

УДК 517.954

**Александр Иванович Басик¹, Евгений Васильевич Грицук²,
Ольга Вадимовна Болтрушко³**

¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. математики и информатики
Брестского государственного технического университета

³студент 4-го курса физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Aliaxandr Basik¹, Evgenij Hrytsuk², Olga Boltrushko³

¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University

²Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Mathematics and Informatics
of Brest State Technical University

³4-th Year Student of the Department of Physics and Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University

email: ¹alex-basik@yandex.ru; ²gricuk_e@tut.by; ³boltrushko.ol@gmail.com

КЛАССИФИКАЦИЯ РЕГУЛЯРИЗУЕМЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается подмножество $M(4; 1; 3)$ класса эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка псевдосимметрического типа в $\mathbf{R}^3$. Доказывается, что рассматриваемое множество $M(4; 1; 3)$ имеет две компоненты гомотопической связности. Для систем из $M(4; 1; 3)$ доказывается условие, обеспечивающее регуляризуемость краевой задачи Римана – Гильберта в произвольной ограниченной односвязной области. Полученное условие позволяет доказать, что множество регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для рассматриваемого класса систем имеет четыре компоненты гомотопической связности, а также что индекс произвольной регуляризуемой задачи равен минус единице.

Ключевые слова: эллиптическая система, регуляризуемая краевая задача, условие Лопатинского, гомотопическая классификация.

Classification of Regularisable Riemann – Hilbert Boundary Value Problems for One Class Elliptic Systems in the Three-Dimensional Space

We consider a subset $M(4; 1; 3)$ of the class of elliptic systems of four first-order differential equations of pseudosymmetric type in $\mathbf{R}^3$. It is proved that the set $M(4; 1; 3)$ has two homotopy classes. A condition that ensures the regularizability of the Riemann – Hilbert boundary value problem for this systems in an arbitrary bounded domain with smooth boundary is proved. Using this condition, it is established that the set of regularizable Riemann – Hilbert boundary value problems for systems of the set $M(4; 1; 3)$ has four homotopy classes. It is also shown that the index of an arbitrary regularizable problem is equal to minus one.

Key words: elliptic system, regularizable boundary value problem, Lopatinski condition, homotopic classification.

Введение

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \quad (1)$$

где A_1, A_2, A_3 – постоянные действительные матрицы размера 4×4 , $U = (u_1(x), \dots, u_4(x))^T$ – искомая вектор-функция, $x \in \mathbf{R}^3$, T означает транспонирование.

Известным представителем эллиптических систем вида (1) является система Моисила – Теодореску, которая является аналогом системы Коши – Римана в трехмерном пространстве и связана со статическими пространственными уравнениями Ламе [1; 2]. В. И. Шевченко получил условие, обеспечивающее регуляризуемость краевой задачи Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореску в произвольной односвязной области, и провел гомотопическую классификацию регуляризуемых задач для этой системы [3].

В работе [4] А. Т. Уссом выделен класс систем вида (1), являющихся трехмерными аналогами системы Коши – Римана (сокращенно ТКР-системы), и выяснена топологическая структура множества ТКР-систем.

Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для ТКР-систем проведена в [5].

В [6] проведены гомотопическая классификация эллиптических систем псевдосимметрического типа в $\mathbf{R}^3$ и в классе псевдодифференциальных операторов классификация краевых задач для таких систем.

Всюду ниже в этой статье мы будем рассматривать системы вида (1), для которых E – единичная матрица четвертого порядка, а коэффициенты A_2 и A_3 имеют вид

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k & b_k & 0 \\ -a_k & 0 & 0 & -b_k \\ -b_k & 0 & 0 & a_k \\ 0 & b_k & -a_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 2, 3), \quad (2)$$

где $a_2, a_3, b_2, b_3 \in \mathbf{R}$.

Множество всех эллиптических систем (1) с коэффициентами (2) обозначим $M(4; 1; 3)$. Это множество образует подкласс в классе эллиптических систем псевдосимметрического типа в $\mathbf{R}^3$. Отметим, что набором чисел (a_2, b_2, a_3, b_3) система из $M(4; 1; 3)$ определяется однозначно.

В настоящей статье проводится гомотопическая классификация множества $M(4; 1; 3)$. Также доказывается критерий, обеспечивающий регуляризуемость произвольной краевой задачи Римана – Гильберта для систем класса $M(4; 1; 3)$, и проводится гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач.

