

УДК 519.6 + 517.983.54

**Олег Викторович Матысик**канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина**Oleg Matysik**PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science  
of the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: matysikoleg@mail.ru

**НЕЯВНАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ  
НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА**

Доказана сходимость неявного метода с априорным и апостериорным выбором числа итераций в исходной норме гильбертова пространства в случае самосопряженного оператора в предположении, что погрешности имеются в правой части уравнения. Получены оценки погрешности метода, оценки для априорного и апостериорного моментов останова. Сформулирован и описан алгоритм решения некорректной модельной задачи. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

**Ключевые слова:** некорректное уравнение первого рода, неявный итерационный метод, гильбертово пространство, самосопряженный оператор, правило останова по невязке.

***The Implicit Iterative Procedure for Approximate Solution of Ill-Posed Equations of the First Kind***

We prove the convergence of the implicit method with a priori and a posteriori choice of the number of iterations in the original norm of the Hilbert space in the case of a self-adjoint operator, under the assumption that the errors are in the right-hand side of the equation. Obtained error estimates of the method, the estimates for the a priori and a posteriori moments stop. An algorithm for solving an incorrect model problem is formulated and described. The results obtained can be used in theoretical studies of the solution of linear operator equations, and solving ill-posed problems applied.

**Key words:** ill-posed equation of the first kind, implicit iteration method, Hilbert space, self-adjoint operator, residual stop rule.

**Введение**

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач.

Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике и управлении, может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \quad (1)$$

с заданным оператором  $A: X \rightarrow Y$  и элементом  $y$ , где  $X$  и  $Y$  – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [1] было введено следующее понятие корректности:

**Определение 1.** Задачу отыскания решения  $x \in X$  уравнения (1) называют корректной (или корректно поставленной, или корректной по Адамару), если при любой фиксированной правой части  $y = y_0 \in Y$  уравнения (1) его решение:

- а) существует в пространстве  $X$ ;
- б) определено в пространстве  $X$  однозначно;

в) устойчиво в пространстве  $X$ , т. е. непрерывно зависит от правой части  $y \in Y$ . В случае нарушения любого из этих условий задачу называют некорректной (некорректно поставленной); более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть неустойчивой.

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора  $A^{-1}$  на всем пространстве  $Y$ .

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались. Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения первого рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике  $l_2$ , обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии, задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область. Некорректны также и задача проектирования оптимальных систем, конструкций, задача создания систем автоматической обработки результатов физического эксперимента, задача Коши для уравнения теплопроводности с обращенным временем и т. д.

Однако обычные методы, применяемые для решения корректных задач, невозможно было применить к некорректным задачам, поэтому необходимо было пересмотреть определение корректности по Адамару. Это было сделано в 1943 г. А. Н. Тихоновым [2].

**Определение 2.** *Задача отыскания решения уравнения (1) называется корректной по Тихонову на множестве  $M \subset X$ , а множество  $M$  – ее классом корректности, если:*

- а) точное решение задачи существует в классе  $M$ ;
- б) в классе  $M$  решение задачи единственно при любой правой части  $y \in F = AM \subset Y$ ;
- в) принадлежащее множеству  $M$  решение задачи устойчиво относительно правых частей  $y \in F$ .

Если  $M = X$  и  $F = Y$ , то корректность по Тихонову совпадает с корректностью по Адамару.

После работ А. Н. Тихонова систематическое изучение некорректных задач и способов их решения началось в 50-х годах, но особенно широкий размах оно приняло в последние 50 лет. Основные результаты отражены в монографиях М. М. Лаврентьева [3], А. Н. Тихонова и В. Я. Арсенина [4], В. К. Иванова, В. В. Васина и В. П. Тананы [5], А. Б. Бакушинского [6], Г. М. Вайникко и А. Ю. Веретенникова [7] и др.

Наиболее общим из известных в настоящее время подходов к решению некорректных задач является подход, основанный на введенном А. Н. Тихоновым понятии регуляризатора.

Пусть имеется некорректная в классическом смысле задача математической физики.

