УДК 539.12

Антон Васильевич Бурый[1], Алина Валентиновна Ивашкевич[2],
Елена Михайловна Овсиюк[3]
[1, 2] аспирант 2-го года обучения Института физики имени Б. И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси
[3]канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. теоретической физики и прикладной информатики
Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина
Anton Bury[1], Alina Ivashkevich[2], Elena Ovsiyuk[3]
[1, 2]2-rd Year Post-Graduate Student of the B. I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus
[3]Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor,
Head of the Department of Theoretical Physics and Applied Informatics
Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin
e-mail: [1]anton.buryy.97@mail.ru; [2]ivashkevich.alina@yandex.by; [3]e.ovsiyuk@mail.ru

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ БЕЗМАССОВОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1 И КАЛИБРОВОЧНАЯ СИММЕТРИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЯ СО СПИНОМ 2, СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Паули и Фирцем было установлено существование калибровочной симметрии для безмассовой частицы со спином, которая обобщает калибровочную симметрию в электродинамике Максвелла. Калибровочные состояния поля со спином 2 определяются произвольным векторным полем, такие решения не дают вклада в наблюдаемые величины типа тензора энергии-импульса поля. Это приводит к необходимости среди всех решений для поля со спином 2 выделять калибровочные, оставляя только физически наблюдаемые некалибровочные. В сферически симметричном случае, чтобы описать калибровочные состояния для поля со спином 2, необходимо иметь в явном виде решения со сферической симметрией для безмассового поля со спином 1. Построение четырех независимых решений уравнения для частицы со спином 1 является основной целью данной работы.

Ключевые слова: *спин 1, спин 2, теория Паули – Фирца, безмассовая частица, калибровочные степени свободы, сферическая симметрия, точные решения.*

Exact Solutions of the Wave Equation for Spin 1 Massless Particle, and Gauge Solutions for Spin 2 Massless Field, Spherically Symmetric Case

It is known that for massless spin 2 fiels according do Pauli – Fierz theory there exists the gauge symmetry wich extend the gauge symmetry in Maxwell electrodynamics. The gauge states for spin 2 field are determined by an arbitraary 4-vector field. These states do not contribute into observable physical quantities like energy-momentum tensor. This leads to the task of finding and eliminating the gauge solutions from the complete sets of solutions spin 2 field. Therefore, taking in mind the case of spherical symmetry, inj the present papper we will construct the complete set of spherical soluions for Duffin – Kemmer – Petiau massles equation. Thesolving of this rask is the goal of the pesent paper.

Key words: *spin 1, spin 2, Pauli – Fierz theory, massless particle, gauge degrees of freedom, spherical symmetry, exact solutions.*

Введение

Теория массивного и безмассового полей со спином 2, начиная с работ В. Паули и М. Фирца [1; 2], всегда присутствовала в литературе. Большая часть работ выполнена в рамках формализма уравнений второго порядка Паули – Фирца.

Первое систематическое исследование теории частицы со спином 2 в рамках теории релятивистских волновых уравнений первого порядка выполнено Ф. И. Федоровым [3].

Оказалось, что частица со спином 2 требует для своего описания 30-компонентной волновой функции. Позднее это описание было заново переоткрыто и дополнительно исследовано в работе Т. Редже [4].

В формализме уравнений первого порядка для описания поля используется набор из скаляра, 4-вектора, симметричного тензора второго ранга и тензора третьего ранга, антисимметричного по одной паре индексов. В его основе лежит лагранжев формализм, при этом все свойства симметрии тензоров вместе с условиями связи на них содержатся в исходном лагранжиане.

Описания массивной и безмассовой частиц существенно различаются. В частности, в безмассовом случае существует специфическая калибровочная симметрия, которая обобщает калибровочную симметрию в электродинамике Максвелла, она была установлена еще Паули и Фирцем [1; 2; 5–8].

Основные калибровочные скалярная и тензорная компоненты, входящие в описание безмассового поля со спином 2, определяются произвольным векторным полем $\Lambda_\alpha(x)$ следующими формулами [1; 2]:

$$\bar{\Phi} = \nabla^\alpha \Lambda_\alpha, \quad \bar{\Phi}_{(\alpha\beta)} = \nabla_\alpha \Lambda_\beta + \nabla_\beta \Lambda_\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(x) \nabla^\sigma \Lambda_\sigma;$$

приводим их сразу в общековариантной форме. Калибровочные степени свободы не должны давать вклада в физически наблюдаемые величины типа тензора энергии-импульса. Это приводит к необходимости выделять в безмассовом случае калибровочные решения, оставляя только некалибровочные.

Чтобы найти калибровочные решения для поля со спином 2 в сферически симметричном случае, необходимо иметь явный вид решений со сферической симметрией для безмассового поля со спином 1. Построение 4-х независимых решений уравнения для безмассовой частицы со спином 1 является целью данной работы.

1. Безмассовая векторная частица, сферические волны

Напомним подстановку для волновой функции в безмассовом уравнении Даффина – Кеммера в базисе сферической тетрады [9; 10]:

$$x^\alpha = (t, r, \theta, \phi), \quad dS^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2,$$

$$e^\alpha_{(0)} = (1,0,0,0), \quad e^\alpha_{(3)} = (0,1,0,0), \quad e^\alpha_{(1)} = (0,0,\frac{1}{r},0), \quad e^\alpha_{(2)} = (1,0,0,\frac{1}{r\sin\theta});$$

$$\bar{H} = e^{-i\epsilon t} h(r) D_0, \quad \bar{H}_1 = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} h_0(r)D_0 \\ h_1(r)D_{-1} \\ h_2(r)D_0 \\ h_3(r)D_{+1} \end{vmatrix}, \quad \bar{H}_2 = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} E_1(r)D_{-1} \\ E_2(r)D_0 \\ E_3(r)D_{+1} \\ B_1(r)D_{+1} \\ B_2(r)D_0 \\ B_3(r)D_{-1} \end{vmatrix}, \tag{1.1}$$

где $D_\sigma = D^j_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0)$ – функции Вигнера; $j = 1, 2, ...; m = -j, -j+1, .., j-1, j$.