Гомотопическая классификация множества $M(4; 1; 3)$

Лемма 1. Система (1) является эллиптической тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$.

Доказательство. Эллиптичность системы (1) означает, что характеристическая матрица этой системы

$$A(\xi) = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3$$

является невырожденной при каждом ненулевом векторе $\xi \in \mathbf{R}^3$.

Нетрудно убедиться, что

$$\det A(\xi) = (\xi_1^2 + (a_2\xi_2 + a_3\xi_3)^2 + (b_2\xi_2 + b_3\xi_3)^2)^2.$$

Уравнение $\det A(\xi) = 0$ равносильно линейной однородной системе уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 = 0, \\ a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = 0, \\ b_2\xi_2 + b_3\xi_3 = 0, \end{cases}$$

которая имеет только нулевое решение в том и только том случае, когда ее определитель отличен от нуля, т. е. когда $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$. Лемма доказана.

Две эллиптические системы из множества $M(4; 1; 3)$ назовем гомотопными, если их можно соединить друг с другом непрерывной деформацией коэффициентов в указанном классе без нарушения условия эллиптичности. Нетрудно видеть, что введенное отношение гомотопии на множестве $M(4; 1; 3)$ является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности называются компонентами гомотопической связности.

Вопрос о гомотопической классификации эллиптических систем был сформулирован И. М. Гельфандом, И. Г. Петровским и Г. Е. Шиловым [7] и состоит в нахождении количества компонент гомотопической связности, гомотопических инвариантов и простейших представителей компонент. Отметим, что к настоящему времени этот вопрос далек от своего окончательного ответа.

Обозначим через $M_+(4; 1; 3)$ совокупность всех систем класса $M(4; 1; 3)$, для которых выполняется неравенство $a_2b_3 - a_3b_2 > 0$, а через $M_-(4; 1; 3)$ – для которых $a_2b_3 - a_3b_2 < 0$.

Теорема 2. *Множество $M(4; 1; 3)$ имеет две компоненты гомотопической связности $M_+(4; 1; 3)$ и $M_-(4; 1; 3)$. Каждая система из $M_+(4; 1; 3)$ гомотопна системе*

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

а из класса $M_-(4; 1; 3)$ – системе

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ -\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Гомотопическим инвариантом является знак выражения $a_2b_3 - a_3b_2$.

Доказательство. Покажем, что произвольная система из класса $M_+(4; 1; 3)$ не гомотопна ни одной системе из $M_-(4; 1; 3)$. Предположим противное: пусть система

$A(\partial)U = 0$ из класса $M_+(4; 1; 3)$, соответствующая набору $(a_2^0, b_2^0, a_3^0, b_3^0)$, гомотопна системе $B(\partial)U = 0$ из класса $M_-(4; 1; 3)$, соответствующей набору $(a_2^1, b_2^1, a_3^1, b_3^1)$.

Это означает, что существует семейство систем $C_t(\partial)U = 0$ ($t \in [0; 1]$) класса $M(4; 1; 3)$, определяемое набором непрерывных на отрезке $[0; 1]$ функций $(a_2(t), b_2(t), a_3(t), b_3(t))$, такое, что

$$(a_2(0), b_2(0), a_3(0), b_3(0)) = (a_2^0, b_2^0, a_3^0, b_3^0) \text{ и } (a_2(1), b_2(1), a_3(1), b_3(1)) = (a_2^1, b_2^1, a_3^1, b_3^1).$$

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[0; 1]$ функцию

$$F(t) = a_2(t)b_3(t) - a_3(t)b_2(t).$$

Поскольку $F(0) = a_2^0 b_3^0 - a_3^0 b_2^0 > 0$ и $F(1) = a_2^1 b_3^1 - a_3^1 b_2^1 < 0$, то найдется точка $t_0 \in [0; 1]$ в которой $F(t_0) = 0$.

Согласно лемме 1, система $C_{t_0}(\partial)U = 0$ не является эллиптической. Полученное противоречие доказывает, что множество $M(4; 1; 3)$ имеет по крайней мере две компоненты гомотопической связности.

Покажем теперь, что множество $M_+(4; 1; 3)$ гомотопически связно. Пусть $A(\partial)U = 0$ – произвольная система из $M_+(4; 1; 3)$, определяемая набором (a_2, b_2, a_3, b_3) и условием $a_2 b_3 - a_3 b_2 > 0$.

