

УДК 539.12:530.145

**Анастасія Михайловна Кузьмич<sup>1</sup>, Владимир Анестиевич Плетюхов<sup>2</sup>**<sup>1</sup>магістрант фіз.-мат. факультэта

Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. С. Пушкіна

<sup>2</sup>д-р фіз.-мат. наук, проф., проф. каф. агульнай і тэарэтычнай фізікі

Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. С. Пушкіна

**Anastasia Kuzmich<sup>1</sup>, Vladimir Pletyukhov<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Master's Student of the Faculty of Physics and Mathematics

of the Brest State A. S. Pushkin University

<sup>2</sup>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,

Professor of the Department of General and Theoretical Physics

of the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [pletyukhov@yandex.by](mailto:pletyukhov@yandex.by)

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СИММЕТРИЙ ДВУМЕРНЫХ СТРУКТУР

Изучены свойства внутренней симметрии системы двух уравнений Дирака и уравнения Дирака – Кэлера в пространстве размерности  $2 + 1$ . При этом использовался метод, основанный на приведении исследуемых уравнений к вещественной форме. Показано, что группы внутренней симметрии лагранжиана обеих теорий совпадают. Этот результат дает основание полагать, что уравнение Дирака – Кэлера может служить в качестве модели геометризованного (тензорного) описания дираковских частиц в двумерных кристаллических структурах, например, в графене. Кроме того, показано, что установленная симметрия существенно шире тех, что обычно обсуждаются в литературе применительно к указанным уравнениям.

**Ключевые слова:** внутренняя симметрия, уравнение Дирака, уравнение Дирака – Кэлера, графен.

## Application of Methods of the Theory of Relativistic Wave Equations to Describe the Symmetries of Two-Dimensional Structures

The article presents the findings of investigation into the properties of the internal symmetry between a two Dirac equations system and Dirac – Kähler equation in a  $2 + 1$  dimensional space. The research method employed herein involved reducing the above equations to the real form. The investigation performed proves that the Lagrangian internal symmetry groups coincide for both theories. The result obtained strongly suggests that Dirac – Kähler equation may serve as a model for a geometrized (tensor) description of Dirac particles in two-dimensional crystal structures, e.g. in graphene. Besides, the article demonstrates that the established symmetry is much broader than those traditionally discussed in the above equations studies.

**Key words:** internal symmetry, Dirac equations, Dirac – Kähler equation, graphene.

### Введение

Полевое описание элементарных частиц посредством релятивистских волновых уравнений (РВУ) первого порядка базируется на теории представлений группы Лоренца – группы унимодулярных ортогональных преобразований  $SO(3,1)$  в псевдоевклидовом пространстве размерности  $3 + 1$ .

При этом одно из основных требований, вытекающих из постулатов специальной теории относительности, заключается в том, что волновая функция указанных РВУ должна преобразовываться по некоторому приводимому представлению группы Лоренца, которое состоит из зацепляющихся неприводимых представлений этой группы (под зацепляющимися мы понимаем неприводимые представления, связанные между собой операцией дифференцирования; графическое изображение такого приводимого представления, где зацепляющиеся неприводимые компоненты соединены чертой, называется «схемой зацеплений» [1]).

В то же время в ряде публикаций, посвященных изучению плоских кристаллических структур типа графена, показано, что электронам и дыркам в зоне проводимости

в таких структурах можно сопоставить квазичастицы со спином  $\frac{1}{2}$  и нулевой эффективной массой [2; 3]. Другими словами, имеется принципиальная возможность теоретического описания свойств графена хорошо разработанными методами теории РВУ.

Для этого необходимо адаптировать теорию РВУ к псевдоевклидовому пространству размерности  $2 + 1$ . Кроме того, известно, что в пространстве размерности  $3 + 1$  частицы со спином  $\frac{1}{2}$  и дополнительными степенями свободы можно описывать посредством полного набора антисимметричных тензорных полей, подчиняющихся уравнению Дирака – Кэлера [1].

С учетом данного обстоятельства представляет интерес исследование уравнения Дирака – Кэлера на предмет его возможности служить в качестве модели геометризованного описания квазичастиц в графене посредством тензорных полей. С этой целью следует провести сравнительный анализ внутренней симметрии системы двух уравнений Дирака и уравнения Дирака – Кэлера в пространстве размерности  $2 + 1$ .

Настоящая работа посвящена решению указанных задач.

### Редукция теории РВУ на пространство размерности $2 + 1$

В пространстве  $2 + 1$  неприводимые представления группы  $SO(2,1)$  задаются одним целым либо полуцелым числом – весом  $n$  – и тремя параметрами: одним вещественным и двумя мнимыми. При этом размерность пространства представления с весом  $n$  равна  $2n + 1$ . Весу 1 соответствует фундаментальное (векторное) представление группы  $SO(2,1)$ , которая в физической литературе называется частной группой Лоренца. Весу 0 соответствует скалярное,  $1/2$  – спинорное,  $3/2$  – спин-векторное представление; весом 2 характеризуется симметричный тензор второго ранга  $\psi_{(ij)}$  со следом, равным нулю (индексы  $i, j$  пробегает значения 0, 1, 2, индекс  $i = 0$  обозначает временную координату).

