруппа, p и q – различные простые числа;

(2) $Q = \langle y \rangle$ – циклическая подгруппа и $y^q \in Z(S)$;

(3) $|P/P'| = p^m$, где m – показатель числа p по модулю q .

Условимся называть $S_{\langle p,q \rangle}$ -группой группу Шмидта с нормальной силовской p -подгруппой P и циклической силовской q -подгруппой Q . Минимальным добавлением к подгруппе A в группе G называется такая подгруппа B , что $G = AB$ и $AB_i \neq G$ для всех собственных подгрупп B_i из B .

Лемма 2 [4, лемма 1]. Если K и D – подгруппы группы G , подгруппа D нормальна в K и $K/D = S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:

(1) L – p -замкнутая $\{p, q\}$ -подгруппа;

(2) все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;

(3) L содержит $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = ([P]Q)^L = Q^L$.

Лемма 3 [18, VI.4.10]. Пусть A и B – подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^g = B^g A$ для всех $g \in G$. Тогда либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.

Лемма 4 [7, лемма 11]. Если простая группа G является произведением p -подгруппы P и подгруппы Шмидта S , то справедливо одно из следующих утверждений:

(1) $p = 2$, $G \simeq \text{PSL}(2, 7)$, $P \simeq D_8$, $S \simeq [Z_7]Z_3$;

(2) $p = 3$, $G \simeq \text{SL}(2, 8)$, $P \simeq Z_9$, $S \simeq [E_8]Z_7$;

(3) $p = 5$, $G \simeq \text{PSL}(2, 5)$, $P \simeq Z_5$, $S \simeq A_4 \simeq [E_4]Z_3$.

Лемма 5. (1) Если группа G является произведением двух подгрупп A и B взаимно простых порядков и K – субнормальная в G подгруппа, то $K = (K \cap A)(K \cap B)$, [19, лемма 1].

(2) Пусть H , K и N – попарно перестановочные подгруппы группы G . Если H холлова, то $N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K)$, [8, лемма 5].

Лемма 6 [16, лемма 6]. Пусть A – OS-проперестановочная подгруппа группы G и B ее OS-продобавление.

(1) Для любого элемента $g \in G$ подгруппа B^g будет OS-продобавлением к подгруппе A в группе G .

(2) Для любого элемента $g \in G$ подгруппа A^g будет OS-проперестановочной в группе G , а подгруппы B и B^g – ее OS-продобавлениями.

Лемма 7 [16, лемма 7]. Пусть A – OS-проперестановочная подгруппа группы G и B – ее OS-продобавление.

(1) Если $N \triangleleft G$, то AN – OS-проперестановочна в G и B является OS-продобавлением к AN в G .

(2) Если $N \triangleleft G$, то AN/N – OS-проперестановочна в G/N и BN/N является OS-продобавлением к AN/N в G/N .

(3) Если A – OS -проперестановочная подгруппа группы G и B – OS -продобавление в G , то $A^G = A(A^G \cap B)$ и A OS -проперестановочна в A^G и $A^G \cap B$ – OS -продобавление к A в A^G .

Лемма 8. Пусть A – неединичная OS -проперестановочная подгруппа простой группы G и B – ее минимальное OS -продобавление. Тогда все собственные подгруппы в B нильпотентны, т. е. либо B нильпотентна, либо B есть группа Шмидта.

Доказательство. Предположим, что в B имеется собственная ненильпотентная подгруппа. Тогда существует подгруппа Шмидта $S < B$ и $AS < G$. Из леммы 6 (1) следует, что $AS^g = S^g A$ для любого $g \in G$. По лемме 3, либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$, что противоречит условию доказываемого предложения. Поэтому предположение неверно, и B либо нильпотентная подгруппа, либо группа Шмидта.

Лемма 9. Пусть R – неединичная OS -проперестановочная r -подгруппа простой группы G и B – ее минимальное OS -продобавление. Тогда для R , B , и G возможны только следующие изоморфизмы:

- (1) $R \simeq Z_5$, $B \simeq A_4$, $G \simeq PSL(2, 5)$;
- (2) $R \simeq D_8$, $B \simeq [Z_7]Z_3$, $G \simeq PSL(2, 7)$;
- (3) $R \simeq Z_9$, $B \simeq [E_8]Z_7$, $G \simeq SL(2, 8)$.