Тогда векторы $a = (a_2, a_3)$ и $b = (b_2, b_3)$ образуют правый репер на плоскости. Согласно результатам книги [8, с. 212], репер Oab можно непрерывной деформацией с сохранением условия одноименности, перевести в стандартный базис плоскости $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Последнее означает, что система $A(\partial)U = 0$ гомотопна системе (3).

Векторы $a = (a_2, a_3)$ и $b = (b_2, b_3)$, образующие левый репер на плоскости, можно непрерывной деформацией с сохранением условия одноименности перевести в базис плоскости $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, -1)$ [8, с. 212]. Тем самым доказано, что каждая система из $M_-(4; 1; 3)$ гомотопна системе (4).

Теорема доказана.

Условие регуляризуемости задачи Римана – Гильберта для систем класса $M(4; 1; 3)$

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ – ограниченная односвязная область, границей которой является гладкая поверхность Ляпунова $\partial\Omega$.

Задача Римана – Гильберта для системы (1) состоит в отыскании решения этой системы, непрерывно дифференцируемого в Ω и непрерывного по Гельдеру в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, удовлетворяющего на $\partial\Omega$ граничным условиям

$$B(y)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega), \quad (5)$$

где B – матрица-функция размера 2×4 , а f – двухкомпонентная вектор-функция, непрерывные по Гельдеру на поверхности $\partial\Omega$.

Задача (1), (5) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я. Б. Лопатинского.

Это условие обеспечивает нетеровость задачи Римана – Гильберта как в классической постановке, так и в широкой шкале гильбертовых пространств [9; 10], и пред-

ставляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора, состоящее в том, что ранг матрицы

$$L(y, \tau) = B(y) \cdot \int_{\gamma} A^{-1}(\lambda \nu(y) + \tau(y)) d\lambda \quad (6)$$

равен двум в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом касательном к $\partial\Omega$ в точке y векторе $\tau = \tau(y)$.

Здесь через $\nu = \nu(y)$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y , и интегрирование в (6) ведется по простому замкнутому контуру γ , лежащему в верхней комплексной λ -полуплоскости и охватывающему корень $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ($\beta > 0$) уравнения

$$\det A(\lambda \nu(y) + \tau(y)) = 0.$$

Через Λ_{jk} обозначим минор матрицы $B(y)$, составленный из ее j -го и k -го столбцов ($j, k = 1, 2, 3, 4$), и рассмотрим векторное поле

$$P(y) = (\Lambda_{14} + \Lambda_{23}; a_2(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + b_2(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}); a_3(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + b_3(\Lambda_{12} + \Lambda_{34})). \quad (7)$$

Теорема 3. Задача (1), (5) регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке $y \in \partial\Omega$ выполняется неравенство

$$\langle \nu(y); P(y) \rangle \neq 0 \quad (8)$$

(здесь $\langle \cdot; \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbf{R}^3$).

Доказательство. Положим

$$a(\xi) = a_2\xi_2 + a_3\xi_3, \quad b(\xi) = b_2\xi_2 + b_3\xi_3, \quad c(\xi) = \xi_1^2 + a^2(\xi) + b^2(\xi).$$

Вычислим матрицу Лопатинского (6) задачи (1), (5). Так как

$$A^{-1}(\xi) = \frac{1}{\xi_1^2 + a^2(\xi) + b^2(\xi)} \begin{pmatrix} \xi_1 & -a(\xi) & -b(\xi) & 0 \\ a(\xi) & \xi_1 & 0 & b(\xi) \\ b(\xi) & 0 & \xi_1 & -a(\xi) \\ 0 & -b(\xi) & a(\xi) & \xi_1 \end{pmatrix},$$

то, согласно интегральной формуле Коши, получим

$$L(y, \tau) = B(y) \cdot \frac{2\pi i}{c(\nu)(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)} \begin{pmatrix} \lambda_1 \nu_1 + \tau_1 & -a(\lambda_1 \nu + \tau) & -b(\lambda_1 \nu + \tau) & 0 \\ a(\lambda_1 \nu + \tau) & \lambda_1 \nu_1 + \tau_1 & 0 & b(\lambda_1 \nu + \tau) \\ b(\lambda_1 \nu + \tau) & 0 & \lambda_1 \nu_1 + \tau_1 & -a(\lambda_1 \nu + \tau) \\ 0 & -b(\lambda_1 \nu + \tau) & a(\lambda_1 \nu + \tau) & \lambda_1 \nu_1 + \tau_1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через H_{jk} минор матрицы Я. Б. Лопатинского (6), составленный из ее j -го и k -го столбцов ($j, k = 1, 2, 3, 4$).