Антисимметричный тензор второго ранга  $\psi_{[ij]}$  имеет три независимые компоненты и при преобразованиях группы  $SO(2,1)$  ведет себя как вектор  $\psi_i$ . Одинаково ведут себя величины  $\psi_i, \psi_{[ij]}$  и при операции пространственного отражения, но при операции отражения времени  $T$  они ведут себя по-разному: у вектора  $\psi_i$  меняет знак одна компонента  $\psi_0$ , у тензора  $\psi_{[ij]}$  – две компоненты  $\psi_{[01]}, \psi_{[02]}$ .

Поэтому с точки зрения различения указанных ковариантов по отношению к группе  $SO(2,1) \otimes T$  целесообразнее ввести две тройки величин  $\{\psi_0 + \psi_{[12]}, \psi_1 + \psi_{[02]}, \psi_2 + \psi_{[01]}\}$  и  $\{\psi_0 - \psi_{[12]}, \psi_1 - \psi_{[02]}, \psi_2 + \psi_{[01]}\}$ , которые по отношению к преобразованиям частной группы Лоренца  $SO(2,1)$  ведут себя как вектор, а при отражении времени переходят друг в друга. Будем их обозначать  $1$  и  $\hat{1}$  соответственно.

Аналогичным образом из скаляра  $\psi$  и полностью антисимметричного тензора третьего ранга  $\psi_{[ijk]}$  можно построить величины  $\psi + \psi_{[ijk]}$  и  $\psi - \psi_{[ijk]}$ , которые являются времени-сопряженными по отношению друг к другу скалярами с весами 0 и  $\hat{0}$ . В общем случае каждому неприводимому представлению частной группы Лоренца с весом  $n$  можно сопоставить сопряженное в вышеуказанном смысле представление  $\hat{n}$ .

В отношении зацепляющихся неприводимых представлений частной группы Лоренца имеет место следующая картина.

Во-первых, зацепляться могут только однотипные представления – тензорные с тензорными ( $n$  – целое), спинорные со спинорными ( $n$  – полуцелое).

Во-вторых, с представлениями веса  $n$  ( $\hat{n}$ ) зацепляются представления с весами  $n - 1, n + 1, \hat{n} (\hat{n} - \hat{1}, \hat{n} + \hat{1}, n)$ . Исключение из этого правила составляет скалярное представление 0 ( $\hat{0}$ ), которое зацепляется только с векторным представлением 1 ( $\hat{1}$ ).

Таким образом, всевозможные неприводимые представления группы  $SO(2,1) \otimes T$  распадаются на два класса, которые можно изобразить в виде схем зацеплений

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & - & 1 & - & 2 & - & 3 & - & \dots \\ & & | & & | & & | & & \\ 0 & - & 1 & - & 2 & - & 3 & - & \dots \end{array} \quad (1.1)$$

или

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{2} & - & \frac{3}{2} & - & \frac{5}{2} & - & \dots \\ & & | & & | & & | & & \\ \frac{1}{2} & - & \frac{3}{2} & - & \frac{5}{2} & - & \dots \end{array}, \quad (1.2)$$

причем в (1.1) и (1.2) каждое неприводимое представление может быть кратным (повторяющимся).

При построении релятивистского квантово-механического уравнения для частицы со спином  $S$  в пространстве  $2 + 1$  соответствующая волновая функция должна преобразовываться по приводимому представлению, включающему не менее двух зацепляющихся неприводимых компонент, содержащих спин  $S$  ( $0 \leq S \leq n$  либо  $\frac{1}{2} \leq S \leq n$ ).

Так, на основе схемы

$$0 - 1 \quad (1.3)$$

можно построить РВУ для частицы со спином  $S = 0$ . Его тензорная формулировка имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_i \psi_i + m\psi &= 0, \\ \partial_i \psi + m\psi_i &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если записать систему (1.4) в виде матрично-дифференциального уравнения

$$(\gamma_i \partial_i + m)\Psi = 0, \quad (1.5)$$

то в базисе  $\Psi = (\psi, \psi_0, \psi_1, \psi_2)$  для матриц  $\gamma_i$  получим выражения

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Схема зацеплений

$$1 - \dot{1} \quad (1.7)$$

позволяет построить систему

$$\begin{aligned} \partial_j \psi_{[ij]} + m\psi_i &= 0, \\ -\partial_i \psi_j + \partial_j \psi_i + m\psi_{[ij]} &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

которая является редуцированным аналогом уравнения Даффина – Кеммера для частицы со спином  $S = 1$ . В базисе

$$\Psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_{[01]}, \psi_{[02]}, \psi_{[12]}) \quad (1.9)$$

