МАТЭМАТЫКА

УДК 517.9

Марина Геннадьевна Кот
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Marina Kot
PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor of Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modelling of the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: mtorkaylo@mail.ru

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уравнения и системы, записываемые в виде $L_0u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, возникают в разных приложениях и интенсивно изучаются. Входящее в это уравнение произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла выражению в левой части уравнения, т. е. фактически построение оператора, который соответствует данному формальному выражению. Это достигается с помощью специальных аппроксимаций оператора умножения на δ-функцию. Для исследования уравнений с δ-образными коэффициентами применяется подход, основные этапы которого: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения с помощью операторов конечного ранга; нахождение явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства; нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса, когда предельный оператор не совпадает с $-\Delta$; описание спектра построенных предельных операторов; исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов. Цель данной работы заключается в исследование асимптотического поведения аппроксимирующих семейств операторов.

Ключевые слова: *обобщенная функция; собственные значения; собственные вектор-функции, метод Ньютона; асимптотика, резонанс, оператор.*

Asymptotics of Solutions to Some Differential Equations with Delta-Shaped Coefficients

The equations can be written as $L_0u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$ there are in different applications and studied intensively. In this equation work δu not determined in the classical theory of generalized functions, so one of the main objectives is to give meaning to the expression on the left side of the equation, that is, the actual construction of the operator, which corresponds to a given formal expression. This is achieved by special approximations multiplication by δ-function. For the study of equations with δ-shaped coefficients an approach is used, the main steps of which are: the construction of approximations considered expressions with operators of finite rank; finding the explicit form approximating the resolvent family; resolvent limit of determination and allocation of cases of resonance; description of the spectrum constructed limit operators; study of the behavior of the eigenvalues of approximating operators. The purpose of this work is to study the asymptotic behavior of approximating families of operators.

Key words: *generalized function; eigenvalues; behavior of vector-functions, Newton's method; asymptotic behavior, resonance, operator.*

Введение

В ряде задач оптимального управления управляющие воздействия имеют импульсный характер и описываются с помощью δ-функций, что приводит к уравнениям, содержащим обобщенные функции.

С классической точки зрения понятие решения таких уравнений не определено, т. к. обычно у такого уравнения нет гладких решений, а при подстановке в уравнение негладкой функции появляется произведение на обобщенную функцию, которое не определено.

К этому классу относятся также стохастические дифференциальные уравнения, т. к. в них входят производные от заданных случайных процессов, которые не являются обычными функциями.

Поэтому при исследовании таких уравнений в первую очередь возникает вопрос о том, какую функцию можно считать решением уравнения.

Одним из основных подходов решения задач, связанных с невозможностью корректного определения произведения обобщенных функций, является метод введения новых объектов, которые называют новыми обобщенными функциями или мнемофункциями [1]. В этой теории основным объектом являются семейства f_ε гладких функций, зависящие от малого параметра ε, а мнемофункция есть класс эквивалентных семейств, где отношение эквивалентности задано таким образом, что на множестве классов эквивалентности корректно определена операция умножения. Мнемофункции связаны с обобщенными функциями с помощью отношения ассоциированности.

Работа посвящена исследованию одного класса систем дифференциальных уравнений с частными производными на R3, содержащих в коэффициентах δ-функцию Дирака. Это системы, символически записываемые в виде

$$-\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f, \tag{1}$$

где Δ – есть оператор Лапласа, а коэффициент *A(ε)* есть матрица, элементы которой называются константами связи.

Точечное взаимодействие описывается с помощью операторов вида $Lu = -\Delta u + q_\varepsilon u,$ где о потенциале q_ε известно лишь то, что это функция, отличная от нуля в *ε*-окрестности заданной точки при некотором малом *ε*. Такой потенциал в смысле обобщенных функций близок к $a(\varepsilon)\delta$, где $a(\varepsilon) = \int q_\varepsilon(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$. Поэтому соответствующие уравнения символически записывают в виде (1).

Выражение в левой части уравнения (l) является формальным, т. к. произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций. Определить понятие решения такого уравнения эквивалентно сопоставлению этому формальному выражению оператора в пространстве $L_2(R^3)$, что обычно нужно в квантовой механике.