Тогда

$$H_{12} = H_{34}, \quad H_{13} = -H_{24}, \quad H_{14} = H_{23},$$

и с точностью до ненулевого множителя $2\pi i / (c(\nu)(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1))$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}H_{12} &= -b(\xi)(b(\xi)(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + a(\xi)(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + \xi_1(\Lambda_{14} + \Lambda_{23})), \\H_{13} &= a(\xi)(b(\xi)(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + a(\xi)(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + \xi_1(\Lambda_{14} + \Lambda_{23})), \\H_{14} &= \xi_1(b(\xi)(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + a(\xi)(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + \xi_1(\Lambda_{14} + \Lambda_{23})),\end{aligned}$$

где $\xi = (\alpha + i\beta)\nu + \tau$.

Условие максимальности ранга матрицы Я. Б. Лопатинского (6) равносильно тому, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом единичном касательном векторе $\tau(y)$ к $\partial\Omega$ в точке y выполняется неравенство

$$|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 \neq 0. \quad (9)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}&|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 = \\&= (|\xi_1|^2 + |a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2) |b(\xi)(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + a(\xi)(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + \xi_1(\Lambda_{14} + \Lambda_{23})|^2 = \\&= (|\xi_1|^2 + |a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2) |\langle \tau; P \rangle + \alpha \langle \nu; P \rangle + i\beta \langle \nu; P \rangle|^2.\end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что выполнение условия (9) равносильно утверждению теоремы. Теорема доказана.

Отметим, что условие регуляризуемости краевой задачи Римана – Гильберта в виде (8) было ранее установлено для системы Моисила – Теодореску [3], для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [5], для эллиптических кососимметрических систем в $\mathbf{R}^3$ [11], для некоторых эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ [12]. Отметим также, что метод В. И. Шевченко, примененный им для гомотопической классификации регуляризуемых задач для голоморфного вектора [3], с успехом был применен к гомотопической классификации регуляризуемых задач для других классов систем в работах [5; 11; 12]. В следующем разделе настоящей статьи мы этим методом проведем классификацию регуляризуемых задач для систем из $M(4; 1; 3)$.

Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для систем класса $M(4; 1; 3)$

Две регуляризуемые задачи Римана – Гильберта для систем из $M(4; 1; 3)$ называются гомотопными, если существует непрерывная деформация одной задачи в другую, не нарушающая условия Лопатинского и сохраняющая непрерывность по Гельдеру коэффициентов этих задач.

Вопрос о гомотопической классификации регуляризуемых краевых задач был сформулирован И. М. Гельфандом в 1960 г. и состоит в определении числа компонент связности, а также в указании представителей этих компонент и в установлении гомотопических инвариантов эллиптических псевдодифференциальных операторов, задаваемых регуляризуемыми краевыми задачами [13].

Введем следующие обозначения:

$\mathfrak{R}$ – множество регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта (1), (2), (5);

$\mathfrak{R}_+^+$ – множество регуляризуемых задач Римана – Гильберта (1), (2), (5), для которых выполняется неравенство $\langle \nu(y); P(y) \rangle > 0$ всюду на $\partial\Omega$ и $a_2b_3 - a_3b_2 > 0$;

$\mathfrak{R}_+^-$ – множество регуляризуемых задач (1), (2), (5), для которых $\langle \nu(y); P(y) \rangle > 0$ всюду на $\partial\Omega$ и $a_2b_3 - a_3b_2 < 0$;

$\mathfrak{R}_-^-$ – множество регуляризуемых задач (1), (2), (5), для которых $\langle v(y); P(y) \rangle < 0$ всюду на $\partial\Omega$ и $a_2b_3 - a_3b_2 < 0$;

$\mathfrak{R}_-^+$ – множество регуляризуемых задач (1), (2), (5), для которых $\langle v(y); P(y) \rangle < 0$ всюду на $\partial\Omega$ и $a_2b_3 - a_3b_2 > 0$.