эта система соответствует РВУ стандартного вида (1.5) с матрицами  $\gamma_i$  размерности  $6 \times 6$ , удовлетворяющими, как и матрицы (1.6), алгебре матриц Даффина – Кеммера

$$\gamma_i \gamma_j \gamma_k + \gamma_k \gamma_j \gamma_i = \delta_{ij} \gamma_k + \delta_{jk} \gamma_i. \quad (1.10)$$

Опираясь на схему зацеплений

$$\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \quad (1.11)$$

можно построить РВУ для частицы со спином  $S = 1/2$ , инвариантное относительно преобразований группы  $SO(2,1) \otimes T$ . Матрицы  $\gamma_i$  этого РВУ имеют блочную структуру

$$\gamma_0 = I_2 \otimes \sigma_3, \quad \gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad (1.12)$$

где  $\sigma_i$  – матрицы Паули размерности  $2 \times 2$ , удовлетворяющие алгебре Клиффорда.

Аналогичным образом редуцируются на пространство  $2 + 1$  и другие РВУ, в т. ч. те, которые будут рассмотрены ниже.

### Внутренняя симметрия системы двух уравнений Дирака в псевдоевклидовом пространстве $2 + 1$

Исследуем внутреннюю симметрию системы двух безмассовых уравнений Дирака в пространстве  $2 + 1$ , которую многие авторы используют для описания решеточной структуры графена. Для этого используем метод, развитый в работах [4; 5] и основанный на предварительном приведении исследуемых диракоподобных РВУ к вещественной форме. В работе [6] данный метод был апробирован на уравнении Дирака в пространстве  $2 + 1$  и получены результаты, которые отличаются от тех, что приводятся в [4; 5]. Группа внутренней симметрии, установленная в нашем подходе, оказывается более широкой по сравнению с той, что получена в [4; 5], и коррелирует с известными результатами исследования свойств внутренней симметрии уравнения Дирака в пространстве обычной размерности  $3 + 1$ .

Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \gamma_k \partial_k \psi_1 = 0, \\ \gamma_k \partial_k \psi_2 = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

в которой  $\psi_1$  и  $\psi_2$  – биспиноры первого ранга,  $\gamma_k$  – матрицы  $4 \times 4$ , удовлетворяющие алгебре матриц Дирака, индекс  $k$  пробегает значения 0, 1, 2.

Будем использовать метрику, соответствующую выбору  $x_0 = ict$ . Для матриц  $\gamma_k$  используем представление, в котором

$$\gamma_0 = \sigma_3 \otimes I_2, \quad \gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad (2.2)$$

Возьмем от (2.1) комплексное сопряжение и с учетом мнимого характера временной координаты  $x_0$  получим для комплексно-сопряженных функций  $\psi_1^*, \psi_2^*$  уравнения

$$\begin{cases} (-\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2) \psi_1^* = 0, \\ (-\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2) \psi_2^* = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

Рассматривая (2.1) и (2.3) совместно, придем к 16-компонентной системе уравнений, которую можно представить в универсальной матричной форме

$$\Gamma_k \partial_k \Psi = 0. \quad (2.4)$$

При выборе волновой функции  $\Psi$  в виде

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_1^*, \psi_2^*) \quad (2.5)$$

для матриц  $\Gamma_k$  в (2.4) получим выражения

$$\Gamma_0 = \gamma_0 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \gamma_0 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2. \quad (2.6)$$

Далее перейдем в базис, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены:

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) - \text{столбец}, \quad (2.7)$$

$$\psi_{1,2}^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2} + \psi_{1,2}^*), \quad \psi_{1,2}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2} - \psi_{1,2}^*).$$

Указанный переход от представления (2.5) осуществляется с помощью унитарного преобразования базиса в пространстве состояний

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_8 & -I_8 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = U^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_8 & -I_8 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Матрицы  $\Gamma_k$  в базисе (2.7) имеют вид

$$\Gamma_0 = \gamma_5 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \gamma_5 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2. \quad (2.9)$$

Лагранжиан уравнения (2.4) с матрицами  $\Gamma_k$  (2.9)

$$L = -\bar{\Psi} \Gamma_k \partial_k \Psi = -\Psi^+ \eta \Gamma_k \partial_k \Psi \quad (2.10)$$

эквивалентен лагранжиану исходной системы (2.1)

$$L = L_1 + L_2 = -\bar{\psi}_1 \gamma_k \partial_k \psi_1 - \bar{\psi}_2 \gamma_k \partial_k \psi_2 = -\psi_1^+ \gamma_0 \gamma_k \partial_k \psi_1 - \psi_2^+ \gamma_0 \gamma_k \partial_k \psi_2 \quad (2.11)$$

при выборе матрицы билинейной инвариантной формы способом

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_0. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.4) с волновой функцией (2.7), матрицами  $\Gamma_k$  (2.9) и лагранжианом (2.10), (2.12) будем называть вещественной формой исходной системы (2.1). Эту форму мы будем использовать при установлении самой полной группы симметрии лагранжевой формулировки системы (2.1).