После разделения переменных в [10; 11] была получена система 10-ти радиальных уравнений (штрих обозначает дифференцирование по координате r):

$$-E_2' - \frac{2}{r}E_2 - \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}}\left(E_1 + E_3\right) = 0, \quad i\epsilon E_1 - B_3' - \frac{1}{r}B_3 + \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}}B_2 = 0,$$

$$i\epsilon E_2 - \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}}\left(B_1 - B_3\right) = 0, \quad i\epsilon E_3 + B_1' + \frac{1}{r}B_1 - \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}}B_2 = 0,$$

$$-i\epsilon h_1 + \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_0 = -E_1, \quad -i\epsilon h_2 - h_0' = -E_2, \quad -i\epsilon h_3 + \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_0 = -E_3,$$

$$h_3' + \frac{1}{r}h_3 + \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_2 = -B_1, \quad -\frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_1 + \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_3 = -B_2, \quad -h_1' - \frac{1}{r}h_1 - \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_2 = -B_3; \qquad (1.2)$$

используется обозначение $a = \sqrt{j(j+1)}$.

Известно, что на решениях можно диагонализировать оператор пространственного отражения [10]; при этом возникают два типа состояний с соответствующими ограничениями на радиальные функции:

$$P = (-1)^{j+1}, \qquad h_0 = 0, h_2 = 0, h_3 = -h_1, E_3 = -E_1, E_2 = 0, B_3 = B_1;$$
$$P = (-1)^{j}, \qquad h_3 = h_1, \qquad B_3 = -B_1, \quad B_2 = 0, \quad E_3 = E_1. \qquad (1.3)$$

Отметим, что система уравнений (1.2) должна допускать решения калибровочного типа, когда $E_i = 0, B_i = 0$; для таких решений система (1.2) принимает вид

$$0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0,$$
$$-i\epsilon h_1 + \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_0 = 0, \quad -i\epsilon h_2 - h_0' = 0, \quad -i\epsilon h_3 + \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_0 = 0, \qquad (1.4)$$
$$h_3' + \frac{1}{r}h_3 + \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_2 = 0, \quad -\frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_1 + \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_3 \equiv 0, \quad -h_1' - \frac{1}{r}h_1 - \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_2 = 0.$$

Убеждаемся, что при четности $P = (-1)^{j+1}$ уравнения для чисто калибровочных решений имеют только тривиальное решение: $h_0 = 0,\ h_1 = 0,\ h_2 = 0,\ h_3 = 0$.

В случае противоположной четности $P = (-1)^{j}$ уравнения для калибровочных решений выглядят так:

$$P = (-1)^{j}, \quad -i\epsilon h_1 + \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_0 = 0, \quad -i\epsilon h_2 - h_0' = 0, \quad h_1' + \frac{1}{r}h_1 + \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}} h_2 = 0. \qquad (1.5)$$

С помощью первого и второго уравнений можно исключить переменные h_1 и h_2 , в результате приходим к тождеству

$$h_1 = -\frac{ia}{\sqrt{2}r\epsilon} h_0, \quad h_2 = \frac{i}{\epsilon} h_0', \quad -\frac{d}{dr}\frac{ia}{\sqrt{2}r\epsilon} h_0 - \frac{1}{r}\frac{ia}{\sqrt{2}r\epsilon} h_0 + \frac{1}{r}\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{i}{\epsilon}\frac{d}{dr} h_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \equiv 0.$$

Следовательно, функция $h_0(r)$ может быть любой $h_0(r) = \Phi(r)$; при этом сопутствующие переменные вычисляются по формулам

$$h_3 = +h_1(r) = -\frac{ia}{\sqrt{2}r\epsilon}\Phi(r), \quad h_2(r) = \frac{i}{\epsilon}\frac{d}{dr}\Phi(r). \qquad (1.6)$$

Произвольность функции $h_0(r)$ указывает на калибровочный характер таких решений.

Возвратимся к общей системе уравнений (1.2) и учтем в ней ограничения по четности. В случае $P = (-1)^{j+1}$ получаем

$$0=0, \quad \frac{aB_2}{\sqrt{2}r}-B_1'-\frac{B_1}{r}+iE_1\epsilon=0, \quad 0=0, \quad -\frac{aB_2}{\sqrt{2}r}+B_1'+\frac{B_1}{r}-iE_1\epsilon=0,$$

$$E_1=i\epsilon h_1, \quad 0=0, \quad -E_1=-i\epsilon h_1, \quad B_1=h_1'+\frac{h_1}{r}, \quad B_2=\frac{\sqrt{2}a}{r}h_1, \quad B_1=h_1'+\frac{h_1}{r}; \qquad (1.7)$$

т. е. имеем 4 уравнения

$$\frac{aB_2}{\sqrt{2}r}-B_1'-\frac{B_1}{r}+iE_1\epsilon=0, \quad E_1=i\epsilon h_1, \quad B_1=h_1'+\frac{h_1}{r}, \quad B_2=\frac{\sqrt{2}a}{r}h_1. \qquad (1.8)$$

Исключая три переменные, находим уравнение для основной функции

$$(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2-\frac{a^2}{r^2})h_1=0; \qquad (1.9)$$

это уравнение можно привести к бесселеву виду:

$$h_1(r)\sim\frac{1}{\sqrt{r}}F(r), \quad [\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2-\frac{(j+1/2)^2}{r^2}]F(r)=0, \; z=\epsilon r, \quad h_1(r)=\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+1/2}(z). \quad (1.10)$$

Будем обозначать это решение номером 1:

$$1) \qquad P=(-1)^{j+1}, \qquad h_0=0, \quad h_2=0, \quad h_3=-h_1=-\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+1/2}(z). \qquad (1.11)$$

В случае четности $P=(-1)^j$ получаем ситсему из 6-ти уравнений:

$$E_2'+\sqrt{2}\frac{a}{r}E_1+2\frac{1}{r}E_2=0, \quad B_1'+\frac{B_1}{r}+iE_1\epsilon=0, \quad -\frac{\sqrt{2}aB_1}{r}+iE_2\epsilon=0,$$

$$E_1=-\frac{ah_0}{\sqrt{2}r}+i\epsilon h_1, \quad E_2=h_0'+i\epsilon h_2, \quad B_1=-\frac{ah_2}{\sqrt{2}r}-h_1'-\frac{h_1}{r}. \qquad (1.12)$$