Теорема 4. *Множество $\mathfrak{R}$ регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для эллиптических систем класса $M(4;1;3)$ имеет четыре компоненты гомотопической связности $\mathfrak{R}_+^+$, $\mathfrak{R}_+^-$, $\mathfrak{R}_-^+$, $\mathfrak{R}_-^-$. Гомотопическими инвариантами являются знак выражения $a_2b_3 - a_3b_2$ и знак скалярного произведения $\langle v(y); P(y) \rangle$.*

Доказательство. Достаточно показать связность множеств $\mathfrak{R}_+^+$, $\mathfrak{R}_+^-$, $\mathfrak{R}_-^+$ и $\mathfrak{R}_-^-$. Действительно, поскольку поверхность $\partial\Omega$ является связной и векторное поле $P(y)$ непрерывно на поверхности $\partial\Omega$, то скалярное произведение $\langle v(y); P(y) \rangle$ сохраняет знак на $\partial\Omega$, и, следовательно, задачи, для которых соответствующие скалярные произведения имеют разные знаки, не гомотопны.

Заметим также, что если знаки выражений $a_2b_3 - a_3b_2$ систем двух задач противоположны, то эти задачи также не гомотопны (теорема 2).

Пусть матрица $B(y)$ граничного условия (5) имеет вид

$$B(y) = \begin{pmatrix} m_1(y) & m_2(y) & m_3(y) & m_4(y) \\ n_1(y) & n_2(y) & n_3(y) & n_4(y) \end{pmatrix}.$$

Докажем гомотопическую связность множества $\mathfrak{R}_+^+$, следуя работе [3].

Поскольку в каждой точке $y \in \partial\Omega$ $\text{rank } B(y) = 2$ (в противном случае ранг матрицы Лопатинского (6) меньше 2), то первая строка $m(y)$ матрицы $B(y)$ не обращается в нуль на поверхности $\partial\Omega$. Поэтому существует [14] непрерывное отображение $M : \partial\Omega \times [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$ такое, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$

$$M(y, 0) = m(y) \text{ и } M(y, 1) = (1, 0, 0, 0),$$

и при каждом $t \in [0; 1]$ вектор-функция $M(\cdot, t)$ непрерывна по Гельдеру на $\partial\Omega$.

Проведем гомотопию матрицы граничного оператора задачи (1), (2), (5). Для этого рассмотрим линейную систему уравнений относительно неизвестной строки $N(y, t) = (N_1(y, t), N_2(y, t), N_3(y, t), N_4(y, t))$

$$\Xi(y, t)N^T(y, t) = \tilde{P}(y, t), \quad (10)$$

где матрица левой части системы (10) имеет вид

$$\Xi = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ -M_4 & -M_3 & M_2 & M_1 \\ a_2M_3 - b_2M_2 & -a_2M_4 + b_2M_1 & -a_2M_1 - b_2M_4 & a_2M_2 + b_2M_3 \\ a_3M_3 - b_3M_2 & -a_3M_4 + b_3M_1 & -a_3M_1 - b_3M_4 & a_3M_2 + b_3M_3 \end{pmatrix}$$

(для упрощения записей точка $(y, t) \in \partial\Omega \times [0; 1]$, в которой вычисляются элементы матрицы, не указывается), а правая часть системы (10):

$$\tilde{P}(y, t) = \begin{pmatrix} (1-t)(m_1(y)n_1(y) + m_2(y)n_2(y) + m_3(y)n_3(y) + m_4(y)n_4(y)) \\ (1-t)P_1(y) + t\nu_1(y) \\ (1-t)P_2(y) + t\nu_2(y) \\ (1-t)P_3(y) + t\nu_3(y) \end{pmatrix},$$

где $P(y) = (P_1(y), P_2(y), P_3(y))$ – векторное поле (7), $\nu(y) = (\nu_1(y), \nu_2(y), \nu_3(y))$ – единичное поле внутренних нормалей на поверхности $\partial\Omega$.

Заметим, что при всех $y \in \partial\Omega$ и $t \in [0; 1]$

$$\det \Xi(y, t) = (a_2b_3 - a_3b_2)(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2)^2 \neq 0.$$

Следовательно, система уравнений (10) при всех $y \in \partial\Omega$ и $t \in [0; 1]$ имеет единственное решение $N(y, t)$.

Нетрудно видеть, что полученное отображение $N : \partial\Omega \times [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}^4$ непрерывно и при каждом $t \in [0; 1]$ является непрерывным по Гельдеру на поверхности $\partial\Omega$.

Отметим, что при $t = 0$ вторая строка матрицы $B(y)$ является решением системы (10).