Наряду с базисом (2.7), (2.9) для решения поставленной задачи будем использовать также фермионный базис, в котором диракоподобные матрицы  $\Gamma_k$  имеют структуру

$$\Gamma_k = I_4 \otimes \gamma_k. \quad (2.13)$$

Переход из базиса (2.7) в фермионный базис осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$A = \frac{1}{2} [I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \quad (2.14)$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2} [I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)].$$

Матрица билинейной формы  $\eta$  при этом принимает вид

$$\eta = \gamma_4 \otimes \gamma_0, \quad \gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2. \quad (2.15)$$

Инвариантность уравнения (2.1) с матрицами  $\Gamma_k$  (2.13) относительно преобразований внутренней симметрии

$$\Psi'(x_k) = Q\Psi(x_k) \quad (2.16)$$

обеспечивается матрицами четырех типов

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \quad Q_2 = q^{(2)} \otimes i\gamma_3\gamma_5, \quad Q_3 = q^{(3)} \otimes \gamma_3, \quad Q_4 = q^{(4)} \otimes \gamma_5, \quad (2.17)$$

где

$$\gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_3, \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad (2.18)$$

$q^\alpha$  ( $\alpha = 1 \div 4$ ) – произвольные комплексные матрицы  $4 \times 4$ , на которые накладываются лишь ограничения, обусловленные вещественным характером рассматриваемого РВУ.

Дальнейшие расчеты удобнее всего проводить в представлении

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) - \text{столбец}, \quad (2.19)$$

где  $\bar{\psi}_1 = \psi_1^\dagger \gamma_0, \bar{\psi}_2 = \psi_2^\dagger \gamma_0$ . Переход от представления (2.7) в представление (2.19) осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_2 \otimes \gamma_0 & -I_2 \otimes \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_8 & I_2 \otimes \gamma_0 \\ I_8 & -I_2 \otimes \gamma_0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

В представлении (2.21) матрицы  $Q_\alpha$  (2.17), (2.18) принимают вид

$$\begin{aligned} Q_1 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 I_4 & \alpha_2 I_4 & b_1 \gamma_0 \gamma_2 & b_2 \gamma_0 \gamma_2 \\ \alpha_3 I_4 & \alpha_4 I_4 & b_3 \gamma_0 \gamma_2 & b_4 \gamma_0 \gamma_2 \\ -b_1^* \gamma_0 \gamma_2 & -b_2^* \gamma_0 \gamma_2 & \alpha_1^* I_4 & \alpha_2^* I_4 \\ -b_3^* \gamma_0 \gamma_2 & -b_4^* \gamma_0 \gamma_2 & \alpha_3^* I_4 & \alpha_4^* I_4 \end{pmatrix}, \\ Q_2 &= \begin{pmatrix} \alpha_5 \gamma_3 \gamma_5 & \alpha_6 \gamma_3 \gamma_5 & b_5 \gamma_1 & b_6 \gamma_1 \\ \alpha_7 \gamma_3 \gamma_5 & \alpha_8 \gamma_3 \gamma_5 & b_7 \gamma_1 & b_8 \gamma_1 \\ b_5^* \gamma_1 & b_6^* \gamma_1 & -\alpha_5^* \gamma_3 \gamma_5 & -\alpha_6^* \gamma_3 \gamma_5 \\ b_7^* \gamma_1 & b_8^* \gamma_1 & -\alpha_7^* \gamma_3 \gamma_5 & -\alpha_8^* \gamma_3 \gamma_5 \end{pmatrix}, \\ Q_3 &= \begin{pmatrix} \alpha_9 \gamma_3 & \alpha_{10} \gamma_3 & b_9 \gamma_1 \gamma_5 & b_{10} \gamma_1 \gamma_5 \\ \alpha_{11} \gamma_3 & \alpha_{12} \gamma_3 & b_{11} \gamma_1 \gamma_5 & b_{12} \gamma_1 \gamma_5 \\ -b_9^* \gamma_1 \gamma_5 & -b_{10}^* \gamma_1 \gamma_5 & \alpha_9^* \gamma_3 & \alpha_{10}^* \gamma_3 \\ -b_{11}^* \gamma_1 \gamma_5 & -b_{12}^* \gamma_1 \gamma_5 & \alpha_{11}^* \gamma_3 & \alpha_{12}^* \gamma_3 \end{pmatrix}, \\ Q_4 &= \begin{pmatrix} \alpha_{13} \gamma_5 & \alpha_{14} \gamma_5 & b_{13} \gamma_1 \gamma_3 & b_{14} \gamma_1 \gamma_3 \\ \alpha_{15} \gamma_5 & \alpha_{16} \gamma_5 & b_{15} \gamma_1 \gamma_3 & b_{16} \gamma_1 \gamma_3 \\ b_{13}^* \gamma_1 \gamma_3 & b_{14}^* \gamma_1 \gamma_3 & -\alpha_{13}^* \gamma_5 & -\alpha_{14}^* \gamma_5 \\ b_{15}^* \gamma_1 \gamma_3 & b_{16}^* \gamma_1 \gamma_3 & -\alpha_{15}^* \gamma_5 & -\alpha_{16}^* \gamma_5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\alpha_i, b_i$  ( $i = 1 \div 16$ ) – произвольные комплексные параметры преобразования внутренней симметрии.