Исключая переменные E_1, E_2 и B_1, находим 3 уравнения

$$\begin{gathered}(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{a^2}{r^2})h_0+i\epsilon\frac{\sqrt{2}a}{r}h_1+i\epsilon(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})h_2=0,\\ i\epsilon\frac{\sqrt{2}a}{2r}h_0+(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2)h_1+\frac{\sqrt{2}a}{2r}\frac{d}{dr}h_2=0,\\ i\epsilon\frac{d}{dr}h_0+\frac{\sqrt{2}a}{r}(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})h_1+(\frac{a^2}{r^2}-\epsilon^2)h_2=0.\end{gathered} \qquad (1.13)$$

С помощью третьего уравнения можно исключить переменную h_2:

$$h_2=\frac{i\epsilon r^2}{\epsilon^2r^2-a^2}\frac{d}{dr}h_0+\frac{\sqrt{2}ar}{\epsilon^2r^2-a^2}(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})h_1. \qquad (1.14)$$

В результате первое и второе уравнения системы (1.13) приводят к одному и тому же уравнению, в которое входят переменные h_0, h_1:

$$\frac{d^2h_1}{dr^2}+\left[\frac{4}{r}-\frac{\epsilon}{\epsilon r+a}-\frac{\epsilon}{\epsilon r-a}\right]\frac{dh_1}{dr}+\left[\epsilon^2+\frac{2-a^2}{r^2}+\frac{\epsilon^2}{a(\epsilon r+a)}-\frac{\epsilon^2}{a(\epsilon r-a)}\right]h_1+$$

$$+\frac{ia}{\sqrt{2}\epsilon r}\frac{d^2h_0}{dr^2}+\left[\frac{ia\sqrt{2}}{\epsilon r^2}+\frac{i\epsilon}{\sqrt{2}(\epsilon r+a)}-\frac{i\epsilon}{\sqrt{2}(\epsilon r-a)}\right]\frac{dh_0}{dr}+\left[\frac{i\epsilon a}{\sqrt{2}r}-\frac{ia^3}{\sqrt{2}\epsilon r^3}\right]h_0=0; \quad (1.15)$$

его можно решать, накладывая два разных условия:

$$\underline{h_0=0,}\qquad \frac{d^2h_1}{dr^2}+\left[\frac{4}{r}-\frac{\epsilon}{\epsilon r+a}-\frac{\epsilon}{\epsilon r-a}\right]\frac{dh_1}{dr}+\left[\epsilon^2+\frac{2-a^2}{r^2}+\frac{\epsilon^2}{a(\epsilon r+a)}-\frac{\epsilon^2}{a(\epsilon r-a)}\right]h_1=0; \quad (1.16)$$

$$\underline{h_1=0,}\qquad \frac{ia}{\sqrt{2}\epsilon r}\frac{d^2h_0}{dr^2}+\left[\frac{ia\sqrt{2}}{\epsilon r^2}+\frac{i\epsilon}{\sqrt{2}(\epsilon r+a)}-\frac{i\epsilon}{\sqrt{2}(\epsilon r-a)}\right]\frac{dh_0}{dr}+\left[\frac{i\epsilon a}{\sqrt{2}r}-\frac{ia^3}{\sqrt{2}\epsilon r^3}\right]h_0=0. \quad (1.17)$$

Оба уравнения принадлежат классу общего уравнения Гойна, т. е. имеют 4 регулярные особые точки.

Вернемся к системе (1.13); будем искать такое преобразование над переменными, которое устраняет из уравнений мнимую единицу i и квадратные корни.

Существуют две возможности:

$$\text{I.}\quad h_0=\sqrt{2}\sqrt{j+1}H_0,\quad h_1=i\sqrt{j}H_1,\quad h_2=i\sqrt{2}\sqrt{j+1}H_2,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{j}{r^2}\right)H_0-\epsilon\frac{j}{r}H_1-\epsilon\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)H_2=0,$$

$$\epsilon\frac{j+1}{r}H_0+\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2\right)H_1+\frac{j+1}{r}\frac{d}{dr}H_2=0,$$

$$\epsilon\frac{d}{dr}H_0+\frac{j}{r}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1+\left(\frac{j(j+1)}{r^2}-\epsilon^2\right)H_2=0; \quad (1.18)$$

$$\text{II.}\quad h_0=i\sqrt{2}\sqrt{j}H_0,\quad h_1=\sqrt{j+1}H_1,\quad h_2=\sqrt{2}\sqrt{j}H_2,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{j(j+1)}{r^2}\right)H_0+\epsilon\frac{j+1}{r}H_1+\epsilon\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)H_2=0,$$

$$-\epsilon\frac{j}{r}H_0+\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2\right)H_1+\frac{j}{r}\frac{d}{dr}H_2=0,$$

$$-\epsilon\frac{d}{dr}H_0+\frac{j+1}{r}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1+\left(\frac{j(j+1)}{r^2}-\epsilon^2\right)H_2=0. \quad (1.19)$$

Рассмотрим случай I. Подставив выражения для H_2 в первое и второе уравнения из (1.18), приходим к двум одинаковым уравнениям следующего вида:

$$\frac{d^2H_1}{dr^2}+\left[\frac{4}{r}-\frac{2\epsilon^2 r}{\epsilon^2r^2-j(j+1)}\right]\frac{dH_1}{dr}+\left[\epsilon^2+\frac{2-j(j+1)}{r^2}-\frac{2\epsilon^2}{\epsilon^2r^2-j(j+1)}\right]H_1+$$

$$+\frac{j+1}{\epsilon r}\frac{d^2H_0}{dr^2}+\left[\frac{2(j+1)}{\epsilon r^2}-\frac{2\epsilon(j+1)}{\epsilon^2r^2-j(j+1)}\right]\frac{dH_0}{dr}+\left[\frac{\epsilon(j+1)}{r}-\frac{(j+1)^2 j}{r^3\epsilon}\right]H_0=0. \quad (1.20)$$

Это уравнение можно решать так. Пусть $H_0(r)=0$, тогда

$$\frac{d^2H_1}{dr^2}+\left[\frac{4}{r}-\frac{2\epsilon^2 r}{\epsilon^2r^2-j(j+1)}\right]\frac{dH_1}{dr}+\left[\epsilon^2+\frac{2-j(j+1)}{r^2}-\frac{2\epsilon^2}{\epsilon^2r^2-j(j+1)}\right]H_1=0; \quad (1.21)$$

Пусть $H_1(r)=0$, тогда

$$\frac{d^2H_0}{dr^2}+\left(\frac{2}{r}-\frac{2\epsilon^2 r}{\epsilon^2r^2-j(j+1)}\right)\frac{dH_0}{dr}+\left(\epsilon^2-\frac{j(j+1)}{r^2}\right)H_0=0. \quad (1.22)$$

Эти уравнения принадлежат классу общего уравнения Гойна.