Рассмотрим гомотопию задачи (1), (2), (5), при которой система (1) остается неизменной, а матрица соответствующего этой системе граничного условия

$$B(y, t)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega), \quad (11)$$

имеет вид

$$B(y, t) = \begin{pmatrix} M_1(y, t) & M_2(y, t) & M_3(y, t) & M_4(y, t) \\ N_1(y, t) & N_2(y, t) & N_3(y, t) & N_4(y, t) \end{pmatrix}.$$

Векторное поле $P(y, t)$ (формула (7)), отвечающее задаче (1), (2), (11), удовлетворяет соотношению $P(y, t) = (1-t)P(y) + t\nu(y)$.

Поэтому при всех $y \in \partial\Omega$ и любом $t \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$\langle \nu(y); P(y, t) \rangle = (1-t)\langle \nu(y); P(y) \rangle + t > 0,$$

что в силу теоремы 3 означает регуляризуемость задачи (1), (2), (11) при каждом $t \in [0; 1]$. Граничное условие (11) при $t = 1$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2\nu_3(y) - a_3\nu_2(y)}{a_2b_3 - a_3b_2} & \frac{b_2\nu_3(y) - b_3\nu_2(y)}{a_2b_3 - a_3b_2} & \nu_1(y) \end{pmatrix} U(y) = f(y), \quad (12)$$

а поле (7) совпадает с полем внутренних нормалей $\nu(y)$ на $\partial\Omega$.

Как было показано при доказательстве теоремы 2, система (1), (2) гомотопна системе (3) (при этом в процессе гомотопии сохраняется знак выражения $a_2b_3 - a_3b_2$), поэтому произвольная задача из $\mathcal{R}_+^+$ гомотопна задаче Римана – Гильберта для системы (3) и граничного условия

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (u_2\nu_3 - u_3\nu_2 + u_4\nu_1)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \quad (y \in \partial\Omega). \quad (13)$$

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{R}_+^-$. В этом случае, система (1), (2) гомотопна системе (4), а произвольная задача из $\mathfrak{R}_+^-$ гомотопна задаче Римана – Гильберта для системы (4) и граничного условия

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (u_4v_1 - u_3v_2 - u_2v_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \quad (y \in \partial\Omega). \quad (14)$$

Аналогично доказывается, что каждая задача из множества $\mathfrak{R}_-^+$ гомотопна задаче для системы (3) с граничным условием

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (-u_4v_1 + u_3v_2 - u_2v_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \quad (y \in \partial\Omega), \quad (15)$$

а из $\mathfrak{R}_-^-$ – задаче для системы (4) с граничным условием

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (-u_4v_1 + u_3v_2 + u_2v_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \quad (y \in \partial\Omega). \quad (16)$$

Отметим основные отличия в рассуждениях. В системе уравнений (10) при $\langle v(y); P(y) \rangle < 0$ нужно положить

$$\tilde{P}(y, t) = \begin{pmatrix} (1-t)(m_1(y)n_1(y) + m_2(y)n_2(y) + m_3(y)n_3(y) + m_4(y)n_4(y)) \\ (1-t)P_1(y) - tv_1(y) \\ (1-t)P_2(y) - tv_2(y) \\ (1-t)P_3(y) - tv_3(y) \end{pmatrix}.$$

Тогда векторное поле $P(y, t)$ (формула (7)), отвечающее задаче (1), (2), (11), удовлетворяет соотношению $P(y, t) = (1-t)P(y) - tv(y)$.

Поэтому при всех $y \in \partial\Omega$ и $t \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$\langle v(y); P(y, t) \rangle = (1-t)\langle v(y); P(y) \rangle - t < 0,$$

что в силу теоремы 3 означает регуляризуемость задачи (1), (2), (11) при каждом $t \in [0; 1]$. Граничное условие (11) при $t = 1$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_3v_2(y) - a_2v_3(y)}{a_2b_3 - a_3b_2} & \frac{b_3v_2(y) - b_2v_3(y)}{a_2b_3 - a_3b_2} & -v_1(y) \end{pmatrix} U(y) = f(y),$$

а поле (7) на поверхности $\partial\Omega$ совпадает с полем $-v(y)$.

Теорема доказана.

Следствие. Индекс произвольной регуляризуемой задачи Римана – Гильберта (1), (2), (5) равен минус единице.

Доказательство. Поскольку индексы гомотопных регуляризуемых задач равны, то для вычисления индекса произвольной задачи из множества $\mathfrak{R}$ достаточно вычислить индекс простейших задач.