**Определение 3.** *Параметрическое семейство операторов  $\{R_\alpha\}$ , действующих из пространства правых частей  $Y$  в пространство решений  $X$ , называется регуляризирующим (регуляризирующим алгоритмом, или регуляризатором), если:*

- 1) при любом  $\alpha > 0$  оператор  $R_\alpha$  определен на всем пространстве  $Y$ ;

2) если существует точное решение исходной задачи  $x \in X$ , то для любого  $\delta > 0$  существует  $\alpha(\delta)$  такое, что для всех  $y_\delta \in Y$ ,  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$  имеет место соотношение  $\|R_{\alpha(\delta)}y_\delta - x\|_X \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Параметр  $\alpha$  называется параметром регуляризации,  $x_{\alpha,\delta} = R_{\alpha(\delta)}y_\delta$  – регуляризованными решениями.

Использование регуляризатора задачи дает возможность сколь угодно точного ее решения при достаточно точных исходных данных. В работе [8] А. Н. Тихонов предлагает способ построения регуляризующих операторов для уравнения (1). Это *метод регуляризации* решения некорректных задач. Он основан на вариационном принципе. В методе рационально выбирается параметр регуляризации, используется априорный способ выбора и предложены принципы невязки и сглаживающего функционала.

Для решения некорректных задач В. К. Иванов в работе [9] излагает *метод квазирешений*. Большое применение для регуляризации некорректных задач имеет также и *метод невязки*, предложенный Д. Л. Филлипсом [10] и В. К. Ивановым [11].

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [12–19].

В настоящей статье предлагается неявный итерационный метод решения некорректных задач, представляющий собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра  $k$ . Для рассматриваемого метода исследована сходимость в исходной норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности и априорный момент останова; обоснована возможность применения к методу правила останова по малости невязки; решена численная модельная некорректная задача.

Выбор параметра  $k$  и, следовательно, соответствующей схемы для решения некорректных задач зависит от степени  $s$  истокорпредставимости точного решения ( $x = A^s z$ ,  $s > 0$ ). В работе показано, что для  $s \leq 5$  целесообразно использовать предложенный метод при  $k = 1$ , для  $6 \leq s \leq 27$  при  $k = 2$  и т. д.

Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным *явным методом итераций Ландвебера* [12]  $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$ ,  $x_{0,\delta} = 0$  показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле *метод Ландвебера* предпочтительнее рассматриваемого неявного метода. Однако предлагаемый неявный метод обладает следующим важным достоинством. В *методе Ландвебера* на параметр  $\alpha$  накладывается ограничение сверху – неравенство  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$ , что может привести

на практике к необходимости большого числа итераций. В предлагаемом неявном методе ограничений сверху на  $\alpha > 0$  нет. Это позволяет считать  $\alpha > 0$  произвольно большим (независимо от  $\|A\|$ ), в связи с чем оптимальную оценку для неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

Рассмотренный в статье итерационный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, при решении обратной кинематической задачи сейсмологии, космических исследованиях (спектроскопии) и медицине (компьютерной томографии) [3–8].

## Основная часть

### 1. Постановка задачи.

В действительном гильбертовом пространстве  $H$  исследуется уравнение первого рода

$$Ax = y, \quad (2)$$

где  $A$  – положительно определенный ограниченный и самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора  $A$ , и, следовательно, задача некорректна. Пусть  $y \in R(A)$ , т. е. при точной правой части  $y$  уравнение (2) имеет единственное решение  $x$ . Для отыскания этого решения предлагается неявная итерационная процедура

$$(E + \alpha^2 A^{2k})x_{n+1} = (E - \alpha A^k)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1} y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \quad (3)$$

В случае приближенной правой части  $y_\delta$  ( $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ ) соответствующие методу (3) итерации примут вид

$$(E + \alpha^2 A^{2k})x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^k)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1} y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N. \quad (4)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (4) понимается утверждение о том, что приближения (4) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при подходящем выборе  $n$  и достаточно малых  $\delta$ . Иными словами, метод (4) является сходящимся, если  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$ .

### 2. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций.

#### 2.1. Сходимость при точной правой части.

Воспользовавшись интегральным представлением положительно определенного самосопряженного оператора  $A$  и формулой (3), по индукции получим

$$x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda y, \quad \text{где } M = \|A\|, \quad E_\lambda - \text{спектральная функция оператора } A.$$

Отсюда легко выводится сходимость итерационного процесса (3) при  $n \rightarrow \infty$  для  $\alpha > 0$ .

#### 2.2. Сходимость при приближенной правой части.

Итерационный процесс (4) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций  $n$  в зависимости от уровня погрешности  $\delta$ . Справедлива

**Теорема 1.** *Итерационный процесс (4) сходится при  $\alpha > 0$ , если выбирать число итераций  $n$  в зависимости от  $\delta$  так, чтобы  $n^{1/k} \delta \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ .*

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из [15; 16].