Аналогично рассматриваем случай II. Подставим выражения для H_2 в первое и второе уравнения из (18), в результате приходим к двум одинаковым уравнениям:

$$\frac{d^2H_1}{dr^2}+\left[\frac{4}{r}-\frac{2\epsilon^2 r}{\epsilon^2r^2-j(j+1)}\right]\frac{dH_1}{dr}+\left[\epsilon^2+\frac{2-j(j+1)}{r^2}-\frac{2\epsilon^2}{\epsilon^2r^2-j(j+1)}\right]H_1-$$
$$-\frac{j}{\epsilon r}\frac{d^2H_0}{dr^2}+\left[-\frac{2j}{\epsilon r^2}+\frac{2\epsilon j}{\epsilon^2r^2-j(j+1)}\right]\frac{dH_0}{dr}+\left[-\frac{\epsilon j}{r}+\frac{j^2(j+1)}{r^3\epsilon}\right]H_0=0. \quad (1.23)$$

Это уравнение может быть решено так. Пусть $H_0(r)=0$, тогда

$$\frac{d^2H_1}{dr^2}+\left(\frac{4}{r}-\frac{2\epsilon^2 r}{\epsilon^2r^2-j(j+1)}\right)\frac{dH_1}{dr}+\left(\epsilon^2+\frac{2-j(j+1)}{r^2}-\frac{2\epsilon^2}{\epsilon^2r^2-j(j+1)}\right)H_1=0; \quad (1.24)$$

Пусть $H_1(r)=0$, тогда

$$\frac{d^2}{dr^2}H_0+\left(\frac{2}{r}-\frac{2\epsilon^2 r}{\epsilon^2r^2-j(j+1)}\right)\frac{d}{dr}H_0+\left(\epsilon^2-\frac{j(j+1)}{r^2}\right)H_0=0. \quad (1.25)$$

Эти уравнения также принадлежат классу общего уравнения Гойна.

Ниже излагается другой способ анализа, приводящий к возможности построить решения в функциях Бесселя. Для этого нужно будет накладывать условие Лоренца.

2. Условие Лоренца

Условие Лоренца должно быть пересчитано к тетрадному представлению

$$\nabla_\alpha\Psi^\alpha=0,\quad \nabla_\alpha e^\alpha_{(a)}\Psi^a=0,\quad (\nabla_\alpha e^\alpha_{(a)})\Psi^a+e^\alpha_{(a)}\partial_\alpha\Psi^a=0; \quad (2.1)$$

в (2.1) предполагается использование декартового базиса в представлеии компонент векторной полевой функции. С учетом известного равенства

$$\nabla_\alpha e^\alpha_{(a)}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\sqrt{-g}e^\alpha_{(a)}$$

находим

$$\nabla_\alpha e^\alpha_{(0)}=0,\quad \nabla_\alpha e^\alpha_{(1)}=\frac{\cos\theta}{r\sin\theta},\quad \nabla_\alpha e^\alpha_{(2)}=0,\quad \nabla_\alpha e^\alpha_{(a)}=\frac{2}{r}.$$

Следовательно, условие Лоренца примет вид

$$\partial_t\Phi_0-\frac{1}{r}(\partial_\theta+\frac{\cos\theta}{\sin\theta})\Psi_1-\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\Psi_2-(\partial_r+\frac{2}{r})\Phi_3=0. \quad (2.2)$$

При разделении переменных в уравнении Даффина – Кеммера использовался циклический базис. Нужное преобразование над 4-векторной составляющей $\bar{H}_1 = UH_1$ задается матрицей U:

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.3}$$

В соответствии с этим функции в (2.2) выражаются через циклические компоненты так:

$$\Psi_0 = \bar{\Psi}_0, \quad \Psi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3, \quad \Psi_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3, \quad \Psi_3 = \bar{\Psi}_2. \tag{2.4}$$

В результате условие Лоренца (2.2) примет вид

$$\partial_t\bar{\Psi}_0 - \frac{1}{r}(\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta})(-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3) - \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi(-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3) - (\partial_r + \frac{2}{r})\bar{\Psi}_2 = 0. \tag{2.5}$$

Подстановка для векторной части волновой функции в циклическом базисе такая:

$$\bar{H}_1 = e^{-i\epsilon t}\begin{vmatrix} h_0(r)D_0 \\ h_1(r)D_{-1} \\ h_2(r)D_0 \\ h_3(r)D_{+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\Psi}_0 \\ \bar{\Psi}_1 \\ \bar{\Psi}_2 \\ \bar{\Psi}_3 \end{vmatrix}, \tag{2.6}$$

для входящих сюда функций Вигнера выполняются рекуррентные соотношения [11]:

$$\begin{gathered} \partial_\phi D_\sigma = imD_\sigma, \quad \partial_\theta D_0 = +\frac{a}{2}D_{-1} - \frac{a}{2}D_{+1}, \quad \frac{-m}{\sin\theta}D_0 = -\frac{a}{2}D_{-1} - \frac{a}{2}D_{+1}, \\ \partial_\theta D_{+1} = +\frac{a}{2}D_0 - \frac{b}{2}D_{+2}, \quad \frac{-m-\cos\theta}{\sin\theta}D_{+1} = -\frac{a}{2}D_0 - \frac{b}{2}D_{+2}, \\ \partial_\theta D_{-1} = +\frac{b}{2}D_{-2} - \frac{a}{2}D_0, \quad \frac{-m+\cos\theta}{\sin\theta}D_{-1} = -\frac{b}{2}D_{-2} - \frac{a}{2}D_0, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где $a = \sqrt{j(j+1)}, b = \sqrt{(j-1)(j+2)}.$ С учетом этого из равенства (2.5) получаем

$$\begin{gathered} -i\epsilon h_0 D_0 + \frac{1}{\sqrt{2}r}(\partial_\theta D_{-1} + \frac{-m+\cos\theta}{\sin\theta}D_{-1})h_1 + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}r}(-\partial_\theta D_{+1} + \frac{-m-\cos\theta}{\sin\theta}D_{+1})h_3 - (\partial_r + \frac{2}{r})h_2 D_0 = 0. \end{gathered}$$