Найдем теперь, какие ограничения на параметры  $\alpha_i, b_i$  накладывает условие

$$Q\eta Q^\dagger = \eta \quad (2.22)$$

инвариантности лагранжиана (2.10). Учитывая, что матрицы  $Q_1, Q_2$  коммутируют, а  $Q_3, Q_4$  антикоммутируют с матрицами уравнения  $\Gamma_k$ , условие (2.22) можно переписать в виде двух независимых условий:

$$Q_1^\dagger \eta Q_1 + Q_2^\dagger \eta Q_2 - Q_3^\dagger \eta Q_3 - Q_4^\dagger \eta Q_4 + Q_1^\dagger \eta Q_2 + Q_2^\dagger \eta Q_1 - Q_3^\dagger \eta Q_4 - Q_4^\dagger \eta Q_3 = \eta, \quad (2.23)$$

$$-Q_1^\dagger \eta Q_3 - Q_1^\dagger \eta Q_4 - Q_2^\dagger \eta Q_3 - Q_2^\dagger \eta Q_4 + Q_3^\dagger \eta Q_1 + Q_3^\dagger \eta Q_2 + Q_4^\dagger \eta Q_1 + Q_4^\dagger \eta Q_2 = 0. \quad (2.24)$$

Соотношения (2.23), (2.24) накладывают на 64 параметра  $\alpha_i, b_i$  28 условий, подробный вид которых мы не выписываем ввиду их громоздкости (они приведены в работе [7]). В результате получается 36-параметрическая группа внутренней симметрии лагранжевой формулировки теории с 20-ю вещественными и 16-ю мнимыми параметрами. Детальное исследование математической структуры этой группы [7] показывает, что она изоморфна группе  $SO(5,4)$ , т. е. значительно шире, чем те группы внутренней симметрии, которые рассматриваются в работах других авторов [2; 3; 8; 9].

Группу внутренней симметрии лагранжиана системы двух уравнений Дирака с ненулевой массой в пространстве  $2 + 1$  можно получить группы  $SO(5,4)$  путем исключения из рассмотрения преобразований  $Q_3$  и  $Q_4$ , которые антикоммутируют с матри-

цами  $\Gamma_k$ . В результате приходим к 20-параметрической группе с 12-ю вещественными и 8-ю мнимыми параметрами, которая представляет собой расширение группы  $SO(3,2)$ .

### Внутренняя симметрия дирак-кэлеровского поля в пространстве размерности 2+1

Уравнение Дирака – Кэлера (ДК), охватывающее полный набор антисимметричных тензорных полей в пространстве  $3 + 1$ , обычно трактуется либо в качестве геометрического (тензорного) аналога уравнения Дирака, приводящего для ряда квантовомеханических задач к совпадающим результатам, либо как альтернативный уравнению Дирака способ описания не только спинных, но и других внутренних степеней свободы дираковских частиц с единых позиций.

С учетом данного обстоятельства представляет интерес исследование уравнения ДК в пространстве  $2 + 1$  на предмет возможности этого уравнения служить в качестве модели геометризованного описания квазичастиц в графене посредством тензорных полей. Для этого необходимо в первую очередь провести анализ внутренней симметрии уравнения ДК.

Тензорная форма уравнения ДК в пространстве  $2 + 1$  может быть получена из тензорной формы этого уравнения в пространстве  $3 + 1$  путем исключения из последнего всех величин, содержащих измерение  $x_3$ .

В результате получим 8-компонентную систему

$$\begin{aligned} \partial_k \psi_k + m\psi &= 0, \\ \partial_i \psi_{[ki]} + \partial_k \psi + m\psi_k &= 0, \\ -\partial_k \psi_i + \partial_i \psi_k + \partial_j \psi_{[kij]} + m\psi_{[ki]} &= 0, \\ \partial_k \psi_{[ij]} + \partial_j \psi_{[ki]} + \partial_i \psi_{[jk]} + m\psi_{[kij]} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где латинские индексы  $k, i, j$  пробегают значения 1, 2, 3;  $\psi, \psi_k, \psi_{[ki]}, \psi_{[kij]}$  – соответственно скаляр, вектор, антисимметричные тензоры второго и третьего рангов в пространстве  $2 + 1$  (мы используем метрику  $g_{ki} = \text{diag}(1, 1, 1)$ , поэтому не различаем ковариантные и контравариантные индексы).