При этом легко показывается оценка  $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq 2k(n\alpha)^{1/k} \delta$ ,  $n \geq 1$ .

#### 2.3. Оценка погрешности.

Скорость сходимости метода (4) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения  $x$  уравнения (2), т. е.  $x = A^s z$ ,  $s > 0$ . Тогда  $y = A^{s+1} z$  и, следовательно, получим

$$x - x_n = \int_0^M \lambda^s \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda z. \quad \text{Для оценки } \|x - x_n\| \text{ найдем максимум модуля подынте-}$$

гальной функции  $f(\lambda) = \lambda^s \frac{(1 - \alpha\lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2\lambda^{2k})^n}$ . Нетрудно показать, что при условии  $\alpha > 0$

справедливо неравенство  $\|x - x_n\| \leq s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k} \|z\|$ . Таким образом, общая оценка погрешности метода (4) запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k} \|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k} \delta, \quad n \geq 1.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим априорный момент

останова  $n_{\text{опт}} = s^{\frac{s+k}{s+1}} (2k)^{-\frac{s+k}{s+1}} \alpha^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{k}{s+1}} \|z\|^{\frac{k}{s+1}}$  и оптимальную оценку погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1+s) \left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{-\frac{s}{k(s+1)}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \quad (5)$$

**Замечание 1.** Оценка погрешности (5) имеет порядок  $O(\delta^{s/(s+1)})$ , и, как следует из [7], она является оптимальным в классе задач с истокообразно представимыми решениями  $x = A^s z$ ,  $s > 0$ .

**Замечание 2.** Оптимальная оценка (5) не зависит от  $\alpha$ , но от параметра  $\alpha$  зависит  $n_{\text{опт}}$ , поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать  $\alpha$ , удовлетворяющим условию  $\alpha > 0$ , и так, чтобы  $n_{\text{опт}} = 1$ . Для этого достаточно

выбрать  $\alpha_{\text{опт}} = s^{\frac{s+k}{s+1}} (2k)^{-\frac{s+k}{s+1}} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{k}{s+1}} \|z\|^{\frac{k}{s+1}}$ .

Приведем погрешность метода (4) при счете с округлениями. Пусть  $x_{n,\delta}$  – точное значение, полученное по формуле (4), а  $z_n$  – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления  $\gamma_n$ , т. е.

$$z_{n+1} = (E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} \left[ (E - \alpha A^k)^2 z_n + 2\alpha A^{k-1} y_\delta \right] + \alpha \gamma_n, \quad z_0 = 0.$$

Оценка погрешности метода (4) в этом случае имеет вид

$$\|x - z_n\| \leq \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leq s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k} \|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k} \delta + n\alpha\gamma, \quad n \geq 1,$$

где  $\gamma = \sup_i |\gamma_i|$ .

Оценку  $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}$  можно оптимизировать по  $k$ . Для этого производную по  $k$

от  $\varphi(k) = (s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{-\frac{s}{k(s+1)}}$  приравняем к нулю.

Получим  $(s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}} \cdot \frac{s}{k^2(s+1)} \cdot \left(k - \ln \frac{s}{k}\right) = 0$ . Отсюда видно, что опти-

мальное  $k$  должно удовлетворять равенству  $k = \ln \frac{s}{k}$ . Но  $k$  должно быть целым числом,

поэтому, как показывают расчеты, для  $s \leq 5$   $k_{\text{опт}} = 1$ , для  $6 \leq s \leq 27$   $k_{\text{опт}} = 2$ .

### 3. Апостериорный выбор числа итераций.

Априорный выбор числа итераций  $n$  получен в предположении, что точное решение  $x$  уравнения (2) истокообразно представимо. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в разделе 2 оценки погрешности оказываются неприменимыми.

Тем не менее метод (4) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке. Зададим уровень останова  $\varepsilon > 0$  и момент  $m$  останова итерационного процесса (4) определим условием [13; 15–17]:

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \quad (6)$$

Предположим, что при начальном приближении невязка достаточно велика, — больше уровня останова, т. е.  $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$ . Покажем возможность применения пра-

вила (6) к методу (4). Рассмотрим семейство функций  $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[ 1 - \frac{(1 - \alpha\lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2\lambda^{2k})^n} \right] \geq 0$ .