Учтем в последнем соотношении рекуррентные формулы из (2.7):

$$-i\epsilon h_0 D_0 + \frac{1}{\sqrt{2}r}((\frac{b}{2}D_{-2} - \frac{a}{2}D_0) + (-\frac{b}{2}D_{-2} - \frac{a}{2}D_0))h_1 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}r}(-(\frac{a}{2}D_0-\frac{b}{2}D_{+2})+(-\frac{a}{2}D_0-\frac{b}{2}D_{+2}))h_3-(\partial_r+\frac{2}{r})h_2D_0=0,$$

откуда после приведения подобных находим радиальное представление для условия Лоренца

$$-i\epsilon h_0-\frac{a}{\sqrt{2}r}h_1-\frac{a}{\sqrt{2}r}h_3-(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})h_2=0.$$

Ограничения по четности дают

$$P=(-1)^{j+1},\quad h_0=0,h_2=0,h_3=-h_1\quad\Rightarrow\quad 0\equiv 0; \tag{2.8}$$

$$P=(-1)^{j},\quad h_3=+h_1\quad\Rightarrow\quad -i\epsilon h_0-\frac{2a}{\sqrt{2}r}h_1-(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})h_2=0. \tag{2.9}$$

Решение, соотвествующее решению (2.8), было получено выше. Условие (2.9) позволяет из системы трех уравнений (1.13) исключить переменную h_0:

$$-i\epsilon h_0=\frac{2a}{\sqrt{2}r}h_1+(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})h_2.$$

Рассматриваем по отдельности подстановки I и II:

$$\begin{gathered}
\text{I.}\quad h_0=\sqrt{2}\sqrt{j+1}H_0,\quad h_1=i\sqrt{j}H_1,\quad h_2=i\sqrt{2}\sqrt{j+1}H_2,\\
(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{j(j+1)}{r^2})H_0-\epsilon\frac{j}{r}H_1-\epsilon(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})H_2=0,\\
\epsilon\frac{j+1}{r}H_0+(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2)H_1+\frac{j+1}{r}\frac{d}{dr}H_2=0,\\
\epsilon\frac{d}{dr}H_0+\frac{j}{r}(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})H_1+(\frac{j(j+1)}{r^2}-\epsilon^2)H_2=0,\\
\textit{условие Лоренца}\quad -\epsilon H_0=\frac{j}{r}H_1+(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})H_2;
\end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered}
\text{II.}\quad h_0=i\sqrt{2}\sqrt{j}H_0,\quad h_1=\sqrt{j+1}H_1,\quad h_2=\sqrt{2}\sqrt{j}H_2,\\
(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{a^2}{r^2})H_0+\epsilon\frac{j+1}{r}H_1+\epsilon(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})H_2=0,\\
-\epsilon\frac{j}{r}H_0+(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2)H_1+\frac{j}{r}\frac{d}{dr}H_2=0,\\
-\epsilon\frac{d}{dr}H_0+\frac{j+1}{r}(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})H_1+(\frac{j(j+1)}{r^2}-\epsilon^2)H_2=0,\\
\textit{условие Лоренца}\quad \epsilon H_0=\frac{j+1}{r}H_1+(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})H_2.
\end{gathered} \tag{2.11}$$

В случае I первое и второе уравнения системы (2.10) после исключения функции H_2 с помощью третьего уравнения приводят к одному и тому же уравнению.

Из условия Лоренца выразим переменную H_0 и подставим в третье уравнения системы (2.10), в результате получим

$$(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2-\frac{j(j+1)}{r^2})H_1=\frac{2(j+1)}{r^2}H_2,\ (\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2-\frac{j(j+1)}{r^2})H_2=\frac{2j}{r^2}H_1+\frac{2}{r^2}H_2, \quad (2.12)$$

или в матричной форме

$$\Delta\begin{vmatrix}H_1\\H_2\end{vmatrix}=\frac{2}{r^2}\begin{vmatrix}0 & j+1\\ j & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}H_1\\H_2\end{vmatrix}.$$

Диагонализируем матрицу смешивания:

$$\bar{H}=T_1H,\quad T_1\Delta T_1^{-1}\bar{H}=T_1AT_1^{-1}\bar{H},\quad T_1AT_1^{-1}=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix},\quad H=T^{-1}\bar{H},$$

$$T_1^{-1}=\begin{vmatrix}\frac{j+1}{2j+1} & \frac{j}{2j+1}\\ -\frac{j}{2j+1} & \frac{j}{2j+1}\end{vmatrix},\quad T_1=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & \frac{j+1}{j}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-j & 0\\ 0 & j+1\end{vmatrix}.$$

В результате система (2.12) преобразуется в следующую:

$$(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2-\frac{(j-1)j}{r^2})\bar{H}_1=0,\ (\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2-\frac{(j+1)(j+2)}{r^2})\bar{H}_2=0; \quad (2.13)$$

простой подстановкой эти уравнения приводятся к бесселевому виду

$$\bar{H}_1(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\bar{F}_1(r),\quad (\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2-\frac{(j-1/2)^2}{r^2})\bar{F}_1=0,$$

$$\bar{H}_2(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\bar{F}_2(r),\quad (\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2-\frac{(j+3/2)^2}{r^2})\bar{F}_2=0,$$

т. е.

$$\text{I.}\quad z=\epsilon r,\qquad \bar{H}_1(r)=\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2}(z),\quad \bar{H}_2(r)=\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2}(z). \quad (2.14)$$

Исходные функции задаются соотношениями

$$\text{I.}\quad H_1=\frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_1+\frac{j}{2j+1}\bar{H}_2,\quad H_2=-\frac{j}{2j+1}\bar{H}_1+\frac{j}{2j+1}\bar{H}_2.$$

Рассмотрим случай II. Первое и второе уравнения системы (2.11) после исключения функции H_2 с помощью третьего уравнения приводят к одному и тому же уравнению, одно из них можем отбросить, например, первое.