Систему (3.1) можно записать в универсальной матричной форме релятивистского волнового уравнения (РВУ) первого порядка:

$$\left( \Gamma_k^{(8)} \partial_k + m \right) \Psi^{(8)} = 0. \quad (3.2)$$

Вводя для тензорных компонент волновой функции

$$\Psi^{(8)} = (\psi, \psi_k, \psi_{[ki]}, \psi_{[kij]}) = (\psi, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_{[12]}, \psi_{[10]}, \psi_{[20]}, \psi_{[012]}) \quad (3.3)$$

собираемый индекс  $A = (\tilde{0}, k, [ki], [kij])$ , матрицы  $\Gamma_k^{(8)}$  в (3.2) можно выразить через элементы полной матричной алгебры  $e^{AB}$  [10, с. 181] следующим образом:

$$\Gamma_k = e^{\tilde{0}k} + e^{k\tilde{0}} - e^{i,[ki]} - e^{[ki],i} + \frac{1}{2}e^{[ij],[kij]} + \frac{1}{2}e^{[kij],[ij]}. \quad (3.4)$$

Матрица  $\eta$  билинейной вещественной лоренц-инвариантной формы  $\bar{\Psi}\Psi = \Psi^\dagger \eta \Psi$  в пространстве  $2 + 1$  находится тем же способом, что и система (3.1): из матрицы  $\eta$ , записанной в пространстве  $3 + 1$  [4], исключаются строки и столбцы, обусловленные третьим пространственным измерением. В результате в базисе (3.3) получим

$$\eta = \text{diag}(-1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1). \quad (3.5)$$

Нетрудно проверить, что матрицы  $\Gamma_k$  (3.4) и  $\eta$  (3.5) удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\Gamma_k^{(8)} \Gamma_i^{(8)} + \Gamma_i^{(8)} \Gamma_k^{(8)} = 2\delta_{ki} I_8, \quad (3.6)$$

$$\eta \Gamma_4^{(8)} = \Gamma_4^{(8)} \eta, \quad \eta \Gamma_1^{(8)} = -\Gamma_1^{(8)} \eta, \quad \eta \Gamma_2^{(8)} = -\Gamma_2^{(8)} \eta. \quad (3.7)$$

Из тензорного базиса (3.3) с помощью унитарного преобразования

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & -i & -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i & -i & i & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ i & i & 0 & 0 & 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ i & i & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

можно перейти в фермионный базис, в котором по определению матрицы  $\Gamma_k^{(8)}$  имеют вид

$$\Gamma_k^{(8)} = I_2 \otimes \gamma_k, \quad (3.9)$$

где матрицы  $\gamma_k$  определены согласно (2.6).

Для матрицы  $\eta$  в этом базисе получается выражение

$$\eta = \sigma_3 \otimes \gamma_0. \quad (3.10)$$

Очевидно, что систему из двух уравнений Дирака (2.1) также можно представить в виде 8-компонентного РВУ (3.2) с матрицами  $\Gamma_k^{(8)}$  (3.9). Если при этом лагранжиан указанной системы выбрать в виде разности лагранжианов каждого из уравнений, т. е. положить

$$L = L_1 - L_2, \quad (3.11)$$

то для матрицы  $\eta$  получим выражение, совпадающее с (3.10).

Исследуем внутреннюю симметрию уравнения ДК (3.2). При этом будем использовать метод, развитый в работах [5; 11], который предполагает переход к вещественной форме записи релятивистских волновых уравнений и позволяет установить наиболее полную группу симметрии лагранжиана.

Беря от уравнения (3.2) комплексное сопряжение и рассматривая сопряженное уравнение совместно с исходным, получим систему, которую можно представить в аналогичном (3.2) виде:

$$(\Gamma_k \partial_k + m) \Psi = 0. \quad (3.12)$$

Здесь  $\Psi = (\Psi^{(8)}, \Psi^{(8)*})$  – 16-компонентная функция-столбец и для матриц  $\Gamma_k$  имеют место выражения

$$\Gamma_0 = \gamma_0 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \gamma_0 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2. \quad (3.13)$$

Переходя к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены, т. е.

$$\Psi = (\Psi_r^{(8)}, \Psi_i^{(8)}), \quad \Psi_r^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi^{(8)} + \Psi^{(8)*}), \quad \Psi_i^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi^{(8)} - \Psi^{(8)*}), \quad (3.14)$$

вместо (3.12) получим для матриц  $\Gamma_k$  выражения, совпадающие с (2.9).

Лагранжиан уравнения (3.12)

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_k \partial_k + m)\Psi = -\Psi^+ \eta(\Gamma_k \partial_k + m)\Psi \quad (3.15)$$

эквивалентен лагранжиану исходного уравнения (3.2) при выборе матрицы билинейной формы  $\eta$  в представлении (3.14) в виде

$$\eta = I_2 \otimes \eta^{(8)} = I_2 \otimes \sigma_3 \otimes \gamma_0 = -i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_0. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.12) с волновой функцией (3.14), матрицами  $\Gamma_k$  (2.9) и лагранжианом будем называть вещественной формой исходного уравнения ДК в пространстве  $2 + 1$ , поскольку соответствующая этому уравнению тензорная система является вещественной. Данную форму мы и будем использовать при исследовании свойств внутренней симметрии уравнения ДК в указанном пространстве.