Подход к интерпретации формального выражения из (l) как оператора в пространстве $L_2(R^3)$ был предложен в [2].

В данной работе задача о поведении семейств операторов, аппроксимирующих формальные выражения, рассматривается в векторном случае для систем дифференциальных уравнений вида (l). При переходе от одного уравнения к системам обычно возникают дополнительные сложности, в частности, множество расширений оператора L_0 более обширно – уже в случае системы из двух уравнений это множество зависит от четырех параметров. В связи с этим одной из целей работы является описание отличий векторного случая от скалярного. Исследование проведено с помощью аппроксимации оператора умножения на δ-функцию операторами конечного ранга.

Кроме того, в прикладных задачах встречаются аппроксимирующие операторы с конкретным малым *ε*. Поэтому представляет интерес информация о свойствах таких операторов при малых *ε*, т. е. описание асимптотического поведения апроксимирующих операторов, в частности, их собственных значений и собственных функций.

Основная часть

Рассмотрим формальные выражения

$$L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u, \tag{2}$$

соответствующие системам из двух уравнений, т. е. когда $u = (u_1, u_2)$, а коэффициент $A(\varepsilon)$ является матрицей

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} a_{11}(\varepsilon) & a_{12}(\varepsilon) \\ a_{21}(\varepsilon) & a_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Пусть φ – финитная функция из пространства Шварца $D(R^3)$ такая, что $\int \varphi(x)dx = 1$ и $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Здесь и далее рассматриваются интегралы по всему пространству R^3. Покажем, что семейство операторов

$$L_\varepsilon u = -\Delta u + A(\varepsilon)\int u(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x)$$

аппроксимирует (2); построим резольвенты $\left(L_\varepsilon - \lambda\right)^{-1}$, для описания которых введем ряд обозначений.

Пусть $R_0(\lambda)$ есть резольвента невозмущенного оператора $R_0(\lambda) = \left(-\Delta - \lambda I\right)^{-1}$. Эта резольвента действует по формуле $R_0(\lambda) f = E_\lambda * f$, где * – свертка функций, а $E_\lambda(x)$ – фундаментальное решение для оператора $-\Delta u - \lambda u$, заданное формулой

$$E_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|} e^{-\mu\|x\|},$$

где $\mu^2 = -\lambda$, $\operatorname{Re}\mu > 0$. Обозначим

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \int \left(R_0(\lambda) f_1\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$f_2 = \int \left(R_0(\lambda) f_2\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy.$$

$$b(\varepsilon, \lambda) = \int \left(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy. \tag{4}$$

$$\det A(\varepsilon) = a = a_{11}(\varepsilon)a_{22}(\varepsilon) - a_{12}(\varepsilon)a_{21}(\varepsilon),$$
$$R_0(\lambda) f = \begin{pmatrix} R_0(\lambda) f_1 \\ R_0(\lambda) f_2 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. Резольвента аппроксимирующего оператора L_ε имеет вид

$$\left(L_\varepsilon - \lambda\right)^{-1} f = R_0(\lambda) f - \left(S(\varepsilon, \lambda)\cdot F\right)\cdot\left(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\right)(x), \tag{5}$$

где матрица-функция

$$S(\varepsilon, \lambda) = \left[\left[A(\varepsilon)\right]^{-1} + b(\varepsilon, \lambda) I\right]^{-1}, \tag{6}$$

или в явном виде

$$S(\varepsilon,\lambda)=\frac{a}{1+b(\varepsilon,\lambda)(a_{22}(\varepsilon)+a_{11}(\varepsilon))+ab^2(\varepsilon,\lambda)}\begin{bmatrix}\frac{a_{11}(\varepsilon)}{a}+b(\varepsilon,\lambda) & \frac{a_{12}(\varepsilon)}{a}\\ \frac{a_{21}(\varepsilon)}{a} & \frac{a_{22}(\varepsilon)}{a}+b(\varepsilon,\lambda)\end{bmatrix}.$$

Резольвента определена, если $\lambda\notin R^{+}$, $1+b(\varepsilon,\lambda)(a_{22}(\varepsilon)+a_{11}(\varepsilon))+ab^2(\varepsilon,\lambda)\neq 0$ [3].