Нетрудно показать, что при  $\alpha > 0$  для  $g_n(\lambda)$  выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| &\leq 2k(n\alpha)^{1/k}, \quad n > 0, \\ \sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| &\leq 1, \quad n > 0, \\ 1 - \lambda g_n(\lambda) &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \lambda \in (0, M], \\ \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| &\leq s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k}, \quad n > 0, \quad 0 \leq s < \infty. \end{aligned}$$

Аналогично подобным леммам из [15–16] доказываются следующие леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq M$ . Тогда для  $\forall w \in H$   $(E - Ag_n(A))w \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Лемма 2.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq M$ . Тогда для  $\forall v \in \overline{R(A)}$  имеет место соотношение  $n^{s/k} \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq s < \infty$ .

**Лемма 3.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq M$ . Если для некоторых  $n_k < \bar{n} = \text{const}$  и  $v_0 \in \overline{R(A)}$  при  $k \rightarrow \infty$  имеем  $w_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$ , то  $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$ .

Леммы 1–3 использовались при доказательстве следующих теорем.

**Теорема 2.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq M$  и пусть момент останова  $m = m(\delta)$  в методе (4) выбирается по правилу (6), тогда  $x_{m(\delta),\delta} \rightarrow x$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть  $x = A^s z$ ,  $s > 0$ . Тогда

справедливы оценки  $m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[ \frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{k/(s+1)}$ ,

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + 2k\alpha^{1/k} \left\{ 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[ \frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{k/(s+1)} \right\}^{1/k} \delta. \quad (7)$$

Доказательство теорем 2–3 аналогично доказательству подобных теорем из [15; 16].

**Замечание 3.** Порядок оценки (7) есть  $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ , и, как следует из [7], он опти-

мален в классе задач с истокообразно представимыми решениями  $x = A^s z$ ,  $s > 0$ .

**Замечание 4.** Хотя формулировка теоремы 3 дается с указаниями степени истокопредставимости  $s$  и истокопредставляющего элемента  $z$ , на практике их значение не потребуется, т. к. они не содержатся в правиле останова (6). И тем не менее в теореме 3 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций  $m$ , обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (6), как показывает теорема 2, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.

**4. Численный модельный пример.**

**4.1. Формулировка и описание алгоритма решения модельной задачи.**

**Задача.** Решаем в пространстве  $L_2(0,1)$  модельную задачу в виде уравнения

$$\int_0^1 K(t,s) x(s) ds = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8)$$

с симметричным положительным ядром  $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \end{cases}$  точной правой

частью  $y(t) = \frac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12}$  и точным решением  $x(t) = t(1-t)$ .

Обычно на практике мы не знаем точной функции  $y(t)$ , а вместо нее известны значения приближенной функции  $\tilde{y}(t)$  в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью  $\delta$ , и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения  $\tilde{y}_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , полученные следующим образом:  $\tilde{y}_i = [y(t_i) \cdot 10^k + 0,5] / 10^k$ , где  $y(t_i)$  – значения функции  $y(t)$  в точках  $t_i = ih$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $h = 1/m$ . Квадратные скобки означают целую часть числа и  $k = 4$ . При  $k = 4$  величина погрешности  $\delta = 10^{-4}$ . Действительно, имеем  $\int_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^m [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \leq mh(10^{-k})^2 = 10^{-2k}$ .

Заменим интеграл в уравнении (8) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников  $\left( \int_a^b f(x) dx = h \sum_{k=1}^n y_k = h[y_1 + y_2 + \dots + y_n] \right)$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ ,

$y_k = f(x_k)$ ,  $x_k = a + kh$  с узлами  $s_j = jh$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $h = 1/m$ , т. е.  $\int_0^1 K(t, s)x(s)ds \approx \sum_{j=1}^m K(t, s_j)hx_j$ . Тогда получим равенство  $\sum_{j=1}^m K(t, s_j)hx_j + \rho_m(t) = y(t)$ , где  $\rho_m(t)$  – остаток квадратурной замены. Записав последнее равенство в точках  $t_i = ih$ ,  $i = \overline{1, m}$  получим уравнения

$$\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j + \rho_m(t_i) = y(t_i), \quad i = \overline{1, m}.$$

Отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближенного решения

$$\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j = \tilde{y}_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Выберем для определенности  $m = 32$  и будем решать систему (9) методом итераций (4) при  $k = 1$ , который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} + \alpha^2 \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)h \left( \sum_{l=1}^m K(t_j, s_l)hx_l^{(n+1)} \right) = x_i^{(n)} - 2\alpha \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)x_j^{(n)}h + \\ + \alpha^2 \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)h \left( \sum_{l=1}^m K(t_j, s_l)hx_l^{(n)} \right) + 2\alpha \tilde{y}_i, \quad x_i^{(0)} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (10)$$