Преобразования внутренней симметрии  $Q$ , оставляющие инвариантным лагранжиан (3.15), должны коммутировать в матрицами  $\Gamma_k$  и удовлетворять условию (2.22), а также сохранять структуру (3.14) в том смысле, что если  $\Psi_N$  – вещественная (мнимая) компонента, то и  $\Psi'_N(x_k) = Q_{NM}\Psi_M(x_k)$  также должна быть вещественной (мнимой).

Наиболее общий вид преобразования  $Q$ , удовлетворяющего условию коммутации с матрицами  $\Gamma_k$ , проще всего определить в фермионном базисе, в котором матрицы  $\Gamma_k$  имеют структуру (2.13). Переход из базиса (3.14) в фермионный базис в данном случае можно осуществить посредством унитарного преобразования

$$A = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \quad (3.17)$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)].$$

Условию коммутации с  $\Gamma_k$  удовлетворяют матрицы  $Q$  двух типов, имеющие в фермионном базисе вид

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \quad Q_2 = q^{(2)} \otimes i\gamma_3\gamma_5. \quad (3.18)$$

Здесь  $q^{(1)}, q^{(2)}$  – произвольные комплексные матрицы  $4 \times 4$ .

Параметризуя матрицы  $q^{(1)}, q^{(2)}$  посредством базисных элементов  $e_N (N = 0 \div 15)$  в пространстве  $4 \times 4$

$$e^N: I_4, \gamma_k, \gamma_3, \gamma_5, i\gamma_k\gamma_5, i\gamma_3\gamma_5, i\gamma_{[k}\gamma_{i]}, i\gamma_{[k}\gamma_{3]}, \quad (3.19)$$

получим 32-параметрическое преобразование, задаваемое базисными операторами

$$J_N = e_N \otimes I_4, \quad L_N = e_N \otimes i\gamma_3\gamma_5. \quad (3.20)$$

Применяя к бесконечно малым преобразованиям

$$\delta Q_1 = 1 + \omega_N J_N, \quad \delta Q_2 = 1 + \theta_N L_N, \quad (3.21)$$

условие сохранения структуры (3.14) волновой функции, получим ограничения на параметры  $\omega_N, \theta_N$ :

$$\begin{aligned} &\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{15}, \\ &\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_4, \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{15} - \text{вещественные;} \quad (3.22) \\ &\omega_3, \omega_5, \omega_8, \omega_{10}, \omega_{13}, \omega_{14}, \theta_3, \theta_5, \theta_8, \theta_{10}, \theta_{13}, \theta_{14} - \text{мнимые.} \end{aligned}$$

Генератор  $L_0$  коммутирует со всеми остальными генераторами и соответствует преобразованию типа  $\gamma_5$ -преобразований для безмассового уравнения Дирака. Генераторы  $J_1, \dots, J_{15}$  с девятью вещественными и шестью мнимыми параметрами образуют

группу, изоморфную группе  $SO(3,3)$ . Генераторы  $L_1, \dots, L_{15}$  представляют собой расширение этой группы. В результате имеем 30-параметрическую непрерывную группу преобразований, которая характеризуется следующей структурой перестановочных соотношений для некоммутирующих пар генераторов:

$$[J_N, J_M] \sim J_K, [L_N, L_M] \sim J_K, [J_N, L_M] \sim L_K, (N, M, K = 1 \div 15). \quad (3.23)$$

Проверка условия (2.22), принимающего для бесконечно малых однопараметрических преобразований (3.21) вид

$$(\omega_N J_N)^+ \eta = -\omega_N \eta J_N, (\theta_N L_N)^+ \eta = -\theta_N \eta L_N, \quad (3.24)$$

показывает, что оно выполняется для преобразований с генераторами  $J_1, J_3, J_4, J_5, J_6, J_8, J_9, J_{12}, J_{13}, J_{15}, L_1, L_3, L_4, L_5, L_6, L_8, L_9, L_{12}, L_{13}, L_{15}$ .

Следовательно, внутренняя симметрия лагранжиана уравнения ДК в пространстве  $2 + 1$  описывается 20-параметрической непрерывной группой, генераторы которой удовлетворяют перестановочным соотношениям вида (3.23).

Эта группа представляет собой расширение 10-параметрической группы  $SO(3,2)$ , задаваемой генераторами  $J_1, J_3, J_4, J_5, J_6, J_8, J_9, J_{12}, J_{13}, J_{15}$  с шестью вещественными ( $\omega_1, \omega_4, \omega_6, \omega_9, \omega_{12}, \omega_{15}$ ) и четырьмя мнимыми ( $\omega_3, \omega_5, \omega_8, \omega_{13}$ ) параметрами.

В силу сказанного ранее точно такая же симметрия имеет место в пространстве  $2 + 1$  и для системы из двух уравнений Дирака с лагранжианом (3.11).