Рассмотрим задачу Римана – Гильберта для системы (3) с граничным условием (13). Заменой $V = (u_4, -u_3, u_2)$ и $W = -u_1$ эта задача приводится к виду

$$\operatorname{div} V(x) = 0, \operatorname{rot} V(x) = \operatorname{grad} W(x) \quad (x \in \Omega), \quad (17)$$

$$W|_{\partial\Omega} = -f_1(y), \langle V; \nu \rangle|_{\partial\Omega} = f_2(y) \quad (y \in \partial\Omega). \quad (18)$$

Индекс задачи (17), (18) вычислен в работе [14] и равен минус единице.

Заменой $V = (-u_4, u_3, -u_2)$ и $W = u_1$ задача Римана – Гильберта для системы (3) с граничным условием (15) приводится к виду (17), (18) (с тем лишь отличием, что $W|_{\partial\Omega} = f_1(y)$).

Заменой $V = (u_4, -u_3, -u_2)$ и $W = u_1$ задача Римана – Гильберта для системы (4) с граничным условием (14) приводится к виду (17), (18) (с тем лишь отличием, что $W|_{\partial\Omega} = f_1(y)$).

Заменой $V = (-u_4, u_3, u_2)$ и $W = -u_1$ задача Римана – Гильберта для системы (4) с граничным условием (16) приводится к виду (17), (18).

Что и требовалось доказать.

Заключение

В настоящей статье рассматривается подкласс $M(4; 1; 3)$ множества эллиптических систем псевдосимметрического типа в трехмерном пространстве.

Доказывается, что:

- 1) множество $M(4; 1; 3)$ имеет две компоненты гомотопической связности;
- 2) регуляризуемость задачи Римана – Гильберта для систем класса $M(4; 1; 3)$ равносильна невхождению специального векторного поля, построенного по коэффициентам задачи, в касательную плоскость к границе области в каждой точке;
- 3) множество регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для систем класса $M(4; 1; 3)$ имеет четыре компоненты гомотопической связности;
- 4) индекс регуляризуемой задачи Римана – Гильберта для систем класса $M(4; 1; 3)$ равен минус единице.

Отметим, что в четырехмерном пространстве для класса эллиптических систем псевдосимметрического типа отсутствуют регуляризуемые краевые задачи [15; 16].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Moisil, G. G. Fonctions holomorphes dans l'espace / G. G. Moisil, N. Theodorescu // *Mathematica*. – 1931. – Vol. 5. – P. 141–153.
2. Бицадзе, А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А. В. Бицадзе. – М. : Наука, 1966. – 202 с.
3. Шевченко, В. И. Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // *Мат. физика : респ. межвед. сб.* – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.
4. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // *Докл. НАН Беларуси*. – 2002. – Т. 46, № 5. – С. 30–34.
5. Усс, А. Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.
6. Басик, А. И. Гомотопическая классификация краевых задач Римана – Гильберта для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, А. Т. Усс // *Тр. Ин-та математики НАН Беларуси*. – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 33–37.

7. Гельфанд, И. М. Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными / И. М. Гельфанд, И. Г. Петровский, Г. Е. Шиллов // Тр. Третьего Всесоюз. мат. съезда, Москва, июнь-июль 1956 : в 4 т. / АН СССР. – М., 1958. – Т. 3 : Обзорные доклады / редкол. А. А. Абрамов [и др.]. – С. 65–72.
8. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры / П. С. Александров ; сост. А. С. Пархоменко. – М. : Наука, 1968. – 911 с.
9. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.
10. Лопатинский, Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я. Б. Лопатинский // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5. – С. 123–151.
11. Басик, А. И. Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук // Математика. Інформаційні технології : зб. ст. – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.
12. Басик, А. И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16. – Doi: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16>
13. Гельфанд, И. М. Об эллиптических уравнениях / И. М. Гельфанд // Успехи мат. наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121–132.
14. Шевченко, В. И. О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Мат. физика : респ. межвед. сб. – Киев, 1970. – Вып. 8. – С. 172–186.
15. Виноградов, В. С. Граничная задача для псевдосимметрических систем / В. С. Виноградов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 161–163.
16. Басик, А. И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в $\mathbf{R}^4$ / А. И. Басик, А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.