При решении задачи итерационным методом (4) вычислялись:

$$\|Ax^{(n)} - \tilde{y}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j^{(n)} - \tilde{y}_i \right]^2 h \right\}^{1/2} - \text{дискретная норма невязки,}$$

$$\|x^{(n)}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2} - \text{норма приближенного решения и дискретная норма разности}$$

$$\text{между точным и приближенным решениями } \|x - x^{(n)}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ x(t_i) - x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2}.$$

Оператор, описанный выше интегральным уравнением, непрерывен, взаимнооднозначен и аддитивен. Задача была решена методом (4) при  $\delta = 10^{-4}$ . Результаты счета приведены в *таблице 1* (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы). Для решения предложенной задачи сведений об истокорпредставимости точного решения не потребовалось, т. к. здесь воспользовались правилом останова по невязке (4), выбрав уровень останова  $\varepsilon = 1,5\delta$ . Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности методом итераций (4) при  $\alpha = 9,4$  требуется только одна итерация, что соответствует результатам раздела 2. На *рисунке 1* изображены графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (4) при  $\delta = 10^{-4}$ .

#### 4.2. Результат работы программы.

Программа для решения предложенной задачи была написана на языке программирования C#.

Таблица.

Узлы $t_i$	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближенное решение, полученное методом (4)
			$\delta = 10^{-4}$
0	0	0	0
0.0312	0.00259	0.03027	0.02429
0.0625	0.00517	0.05859	0.04865
0.0937	0.00768	0.08496	0.07275
0.125	0.01011	0.10938	0.09629
0.1562	0.01243	0.13184	0.11898
0.1875	0.01463	0.15234	0.14056
0.2187	0.01668	0.17089	0.1608
0.2500	0.01855	0.1875	0.17948
0.2812	0.02025	0.20215	0.19641
0.3125	0.02175	0.21484	0.21142
0.3437	0.02304	0.22559	0.22437
0.375	0.02411	0.23438	0.23514
0.4062	0.02495	0.24121	0.24361
0.4375	0.02555	0.24609	0.24972
0.4687	0.02591	0.24902	0.25341
0.5000	0.02604	0.25000	0.25464
$\ Ax^{(n)} - \tilde{y}\ _m$			0.00015
$\ x^{(n)}\ _m$			0.17972
$\ x - x^{(n)}\ _m$			0.00798

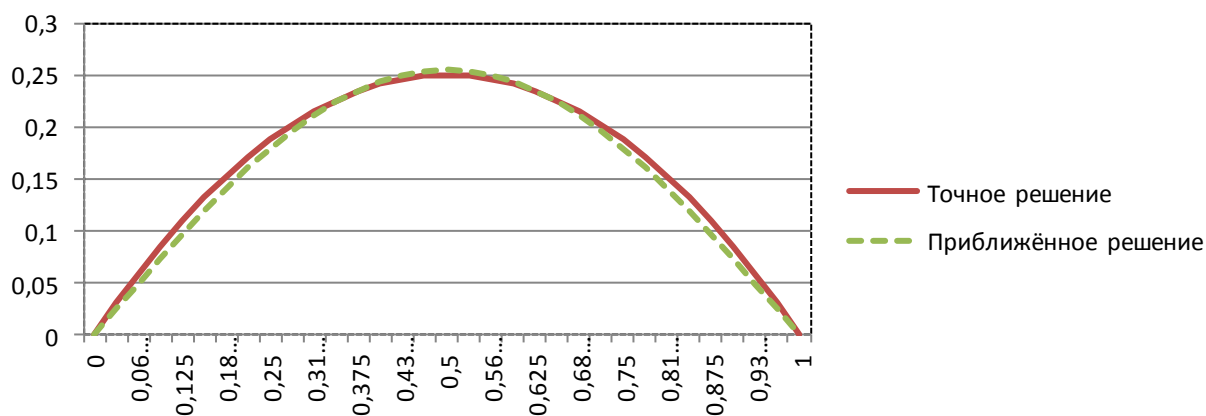


Рисунок.