### Заклучение

Таким образом, как и в обычном четырехмерном многообразии Минковского, в пространстве  $2 + 1$  уравнение ДК может выступать в качестве альтернативы (либо геометрического аналога) уравнению Дирака. Новизна же ситуации заключается в том, что в пространстве  $2 + 1$  уравнению ДК соответствует система не из четырех, а из двух уравнений Дирака, что делает его привлекательным с точки зрения возможности описания решеточной структуры графена. Отметим, что установленная симметрия существенно шире  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии, обсуждаемой в работах [2; 3] применительно к системе из двух уравнений Дирака.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 326 с.
2. Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems / E. V. Gorbarev [et al.] // Phys. Rev. – 2002. – Vol. 66. – Art. 045108.
3. Gusynin, V. P. AC Conductivity of grapheme: from tight-binding model to  $(2 + 1)$  – dimensional quantum electrodynamics / P. V. Gusynin // Int. J. Mod. Phys. – 2007. – Vol. 21. – P. 4611–4658.
4. Стражев, В. И. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, Д. А. Ционенко. – Минск : БГУ. – 2007. – 196 с.
5. Плетюхов, В. А. Вещественное поле Дирака – Кэлера и дираковские частицы / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2009. – № 2. – С. 3–7.
6. Плетюхов, В. А. Внутренняя симметрия уравнения Дирака в пространстве  $2 + 1$  / В. А. Плетюхов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2011. – № 1. – С. 30–34.

7. Плетюхов, В. А. Внутренняя симметрия дираковских и дирак-кэлеровских полей в пространстве  $2 + 1$  / В. А. Плетюхов, П. П. Андрусевич // Вучон. зап. Брэсц. ун-та. – 2013. – Вып. 9, ч. 2. Прыродазн. навукі. – С. 23–44.
8. Bashir, A. Fermions in odd space-time dimensions: back to basics / A. Bashir, M. De J. A. Galicia // Few Body Syst. – 2005. – Vol. 37. – P. 71–78.
9. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films / S. K. Novoselov [et al.] // Science. – 2004. – Vol. 306. – P. 666–669.
10. Богущ, А. А. Введение в теорию классических полей / А. А. Богущ, Л. Г. Мороз. – Минск, 1968. – 368 с.
11. Плетюхов, В. А. Внутренняя симметрия восьмикомпонентного дираковского поля / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев, П. П. Андрусевич // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 89–94.

## REFERENCES

1. Plietukhov, V. A. Rielativistskije volnovyje uravnenija i vnutriennije stiepieni svobody / V. A. Plietukhov, V. M. Ried'kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Bielarus. navuka, 2015. – 326 s.
2. Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems / E. V. Gorbar [et al.] // Phys. Rev. – 2002. – Vol. 66. – Art. 045108.
3. Gusynin, V. P. AC Conductivity of grapheme: from tight-binding model to  $(2 + 1)$  – dimensional quantum electrodynamics / P. V. Gusynin // Int. J. Mod. Phys. – 2007. – Vol. 21. – P. 4611–4658.
4. Strazhev, V. I. Uravnenije Diraka – Keliera. Klassichieskoje polie / V. I. Strazhev, I. A. Satikov, D. A. Cionienko. – Minsk : BGU. – 2007. – 196 s.
5. Plietukhov, V. A. Vieshchiestviennoje polie Diraka – Keliera i dirakovskije chasticity / V. A. Plietukhov, V. I. Strazhev // Viestn. BGU. Sier. 1. – 2009. – № 2. – S. 3–7.
6. Plietukhov, V. A. Vnutrienniaja simmetrija uravnenija Diraka v prostranstvie  $2 + 1$  / V. A. Plietukhov // Viesn. Besc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2011. – № 1. – S. 30–34.
7. Plietukhov, V. A. Vnutrienniaja simmetrija dirakovskikh i dirak-kelierovskikh poliej v prostranstvie  $2 + 1$  / V. A. Plietukhov, P. P. Andrusievich // Vuchon. zap. Besc. un-ta. – 2013. – Vyp. 9, ch. 2. Pryrodazn. navuki. – S. 23–44.
8. Bashir, A. Fermions in odd space-time dimensions: back to basics / A. Bashir, M. De J. A. Galicia // Few Body Syst. – 2005. – Vol. 37. – P. 71–78.
9. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films / S. K. Novoselov [et al.] // Science. – 2004. – Vol. 306. – P. 666–669.
10. Bogush, A. A. Vviedienije v tieoriju klassichieskikh poliej / A. A. Bogush, L. G. Moroz. – Minsk. – 1968. – 368 s.
11. Plietukhov, V. A. Vnutrienniaja simmetrija vos'mikomponentnogo dirakovskogo polia / V. A. Plietukhov, V. I. Strazhev, P. P. Andrusievich // Vies. NAN Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2010. – № 4. – S. 89–94.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 03.10.2022