Доказательство. Так как G – простая группа, то $R^G = G$ и $G = RB$, R – OS -проперестановочна в G по лемме 6. Согласно лемме 8 и теореме Виланда – Кегеля, подгруппа B является группой Шмидта $B = [P]Q$. По лемме 4, группа $G \in \{PSL(2, 7), PSL(2, 5), SL(2, 8)\}$. Факторизации этих групп известны [20], искомые факторизации указаны в пунктах (1) – (3).

Лемма 10. Пусть U подгруппа группы G и N нормальная подгруппа в G . Если все подгруппы Шмидта из U содержатся в N , то UN/N нильпотентна.

Доказательство. В силу изоморфизма $UN/N \simeq U/U \cap N$ достаточно доказать, что $U/U \cap N$ нильпотентна. Предположим обратное и пусть $D = U \cap N$, K/D подгруппа Шмидта в U/D . По лемме 2, существуют подгруппы $S \leq L \leq K \leq U$ такие, что $K = LD$ подгруппа Шмидта и $S^L = L$. По условию, $S \leq N \cap U = D$. Следовательно, $K = LD = S^L D \leq D$, противоречие с $K/D \neq 1$. Лемма доказана.

Лемма 11. Предположим, что в группе G силовская p -подгруппа OS -проперестановочна. Если H – субнормальная подгруппа в P^G , то силовская p -подгруппа из H OS -проперестановочна в H .

Доказательство. Поскольку P OS -проперестановочна в G , отсюда следует, что $G = N_G(P)B$ и P перестановочна со всеми подгруппами Шмидта группы B . Пусть H_p – силовская p -подгруппа из H такая, что $H_p = P \cap H$.

Предположим, что $P^G = G$. Тогда по условию мы имеем, что H субнормальна в G , и, по лемме 7 (3), $G = P^G = P(P^G \cap B) = PB$.

Воспользуемся индукцией по порядку G . Предположим, что H нормальна в G . Тогда H перестановочна с подгруппами P и B . По лемме 5,

$$H = (P \cap H)(B \cap H) = H_p(B \cap H) = N_H(H_p)(B \cap H).$$

Пусть S – подгруппа Шмидта в $B \cap H$. По условию $SP = PS$. С $S \leq B \cap H$, мы имеем это по тождеству Дедекинда:

$$H \cap SP = S(H \cap P) = SH_p = H \cap PS = (H \cap P)S = H_p S.$$

Следовательно, силовская p -подгруппа H_p группы H OS-проперестановочна в H и $B \cap H$ является OS-дополнением к H_p в H .

Пусть теперь H ненормальна в G . Поскольку H субнормальна в G , имеем, что H субнормальна в H^G и $H^G < G$. Согласно доказанному, силовская p -подгруппа группы H^G OS-проперестановочна в H^G . Теперь, по индукции, силовская p -подгруппа группы H OS-проперестановочна в H .

Следовательно, $P^G < G$. Поскольку H субнормальна в P^G , то отсюда следует, что H субнормальна в $P^G = P^{P^G}$.

По лемме 7 (3), $P^G = P(P^G \cap B)$ и P OS-проперестановочна в P^G . Тогда силовская p -подгруппа группы H OS-проперестановочна в H по индукции. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы А

Ясно, что p -разрешимость группы G эквивалентна утверждению (4'). Если $p \geq 7$, то все неабелевы композиционные факторы группы G являются p' -группами.

Поскольку P OS-проперестановочна в G , то отсюда следует, что $G = N_G(P)B$ и P перестановочна со всеми подгруппами Шмидта группы B .

Предположим, что $P^G = G$. Тогда, по лемме 7 (3),

$$G = P^G = P(P^G \cap B) = PB.$$

Будем доказывать все утверждения одновременно. Воспользуемся индукцией по порядку группы G . Пусть H/K – произвольный неабелевый композиционный фактор группы G . Тогда H – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа K нормальна в H и фактор-группа H/K простая. Кроме того, $H \leq P^G = G$. Если $H \neq G$, то, по лемме 11, H_p OS-проперестановочна в H и, по индукции, H/K – подгруппа из пунктов (1) – (3), (4'). В этом случае теорема доказана.

Следовательно, $H = G$. Тогда G/K – простая группа и $(PK/K)^G = G/K$. По лемме 7 (3), $G/K = (PK/K)(BK/K)$.