### Заключение

В настоящей статье изучены некоторые свойства предложенного неявного итерационного метода решения некорректных задач: доказана сходимость метода с априорным и апостериорным выбором параметра регуляризации в исходной норме гильбертова пространства в случае положительного ограниченного самосопряженного оператора; получены оценки погрешности метода, оценки для априорного и апостериорного моментов останова; описан алгоритм решения численного некорректного модельного примера.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932. – 560 s.
2. Тихонов, А. Н. Об устойчивости обратных задач / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.
3. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : СО АН СССР, 1962. – 92 с.
4. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.
5. Иванов, В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М. : Наука, 1978. – 206 с.
6. Бакушинский, А. Б. Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А. Б. Бакушинский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.
7. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
8. Тихонов, А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.
9. Иванов, В. К. О некорректно поставленных задачах / В. К. Иванов // Мат. сб. – 1963. – Т. 61 (103), № 2. – С. 211–223.
10. Phillips, D. L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D. L. Phillips // J. Assoc. Comput. Mach. – 1962. – Vol. 9, Nr. 1. – P. 84–97.
11. Иванов, В. К. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. К. Иванов. – Киев : Наук. думка, 1968. – 287 с.
12. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
13. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
14. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
15. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.
16. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.
17. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.
18. Matysik, O. V. Solving ill-posed linear operator equations with an explicit iterative method in energetic norm / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2021. – Nr 367. – P. 271–279.
19. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr 416. – P. 1–12.

## REFERENCES

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932. – 560 s.

2. Tikhonov, A. N. Ob ustojchivosti obratnykh zadach / A. N. Tikhonov // Dokl. AN SSSR. – 1943. – T. 39, № 5. – S. 195–198.
3. Lavrient'jev, M. M. O niekotorykh niekorriektnykh zadachakh matiematichieskoj fiziki / M. M. Lavrient'jev. – Novosibirsk : SO AN SSSR, 1962. – 92 s.
4. Tikhonov, A. N. Mietody rieshenija niekorriektnykh zadach / A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin. – M. : Nauka, 1979. – 288 s.
5. Ivanov, V. K. Tieorija liniejnykh niekorriektnykh zadach i jejo prilozhenija / V. K. Ivanov, V. V. Vasin, V. P. Tanana. – M. : Nauka, 1978. – 206 s.
6. Bakushinskij, A. V. Odin obshchij prijom postrojenija riegularizujushchikh algoritmov dlja liniejnogo niekorriektnogo uravnenija v gilbiertovom prostranstvie / A. V. Baku-shinskij // Zhurn. vychisl. matiematiki i mat. fiziki. – 1967. – T. 7, № 3. – S. 672–677.
7. Vajnikko, G. M. Iteracionnyje procedury v niekorriektnykh zadachakh / G. M. Vajnikko, A. Yu. Vierietiennikov. – M. : Nauka, 1986. – 178 s.
8. Tikhonov, A. N. O reshenii niekorriektno postavliennykh zadach i mietodie riegularizacii / A. N. Tikhonov // Dokl. AN SSSR. – 1963. – T. 151, № 3. – S. 501–504.
9. Ivanov, V. K. O niekorriektno postavliennykh zadachakh / V. K. Ivanov // Mat. sb. – 1963. – T. 61 (103), № 2. – S. 211–223.
10. Phillips, D. L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D. L. Phillips // J. Accoc. Comput. Mach. – 1962. – Vol. 9, nr 1. – P. 84–97.
11. Ivanov, V. K. Tieorija priblizhonnykh mietodov i jejo primienienije k chisliennomu resheniju singuliarnykh integral'nykh uravnenij / V. K. Ivanov. – Kijev : Nauk. dumka, 1968. – 287 s.
12. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
13. Yemielin, I. V. K tieorii niekorriektnykh zadach / I. V. Yemielin, M. A. Krasnosiel'skij // Dokl. AN SSSR. – 1979. – T. 244, № 4. – S. 805–808.
14. Samarskij, A. A. Chisliennyje mietody rieshenija obratnykh zadach matiematichieskoj fiziki / A. A. Samarskij, P. N. Vabishchievich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.
15. Matysik, O. V. Javnyje i niejavnnyje iteracionnyje procedury rieshenija niekorriektno postavliennykh zadach / O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2014. – 213 s.
16. Matysik, O. V. Iteracionnayja riegularizacija niekorriektnykh zadach / O. V. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 s.
17. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr. 300. – P. 290–299.
18. Matysik, O. V. Solving ill-posed linear operator equations with an explicit iterative method in energetic norm / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2021. – Nr. 367. – P. 271–279.
19. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr. 416. – P. 1–12.