Далее найдем предел построенных резольвент, при этом основной задачей является нахождение матрицы

$$\lim_{\varepsilon\to 0}S(\varepsilon,\lambda):=D(\lambda) \tag{7}$$

и описание всех случаев резонанса, т. е. получение условий на матрицу коэффициентов $A(\varepsilon)$, при которых $D(\lambda)\neq 0$.

Поскольку, согласно (6) $S(\varepsilon,\lambda)=\left[F(\varepsilon,\lambda)\right]^{-1}$, где $F(\varepsilon,\lambda)$ есть заданная матрица-функция, задачу о нахождении предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[F(\varepsilon,\lambda)\right]^{-1}$$

рассмотрим в общем виде для матриц-функций $F(\varepsilon,\lambda)$ произвольной размерности. Общий подход заключается в приведении матриц-функций к нормальной диагональной форме. Пусть *Ω* есть область в *C* и *A (Ω)* – кольцо функций, аналитических в *Ω*.

Теорема 1. Для любой матрицы-функций *F* вида

$$F(\mu,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}F_k(\mu)\varepsilon^k, \tag{8}$$

где коэффициенты $F_k(\mu)$ есть матрицы с элементами из *A (Ω)*, существуют матрицы-функции $G(\mu,\varepsilon)$ и $T(\mu,\varepsilon)$, приводящие $F(\mu,\varepsilon)$ к диагональному виду:

$$G(\mu,\varepsilon)F(\mu,\varepsilon)T(\mu,\varepsilon)=diag\left\{\varepsilon^{\nu_1}f_1(\mu),\varepsilon^{\nu_2}f_2(\mu),\ldots,\varepsilon^{\nu_n}f_n(\mu)\right\},$$

где функции $f_k(\mu)$ являются элементами кольца $A\left(\Omega\right)$, полученного присоединением к $A\left(\Omega\right)$ некоторой функции вида $\frac{1}{h}, h\in A(\Omega)$.

Это позволяет дать общий ответ на вопрос о поведении при $\varepsilon\to 0$ обратных к матрицам вида

$$F_1(\mu,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^{k_0}}F(\mu,\varepsilon),$$

где $F(\mu,\varepsilon)$ имеет вид (8).

Теорема 2. Пусть нормальная форма матрицы-функции $F(\mu,\varepsilon)$ есть

$$diag\left\{\varepsilon^{\nu_1}f_1(\mu),\varepsilon^{\nu_2}f_2(\mu),\ldots,\varepsilon^{\nu_n}f_n(\mu)\right\},$$

где $\nu_1\geq\nu_2\geq\ldots\geq\nu_n$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ имеем:

1) если $k_0<\nu_1$, то $\left[F_1(\mu,\varepsilon)\right]^{-1}$ неограниченно возрастает;

2) если $k_0 = \nu_1,$ то существует конечный ненулевой предел $\left[F_1(\mu,\varepsilon)\right]^{-1};$

3) если $k_0 > \nu_1,$ то предел $\left[F_1(\mu,\varepsilon)\right]^{-1}$ равен 0.

Матрицы-функции, входящие в выражения для резольвент аппроксимирующих операторов, имеют специальный вид

$$F(\mu,\varepsilon) = R(\varepsilon) + b(\varepsilon,\mu)I,$$

где $R(\varepsilon) = \left[A(\varepsilon)\right]^{-1}$, а $b(\varepsilon,\mu)$ задана формулой (4) и допускает разложение

$$b(\varepsilon,\mu) = M_{-1}\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\mu}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \mu^{k+1}\varepsilon^k, \tag{9}$$

где $\mu^2 = -\lambda,$ $\operatorname{Re}\mu > 0$ и

$$M_k = \frac{1}{4\pi}\int\left(\int \varphi(y)\varphi(x-y)dy\right)|x|^k\,dx.$$

Задача заключается в нахождении тех матриц $R(\varepsilon),$ при которых существует ненулевой конечный предел обратных. Полученный результат зависит от вида рассматриваемой матрицы $R(\varepsilon)$ и по-разному формулируется, если разложение $R(\varepsilon)$ начинается с $\frac{1}{\varepsilon}$ и разложение начинается с $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Для каждого из этих случаев получены соотношения (условия резонанса), при которых

$$D(\mu) := \lim_{\varepsilon\to 0}\left[R(\varepsilon) + b(\varepsilon,\mu)I\right]^{-1} \neq 0.$$

Для формулировки результата рассмотрим разложение определителя по степеням ε:

$$\det F(\mu,\varepsilon) = \sum_k \Delta_k(\mu)\varepsilon^k. \tag{10}$$

Для матриц размерности два первые из функций $\Delta_k(\mu)$ выписаны в явном виде.