По теореме Виланда – Кегеля, подгруппа BK/K ненильпотента, а, по лемме 10, в подгруппе B существует подгруппа Шмидта S такая, что S не содержится в K . По условию, $PS = SP$, а из леммы 6 следует, что $PS^x = S^x P$ для всех $x \in G$. Поэтому

$$(PK/K)(SK/K)^{xK} = (SK/K)^{xK}(PK/K).$$

Так как G/K – простая группа, то из леммы 3 заключаем, что $G/K = (PK/K)(SK/K)$. У группы Шмидта фактор-группы либо циклические, либо являются вновь группами Шмидта. По теореме Виланда – Кегеля, подгруппа $SK/K \simeq S/S \cap K$ не циклическая, поэтому SK/K – группа Шмидта и применима лемма 9. Из этой леммы следует, что $p \leq 5$ и $G/K \simeq PSL(2, 7)$ при $p = 2$, $SL(2, 8)$ при $p = 3$ или $SL(2, 4)$ при $p = 5$.

Пусть $P^G < G$, тогда G/P^G – p' -группа. Пусть H/K – произвольный неабелев композиционный фактор в P^G . Тогда H субнормальна в P^G , и, по лемме 11,

силовская p -подгруппа из H OS -проперестановочна в H . По индукции, все неабелевы компо-зиционные факторы из H и, следовательно, группы G удовлетворяют условиям (1) – (3), (4') теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. Если в группе G силовские 2- и 3-подгруппы OS -проперестановочны, то группа G разрешима.

Доказательство. Предположим, что группа G неразрешима и H/K – неабелев композиционный фактор группы G . По теореме А (1), $H/K \simeq PSL(2,7)$, поэтому $3 \in \pi(H/K)$. По условию, силовская 3-подгруппа группы G OS -проперестановочна. По теореме А (2), $H/K \simeq SL(2,8)$. Так как $PSL(2,7) \not\simeq SL(2,8)$, то имеем противоречие. Поэтому предположение неверно и G разрешима.

Следствие 2. Если в группе G силовские 2- и 7-подгруппы OS -проперестановочны, то группа G разрешима.

Доказательство. Предположим, что группа G неразрешима и H/K – неабелев композиционный фактор группы G . По теореме А (1), $H/K \simeq PSL(2,7)$, поэтому $7 \in \pi(H/K)$. По условию, силовская 7-подгруппа группы G OS -проперестановочна. По теореме 1 (4), группа G 7-разрешима, поэтому H/K 7-разрешима. Противоречие.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Шмидт, О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О. Ю. Шмидт // Мат. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.
2. Монахов, В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В. С. Монахов // Тр. Укр. мат. конгресса – 2001. – Киев, 2002. – Секция 1. – С. 81–90.
3. Kegel, O. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78, 1. – P. 205–221.
4. Беркович, Я. Г. О перестановочности подгрупп конечной группы / Я. Г. Беркович, Э. М. Пальчик // Сиб. мат. журн. – 1967. – Т. 8, 4. – С. 741–753.
5. Княгина, В. Н. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16, 3. – С. 130–139.
6. Княгина, В. Н. О π' -свойствах конечной группы, обладающей π -холловой подгруппой / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, 2. – С. 297–309.
7. Su, X. On seminormal subgroups of finite group / X. Su // J. Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, 1. – P. 7–9.
8. Княгина, В. Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, 4. – С. 448–458.
9. Ballester-Bolinches, A. Products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Assad. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2010.
10. Монахов, В. С. О разрешимости конечной группы с S -полунормальными подгруппами Шмидта / В. С. Монахов, В. Н. Княгина, Е. В. Зубей // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, 11. – С. 1511–1518.
11. Монахов, В. С. О композиционных факторах конечной группы с OS -полунормальной силовской подгруппой / В. С. Монахов, Е. В. Зубей // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2018. – Т. 26, 1. – С. 88–94.

12. Тютянов, В. Н. Конечные группы с нильпотентными подгруппами нечетного порядка / В. Н. Тютянов, П. В. Бычков // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 84–86.
13. Трофимук, А. А. О перестановочности силовой подгруппы с подгруппами Шмидта нечетного порядка / А. А. Трофимук, Е. В. Зубей // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 69–71.
14. Guo, W. X -semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315, 1. – P. 31–41.
15. Yi, X. On S -propermutable subgroups of finite groups / X. Yi, A. N. Skiba // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2015. – Vol. 38, Nr 2. – P. 605–616.
16. Зубей, Е. В. Конечные группы с OS -проперестановочными подгруппами / Е. В. Зубей // Чебышев. сб. – 2021. – Т. 22, № 3. – С. 457–463.
17. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
18. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 796 p.
19. Монахов, В. С. О произведении 2-разложимой группы и группы Шмидта / В. С. Монахов // Докл. АН БССР. – 1974. – Т. 18, 10. – С. 871–874.
20. Монахов, В. С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В. С. Монахов // Конечные группы : сб. ст. – Минск : Наука и техника, 1975. – С. 70–100.