Из условия Лоренца выразим переменную H_0 и подставим в третье уравнение системы (2.11), в результате получим

$$[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2-\frac{j(j+1)}{r^2}]H_1=\frac{2j}{r^2}H_2,\ [\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\epsilon^2-\frac{j(j+1)}{r^2}]H_2=\frac{2(j+1)}{r^2}H_1+\frac{2}{r^2}H_2,$$

или в матричной форме

$$\Delta\begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \end{vmatrix} = \frac{2}{r^2}\begin{vmatrix} 0 & j \\ j+1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \end{vmatrix}.$$

Диагонализируем матрицу смешивания

$$\begin{vmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{vmatrix} = T_2\begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \end{vmatrix}, \quad T_2AT_2^{-1} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -j & 0 \\ 0 & j+1 \end{vmatrix}, \quad T_2^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{j+1}{2j+1} & \frac{j}{2j+1} \\ -\frac{j+1}{2j+1} & \frac{j+1}{2j+1} \end{vmatrix}, \quad T_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{j}{j+1} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

В результате получаем два раздельных уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j-1)j}{r^2}\right)\bar{H}_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j+1)(j+2)}{r^2}\right)\bar{H}_2 = 0. \qquad (2.15)$$

Простой подстановкой они приводятся к бесселевому виду

$$\bar{H}_1(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\bar{F}_1(r), \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j-1/2)^2}{r^2}\right)\bar{F}_1 = 0,$$

$$\bar{H}_2(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\bar{F}_2(r), \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j+3/2)^2}{r^2}\right)\bar{F}_2 = 0,$$

т. е.

$$z = \epsilon r, \qquad \bar{H}_1(r) = \frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2}(z), \quad \bar{H}_2(r) = \frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2}(z). \qquad (2.16)$$

Исходные функции строятся так:

$$\text{II.} \quad H_1 = \frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_1 + \frac{j}{2j+1}\bar{H}_2, \quad H_2 = -\frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_1 + \frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_2.$$

Таким образом, в двух случаях получаем следующие решения:

$$\text{I.} \qquad H_1^I = \frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_1 + \frac{j}{2j+1}\bar{H}_2, \quad H_2^I = -\frac{j}{2j+1}\bar{H}_1 + \frac{j}{2j+1}\bar{H}_2;$$

$$\text{II.} \qquad H_1^{II} = \frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_1 + \frac{j}{2j+1}\bar{H}_2, \quad H_2^{II} = -\frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_1 + \frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_2,$$

где

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2}(z), \quad \bar{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2}(z).$$

Легко убедиться, что два решения I и II связаны линейным преобразованием:

$$H^{II} = T_2^{-1}T_1H^I = \begin{vmatrix} \frac{j+1}{2j+1} & \frac{j}{2j+1} \\ -\frac{j+1}{2j+1} & \frac{j+1}{2j+1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \frac{j+1}{j} \end{vmatrix}H^I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{j+1}{j} \end{vmatrix}H^I. \qquad (2.17)$$

Следовательно, мы можем использовать только один случай: либо I, либо II (для определенности будем использовать вариант I). Поскольку уравнения для функций $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_1$ не связаны между собой, то два линейно независимых решения можно выбрать так (нумеруем их как 2 и 3):

$$2)\quad \bar{H}_1 = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2}, \quad H_1 = \frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_1, \quad H_2 = -\frac{j}{2j+1}\bar{H}_1, \quad H_0 = -\frac{j}{z}H_1 - (\frac{d}{dz}+\frac{2}{z})H_2; \qquad (2.18)$$

$$3)\quad \bar{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2}, \quad H_1 = \frac{j}{2j+1}\bar{H}_2, \quad H_2 = \frac{j}{2j+1}\bar{H}_2, \quad H_0 = -\frac{j}{z}H_1 - (\frac{d}{dz}+\frac{2}{z})H_2. \qquad (2.19)$$

Преобразуем эти решения к переменным h_i:

$$h_0 = \sqrt{2}\sqrt{j+1}H_0, \quad h_3 = +h_1 = i\sqrt{j}H_1, \quad h_2 = i\sqrt{2}\sqrt{j+1}H_2\ ;$$

в результате получаем

$$2)\quad h_3 = +h_1 = i\sqrt{j}\,\frac{j+1}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2}, \quad h_2 = -i\sqrt{2}\sqrt{j+1}\frac{j}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2},$$

$$h_0 = \sqrt{2}\sqrt{j+1}(-\frac{j}{z}\frac{j+1}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2} + \frac{j}{2j+1}(\frac{d}{dz}+\frac{2}{z})\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2}); \qquad (2.20)$$

$$3)\quad h_3 = +h_1 = i\sqrt{j}\,\frac{j}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2}, \quad h_2 = i\sqrt{2}\sqrt{j+1}\frac{j}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2},$$

$$h_0 = \sqrt{2}\sqrt{j+1}(-\frac{j}{z}\frac{j}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2} - \frac{j}{2j+1}(\frac{d}{dz}+\frac{2}{z})\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2}). \qquad (2.21)$$

3. Градиентное решение

Пока для безмассового поля со спином 1 найдены только три решения. Известно, что должно существовать еще одно решение градиентного типа, найдем его. Исходим из определения

$$\Psi_\alpha(x) = \partial_\alpha \Lambda(x), \quad \Lambda(x) = e^{-i\epsilon t}D_0 f(r), \quad D_0 = D^j_{-m,0}(\theta,\phi,0). \qquad (3.1)$$

Тетрадное представление этого 4-вектора $\Psi_a(x) = e^\beta_{(a)}\Psi_\beta$ такое:

$$\Psi_{(0)} = e^\beta_{(0)}\Psi_\beta = -i\epsilon e^{-i\epsilon t}D_0 f, \quad \Psi_{(3)} = e^\beta_{(3)}\Psi_\beta = e^{-i\epsilon t}\frac{df}{dr}D_0,$$

$$\Psi_{(1)} = e^\beta_{(1)}\Psi_\beta = e^{-i\epsilon t}\frac{f}{r}\partial_\theta D_0, \quad \Psi_{(2)} = e^\beta_{(2)}\Psi_\beta = e^{-i\epsilon t}\frac{f}{r}\frac{im}{\sin\theta}D_0.$$