Теорема 3. Пусть

$$R(\varepsilon) = R^{(-1)}\frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + R^{(1)}\varepsilon + \ldots,$$

где $R^{(-1)} \neq 0.$ Резонанс имеет место в следующих случаях.

1) Если $\Delta_{-2} = 0, \Delta_{-1}(\mu) \neq 0$ и $F^{-1} \neq 0,$ то

$$D(\mu) = \frac{1}{\Delta_{-1}(\mu)}\begin{pmatrix} R_{22}^{(-1)} + M_{-1} & -R_{12}^{(-1)} \\ -R_{21}^{(-1)} & R_{11}^{(-1)} + M_{-1}\end{pmatrix} \neq 0.$$

2) Если $\Delta_{-2} = 0, \Delta_{-1} = 0, F^{-1} = 0$ и при этом $\Delta_0(\mu) \neq 0,$ то

$$D(\mu) = \frac{1}{\Delta_0(\mu)}\begin{pmatrix} R_{22}^{(0)} - \dfrac{\mu}{4\pi} & -R_{12}^{(0)} \\ -R_{21}^{(0)} & R_{11}^{(-1)} - \dfrac{\mu}{4\pi}\end{pmatrix} \neq 0.$$

Теорема 4. Пусть

$$R(\varepsilon)=R^{(-2)}\frac{1}{\varepsilon^2}+R^{(-1)}\frac{1}{\varepsilon}+R^{(0)}+\ldots,$$

где $R^{(-2)}\neq 0.$ Резонанс имеет место только при условиях

$$\Delta_{-4}=0,\Delta_{-3}=0,\Delta_{-2}(\mu)\neq 0,$$

и тогда

$$D(\mu)=\frac{1}{\Delta_{-2}(\mu)}\begin{pmatrix} R_{22}^{(-2)} & -R_{12}^{(-2)} \\ -R_{21}^{(-2)} & R_{11}^{(-2)} \end{pmatrix}\neq 0.$$

Для перехода от условий на матрицы $R(\varepsilon)$ к условиям на исходные матрицы коэффициентов $A(\varepsilon)$ построим их разложения в зависимости от вида $R(\varepsilon)$. Обнаружено существенное отличие от скалярного случая, заключающееся в том, что в скалярном случае условия резонанса могут быть выполнены только для коэффициентов вида $a(\varepsilon)=a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+\ldots,$ а в векторном случае условия резонанса могут быть выполнены, когда $A(\varepsilon)$ имеет конечный предел или даже стремится к бесконечности при $\varepsilon\to 0.$

Далее детально рассмотрим случай, когда коэффициент $A(\varepsilon)$ имеет вид

$$A(\varepsilon)=\begin{pmatrix} 0 & a_{12}(\varepsilon) \\ a_{21}(\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Специальный вид матрицы коэффициентов соответствует тому, что в рассматриваемой системе вторая компонента воздействует на первую, а первая воздействует на вторую. Пусть

$$\frac{1}{a_{12}(\varepsilon)}=k_{-2}^1\frac{1}{\varepsilon^2}+k_{-1}^1\frac{1}{\varepsilon}+k_0^1+\mathrm{o}(1),$$

$$\frac{1}{a_{21}(\varepsilon)}=k_{-2}^2\frac{1}{\varepsilon^2}+k_{-1}^2\frac{1}{\varepsilon}+k_0^2+\mathrm{o}(1). \tag{12}$$

Теорема 5. Если для матрицы коэффициентов выполнено (12), то предел $D(\lambda)$ может быть конечным и ненулевым только в трех следующих случаях.