REFERENCES

1. Shmidt, O. Yu. Gruppy, vsie podgruppy kotorykh spicial'nyje / O. Yu. Shmidt // Mat. sb. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.
2. Monakhov, V. S. Podgruppy Shmidta, ikh sushchiestvovaniye i niekotoryje prilozheniya / V. S. Monakhov // Tr. Ukr. mat. kongressa – 2001. – Kiyev, 2002. – Sikcija 1. – С. 81–90.
3. Kegel, O. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78, 1. – P. 205–221.
4. Bierkovich, Ya. G. O pieriestanovochnosti podgrupp koniechnoj gruppy / Ya. G. Bierkovich, E. M. Pal'chik // Sib. mat. zhurn. – 1967. – Т. 8, 4. – С. 741–753.
5. Kniagina, V. N. O pieriestanovochnosti silovskikh podgrupp s podgruppami Shmidta / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // Tr. IMM UrO RAN. – 2010. – Т. 16, 3. – С. 130–139.
6. Kniagina, V. N. О π' -svoystvakh koniechnoj gruppy, obladajushchiej π' -khollovoj podgruppoy / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // Sib. mat. zhurn. – 2011. – Т. 52, 2. – С. 297–309.
7. Su, X. On seminormal subgroups of finite group / X. Su // J. Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, 1. – P. 7–9.
8. Kniagina, V. N. Koniechnyje gruppy s polunormal'nymi podgruppami Shmidta / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // Algiebra i logika. – 2007. – Т. 46, 4. – С. 448–458.
9. Ballester-Bolinches, A. Products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Assad. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2010.
10. Monakhov, V. S. O razrieshimosti koniechnoj gruppy s S -polunormalnymi podgruppami Shmidta / V. S. Monakhov, V. N. Kniagina, Ye. V. Zubiej // Ukr. mat. zhurn. – 2018. – Т. 70, 11. – С. 1511–1518.
11. Monakhov, V. S. O kompozicionnykh faktorakh koniechnoj gruppy s OS -polunormal'noj silovskoj podgruppoy / V. S. Monakhov, Ye. V. Zubiej // Tr. In-ta matematiki NAN Bielarusi. – 2018. – Т. 26, 1. – С. 88–94.

12. Tiutianov, V. N. Koniechnyje grupy s nil'potentnymi podgruppami niechiotnogo poriadka / V. N. Tiutianov, P. V. Bychkov // Problemy fiziki, matematiki i tiehniki. – 2018. – № 3 (36). – S. 84–86.
13. Trofimuk, A. A. O pieriestanovochnosti silovskoj podgruppy s podgruppami Shmidta niechiotnogo poriadka / A. A. Trofimuk, Ye. V. Zubiej // Problemy fiziki, matematiki i tiehniki. – 2019. – № 1 (38). – S. 69–71.
14. Guo, W. X -semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315, 1. – P. 31–41.
15. Yi, X. On S -propermutable subgroups of finite groups / X. Yi, A. N. Skiba // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2015. – Vol. 38, Nr 2. – P. 605–616.
16. Zubiej, Ye. V. Koniechnyje grupy s OS-propieriestanovochnymi podgruppami / Ye. V. Zubiej // Chiebyshhev. sb. – 2021. – T. 22, № 3. – S. 457–463.
17. Monakhov, V. S. Vviedeniye v tieoriju koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk, 2006. – 207 s.
18. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 796 p.
19. Monakhov, V. S. O proizviedenii 2-razlozhimoy gruppy i gruppy Shmidta / V. S. Monakhov // Dokl. AN BSSR. – 1974. – T. 18, 10. – S. 871–874.
20. Monakhov, V. S. Proizviedeniye koniechnykh grupp, blizkikh k nil'potentnym / V. S. Monakhov // Koniechnyje grupy : sb. st. – Minsk : Nauka i tiehnika, 1975. – S. 70–100.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 04.11.2024