Преобразуя вектор $\Psi_{(a)}$ к циклическим компонентам

$$\Psi_0 = \bar{\Psi}_0, \quad \Psi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3, \quad \Psi_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3, \quad \Psi_3 = \bar{\Psi}_2,$$

получаем

$$\bar{\Psi}_{(0)} = -i\epsilon e^{-i\epsilon t} D_0 f, \quad \bar{\Psi}_2 = e^{-i\epsilon t} \frac{df}{dr} D_0,$$
$$\bar{\Psi}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\epsilon t} \frac{f}{r} (\partial_\theta + \frac{m}{\sin\theta}) D_0, \quad \bar{\Psi}_3 = +\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\epsilon t} \frac{f}{r} (\partial_\theta - \frac{m}{\sin\theta}) D_0. \tag{3.2}$$

Отсюда, учитывая рекуррентные соотношения

$$\partial_\theta D_0 = +\frac{a}{2} D_{-1} - \frac{a}{2} D_{+1}, \quad \frac{-m}{\sin\theta} D_0 = -\frac{a}{2} D_{-1} - \frac{a}{2} D_{+1},$$

находим

$$\bar{\Psi}_{(0)} = -i\epsilon e^{-i\epsilon t} D_0 f = e^{-i\epsilon t} \bar{h}_0 D_0, \quad \bar{\Psi}_2 = e^{-i\epsilon t} \frac{df}{dr} D_0 = e^{-i\epsilon t} \bar{h}_2 D_0,$$
$$\bar{\Psi}_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\epsilon t} \frac{1}{r} f D_{-1} = e^{-i\epsilon t} \bar{h}_1 D_{-1}, \quad \bar{\Psi}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\epsilon t} \frac{a}{r} f D_{+1} = e^{-i\epsilon t} \bar{h}_3 D_{+1}. \tag{3.3}$$

Таким образом, получены выражения для радиальных компонент четвертого решения:

$$\bar{h}_0 = -i\epsilon f, \quad \bar{h}_2 = \frac{df}{dr}, \quad \bar{h}_1 = -\frac{\sqrt{j(j+1)/2}}{r} f, \quad \bar{h}_3 = -\frac{\sqrt{j(j+1)/2}}{r} f. \tag{3.4}$$

Принимая во внимание ограничения по четности, заключаем, что построенное решение (3.4) имеет четность $P = (-1)^j$:

$$\bar{h}_0(r) = -i\epsilon f(r), \quad \bar{h}_2(r) = \frac{d}{dr} f(r), \quad \bar{h}_3(r) = +\bar{h}_1(r) = -\frac{\sqrt{j(j+1)/2}}{r} f(r). \tag{3.5}$$

Будем предполагать, что скалярная функция $\Lambda(x)$ является решением уравнения Клейна – Фока:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Lambda(x) = 0, \quad [\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \vec{l}^{\,2}] \Lambda(x) = 0;$$

с учетом подстановки для $\Lambda(x) = e^{-i\epsilon t} f(r) D^j_{-m,0}(\phi,\theta,0)$ получаем радиальное уравнение

$$[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}] f(r) = 0. \tag{3.6}$$

Его можно привести к бесселеву типу в переменной $z = \epsilon r$:

$$f(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} F(r), \quad [\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j+1/2)^2}{r^2}] F(r) = 0, \quad f(r) = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2)}(z); \tag{3.7}$$

таким образом, четвертое решение описывается соотношениями

$$4) \quad h_3 = h_1 = -\frac{\sqrt{j(j+1)}}{\sqrt{2}} \frac{1}{z\sqrt{z}} J_{j+1/2}, \quad h_0 = -\frac{i}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}, \quad h_2 = \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}. \tag{3.8}$$

4. Сводка результатов

Соберем все 4 решения вместе:

$$1)\quad h_0 = 0,\quad h_2 = 0,\quad h_3 = -h_1 = -\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}(z);$$

$$2)\quad h_3 = +h_1 = i\sqrt{j}\,\frac{j+1}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2} = A_1 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2},$$

$$h_2 = -i\sqrt{2}\sqrt{j+1}\,\frac{j}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2} = A_2 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2},$$

$$h_0 = \sqrt{2}\sqrt{j+1}\Big(-\frac{j}{z}\frac{j+1}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2} + \frac{j}{2j+1}\Big(\frac{d}{dz}+\frac{2}{z}\Big)\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2}\Big) \Rightarrow$$

$$h_0 = -\sqrt{2}\sqrt{j+1}\,\frac{j}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2} = A_0 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2};$$

$$3)\quad h_3 = +h_1 = i\sqrt{j}\,\frac{j}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2} = A_1 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2},$$

$$h_2 = i\sqrt{2}\sqrt{j+1}\,\frac{j}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2} = A_2 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2},$$

$$h_0 = \sqrt{2}\sqrt{j+1}\Big(-\frac{j}{z}\frac{j}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2} - \frac{j}{2j+1}\Big(\frac{d}{dz}+\frac{2}{z}\Big)\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2}\Big) \Rightarrow$$

$$h_0 = -\sqrt{2}\sqrt{j+1}\,\frac{j}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2} = A_0 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2};$$

$$4)\quad h_3 = h_1 = -\frac{\sqrt{j(j+1)}}{\sqrt{2}}\frac{1}{z\sqrt{z}} J_{j+1/2},\quad h_0 = -\frac{i}{\sqrt{z}} J_{j+1/2},\quad h_2 = \frac{d}{dz}\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}.$$

Эти решения можно проверить подстановкой в исходную систему (1.2), исключая в ней переменные E_i, B_i. Для решения 1 получаем тождества.