REFERENCES

1. Moisil, G. G. Fonctions holomorphes dans l'espase / G. G. Moisil, N. Theodorescu // Mathematica. – 1931. – Vol. 5. – P. 141–153.
2. Biczadze, A. V. Krajevyje zadachi dla elliptichieskikh uravnenij vtorgo poriadka / A. V. Biczadze. – M. : Nauka, 1966. – 202 s.
3. Shevchienko, V. I. Gomotopichieskaja klassifikacija zadach Rimana – Gil'berta dla golomorfного вектора / V. I. Shevchienko // Mat. fizika : riesp. miezhvied. sb. – Kijev, 1975. – Vyp. 17. – S. 184–186.
4. Uss, A. T. Gomotopichieskaja klassifikacija triokhmiernykh analogov sistiemy Koshi – Rimana / A. T. Uss // Dokl. NAN Bielarusi. – 2002. – Т. 46, № 5. – S. 30–34.
5. Uss, A. T. Krajevaja zadacha Rimana – Gil'berta dla triokhmiernykh analogov sistiemy Koshi – Rimana / A. T. Uss // Dokl. Nac. akad. nauk Bielarusi. – 2003. – Т. 47, № 6. – S. 10–15.
6. Basik, A. I. Gomotopichieskaja klassifikacija krajevyykh zadach Rimana – Gil'berta dla niekatorykh klassov elliptichieskikh sistiem diffierencial'nykh uravnenij v $\mathbf{R}^3$ / A. I. Basik, A. T. Uss // Tr. In-ta matematiki NAN Bielarusi. – 2004. – Т. 12, № 2. – S. 33–37.
7. Giel'fand, I. M. Tieorija sistiem diffierencial'nykh uravnenij s chastnymi proizvodnymi / I. M. Giel'fand, I. G. Pietrovskij, G. Ye. Shilov // Tr. Triet'jego Vsiesojuz. mat.

s'jezda, Moskva, ijun'-ijul' 1956 : v 4 t. / AN SSSR. – M., 1958. – T. 3 : Obzornyje doklady ; riedkol. A. A. Abramov [i dr.]. – S. 65–72.

8. Alieksandrov, P. S. Liekcii po analitichieskoj gieometrii, popolniennyje nieobkholdimymi sviedenijami iz algiebry / P. S. Alieksandrov ; sost. A. S. Parkhomienko. – M. : Nauka, 1968. – 911 s.

9. Agranovich, M. S. Elliptichieskije singuliarnyje integro-diffierencial'nyje opieratory / M. S. Agranovich // Uspiekh mat. nauk. – 1965. – T. 20, vyp. 5. – S. 3–120.

10. Lopatinskij, Ya. B. Ob odnom sposobie priviedienija granichnykh zadach dla sistemy diffierencial'nykh uravnenij elliptichieskogo tipa k rieguliarnym integral'nyim uravnenijam / Ya. B. Lopatinskij // Ukr. mat. zhurn. – 1953. – T. 5. – S. 123–151.

11. Basik, A. I. Gomotopichieskaja klassifikacija rieguliarizujemykh krajevykh zadach Rimana – Gil'berta dla odnogo klassa elliptichieskikh sistem v $\mathbf{R}^3$ / A. I. Basik, Ye. V. Gricuk // Matematika. Informacijni tekhnologiji : zb. st. – Luc'k, 2019. – № 6. – S. 12–18.

12. Basik, A. I. Zadacha Rimana – Gil'berta dla elliptichieskikh sistem ortogonal'nogo tipa v $\mathbf{R}^3$ / A. I. Basik, Ye. V. Gricuk, T. A. Gricuk // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2020. – T. 56, № 1. – S. 7–16. – Doi: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16>

13. Giel'fand, I. M. Ob elliptichieskikh uravnenijakh / I. M. Giel'fand // Uspiekh mat. nauk. – 1960. – T. 15, vyp. 3. – S. 121–132.

14. Shevchienko, V. I. O niekotorykh krajevykh zadachakh dla golomorfnoho vektora / V. I. Shevchienko // Mat. fizika : riesp. miezhvied. sb. – Kijev, 1970. – Vyp. 8. – S. 172–186.

15. Vinogradov, V. S. Granichnaja zadacha dla psievdosimmetrichieskikh sistem / V. S. Vinogradov // Diffierenc. uravnenija. – 1985. – T. 21, № 1. – S. 161–163.

16. Basik, A. I. O krajevykh zadachakh dla elliptichieskikh psievdosimmetrichieskikh sistem piervogo poriadka v $\mathbf{R}^4$ / A. I. Basik, A. T. Uss // Diffierenc. uravnenija. – 2003. – T. 38, № 3. – S. 410–412.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 11.11.2024