Для решения 2

$$2)\quad h_0 = \frac{B_0}{\sqrt{z}} J_{j+1/2},\quad h_1 = h_3 = \frac{B_1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2},\quad h_2 = \frac{B_2}{\sqrt{z}} J_{j-1/2}$$

получаем

$$B_0 = \frac{i\sqrt{2}\,j}{\sqrt{j(j+1)}} B_1,\quad B_2 = -\frac{\sqrt{2}\,j}{\sqrt{j(j+1)}} B_1.$$

Для решения 3

$$3)\quad h_0 = \frac{B_0}{\sqrt{z}} J_{j+1/2},\quad h_1 = h_3 = \frac{B_1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2},\quad h_2 = \frac{B_2}{\sqrt{z}} J_{j+3/2}$$

получаем

$$B_0 = \frac{i(j+1)\sqrt{2}}{\sqrt{j(j+1)}}B_1, \quad B_2 = \frac{(j+1)\sqrt{2}}{\sqrt{j(j+1)}}B_1.$$

Для решения 4 получаем тождества. В случае 2 убеждаемся, что оба ответа приводят к одному и тому же результату

$$2) \qquad \frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1} = +i\sqrt{2}\frac{j}{\sqrt{j(j+1)}}, \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = -\sqrt{2}\frac{j}{\sqrt{j(j+1)}}$$

В случае 3 убеждаемся, что оба ответа также приводят к одному и тому же результату

$$3) \qquad \frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1} = +i\sqrt{2}\frac{j+1}{\sqrt{j(j+1)}}, \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \sqrt{2}\frac{j+1}{\sqrt{j(j+1)}}.$$

Следует специально отметить, что из решений типа 2 и 3 можно образовать линейную комбинацию, которая соответствует второму калибровочному решению (согласно общей теории, из четырех решений два должны быть калибровочными, а два – физически наблюдаемыми)

$$\frac{2j+1}{j+1}h_1^{(2)} + \frac{2j+1}{j}h_1^{(3)} = i\sqrt{j}\frac{1}{\sqrt{z}}(J_{j-1/2} + J_{j+3/2}) = i\sqrt{j}\frac{1}{\sqrt{z}}(2j+1)\frac{1}{z}J_{j+1/2};$$

отсюда следует

$$\frac{1}{j+1}h_1^{(2)} + \frac{1}{j}h_1^{(3)} = i\sqrt{j}\frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+1/2};$$

с учетом равенства

$$-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{j+1}}\frac{2j+1}{j}h_0 = \frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+1/2}$$

находим

$$\frac{1}{j(j+1)}(jh_1^{(2)} + (j+1)h_1^{(3)}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{j(j+1)}}(2j+1)(-i\frac{1}{z}h_0).$$

Таким образом, найденная комбинация соответствует второму калибровочному решению

$$h_1^{gauge} \equiv \frac{j}{2j+1}h_1^{(2)} + \frac{j+1}{2j+1})h_1^{(3)} = -i\frac{\sqrt{j(j+1)}}{\sqrt{2}}\frac{1}{z}h_0^{gauge},$$

где

$$h_0^{gauge} = -\sqrt{2}\sqrt{j+1}\frac{j}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+1/2}.$$

Построенные 4 независиимых решения для безмассовой частицы со спином 1 позволяют найти явные выражения для четырех калибровочных решений системы уравнений Паули – Фирца для безмассовой частицы со спином 2; этот вопрос будет рассмотрен в отдельной работе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pauli, W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.

2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.

3. Федоров, Ф. И. К теории частицы со спином 2 / Ф. И. Федоров // Учен. зап. БГУ. Сер. физ.-мат. – 1951. – Вып. 12. – С. 156–173.

4. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5. – Nr 2. – P. 325–326.

5. Об уравнениях для частицы со спином 2 во внешних электромагнитных и гравитационных полях / А. А. Богуш [и др.] // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 1. – С. 62–67.

6. Red'kov, V. M. Graviton in a curved spacetime background and gauge symmetry / V. M. Red'kov, N. G. Tokarevskaya, V. V. Kisel // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2003. – Vol. 6, nr 3. – P. 772–778.

7. Анализ вклада калибровочных степеней свободы в структуру тензора энергии-импульса безмассового поля со спином 2 / В. В. Кисель [и др.] // Вес. НАН Беларуси. Сер. фiз.-мат. навук. – 2015. – № 2. – С. 58–63.

8. Нерелятивистский предел в теории частицы со спином 2 / В. В. Кисель [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 21–27.

9. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 486 с.

10. Редьков, В. М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. навука, 2011. – 339 с.

11. Варшалович, Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л. : Наука. – 1975. – 439 с.

REFERENCES

1. Pauli, W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.

2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.

3. Fiodorov, F. I. K tieorii chasticy so spinom 2 / F. I. Fiodorov // Uchion. zap. BGU. Sier. fiz.-mat. – 1951. – Vyp. 12. – S. 156–173.

4. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5. – Nr 2. – P. 325–326.

5. Ob uravnienijakh dlia chasticy so spinom 2 vo vnieshnikh eliektromagnitnykh i gravitacionnykh poliakh / A. A. Bogush [i dr.] // Vies. NAN Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2003. – № 1. – S. 62–67.

6. Red'kov, V. M. Graviton in a curved spacetime background and gauge symmetry / V. M. Red'kov, N. G. Tokarevskaya, V. V. Kisel // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2003. – Vol. 6, nr 3. – P. 772–778.

7. Analiz vklada kalibrovochnykh stiepieniej svobody v strukturu tenzora energii-impul’sa biezmassovogo polia so spinom 2 / V. V. Kisiel’ [i dr.] // Vies. NAN Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2015. – № 2. – S. 58–63.

11. Варшалович, Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л. : Наука. – 1975.

8. Nierieliativistskij priediel v tieorii chasticy so spinom 2 / V. V. Kisiel’ [i dr.] // Dokl. NAN Bielarusi. – 2015. – T. 59, № 3. – S. 21–27.

9. Ried’kov, V. M. Polia chastic v rimanovom prostranstvie i gruppa Lorenca / V. M. Ried’kov. – Minsk : Bielarus. navuka, 2009. – 486 s.

10. Red’kov V. M. Tietradnyj formalizm, sfierichieskaja simmietrija i bazis Shredingera / V. M. Ried’kov. – Minsk : Bielarus. navuka, 2011. – 339 s.

11. Varshalovich, D. A. Kvantovaja tieorija uglovogo momienta / D. A. Varshalovich, A. N. Moskaliov, V. K. Khiersonskij. – L. : Nauka. – 1975. – 439 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 21.10.2022