1) $k_{-2}^1=0, k_{-1}^1=0,$ т.е. $\dfrac{1}{a_{12}(\varepsilon)}=k_0^1+\mathrm{o}(1).$

Тогда, если $k_0^1k_{-2}^2-M_{-1}{}^2\neq 0,$ то

$$D(\mu)=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{k_{-2}^2}{k_0^1k_{-2}^2-M_{-1}{}^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и предел резольвент есть

$$R(\lambda)=R_0(\lambda)f-\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{k_{-2}^2}{k_0^1k_{-2}^2-M_{-1}{}^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0^1(0) \\ u_0^2(0) \end{pmatrix}\cdot E(\lambda).$$

2) $k_{-2}^1=0, k_{-2}^2=0$, т. е.

$$\frac{1}{a_{12}(\varepsilon)}=k_{-1}^1\frac{1}{\varepsilon}+k_0^1+k_1^1\varepsilon+o(\varepsilon),\ \ \frac{1}{a_{21}(\varepsilon)}=k_{-1}^2\frac{1}{\varepsilon}+k_0^2+k_1^2\varepsilon+o(\varepsilon),$$

и при этом выполнено условие резонанса $k_{-1}^1k_{-1}^2=M_{-1}{}^2$.
Тогда

$$D(\mu)=\frac{1}{k_{-1}^1k_0^2+k_0^1k_{-1}^2+\dfrac{M_{-1}\mu}{2\pi}}\begin{pmatrix} M_{-1} & k_{-1}^2 \\ k_{-1}^1 & M_{-1}\end{pmatrix}$$

и предел резольвент есть

$$R(\lambda)=R_0(\lambda)f-\frac{1}{k_{-1}^1k_0^2+k_0^1k_{-1}^2+\dfrac{M_{-1}\mu}{2\pi}}\begin{pmatrix} M_{-1} & k_{-1}^2 \\ k_{-1}^1 & M_{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0^1(0) \\ u_0^2(0)\end{pmatrix}\cdot E(\lambda).$$

3) $k_{-2}^2=0, k_{-1}^2=0,$ т. е.

$$\frac{1}{a_{21}(\varepsilon)}=k_0^2+o(1).$$

Тогда, если $k_0^2k_{-2}^1-M_{-1}{}^2\neq 0$, то

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{k_{-2}^1}{k_0^2k_{-2}^1-M_{-1}{}^2}\end{pmatrix}$$

и предел резольвент есть

$$R(\lambda)=R_0(\lambda)f-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{k_{-2}^1}{k_0^2k_{-2}^1-M_{-1}{}^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0^1(0) \\ u_0^2(0)\end{pmatrix}\cdot E(\lambda).$$

Исследуем поведение собственных значений аппроксимирующих операторов L_ε при $\varepsilon\to 0$. Эти собственные значения определяются как неявные функции из уравнения

$$f(\varepsilon,\lambda):=\frac{1}{a_{12}(\varepsilon)a_{21}(\varepsilon)}-b^2(\varepsilon,\lambda)=0, \tag{13}$$

где $b(\varepsilon,\lambda)$ зависит от способа аппроксимации. Здесь левая часть $f(\varepsilon,\lambda)$ есть аналитическая функция от ε,μ при $\varepsilon\neq 0$. Уравнение (13) устанавливает связь между способом аппроксимации и поведением коэффициентов и задает зависимость собственных значений от ε.

У уравнений вида (13), как правило, имеется несколько гладких ветвей решений. Задача заключается в описании поведения этих ветвей в зависимости от выбранных коэффициентов и выбранной функции φ. Проанализируем уравнение (13) с помощью диаграмм Ньютона, соответствующих рассматриваемым функциям $f(\varepsilon,\lambda)$.

Диаграмма Ньютона строится по функции $f(x,y)$, допускающей разложение

$$f(x,y)=\sum c_{kj}x^k y^j.$$

В методе Ньютона ветви решений уравнения $f(x,y)=0$ строятся с помощью граней из диаграммы Ньютона.

Обнаружено, что разным случаям резонанса соответствуют разные диаграммы Ньютона для функций $f(\varepsilon,\lambda)$ из (13) и, соответственно, разные поведения собственных значений.

Наиболее интересным является второй случай резонанса (рисунок 1), когда $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^{\ 2}$.

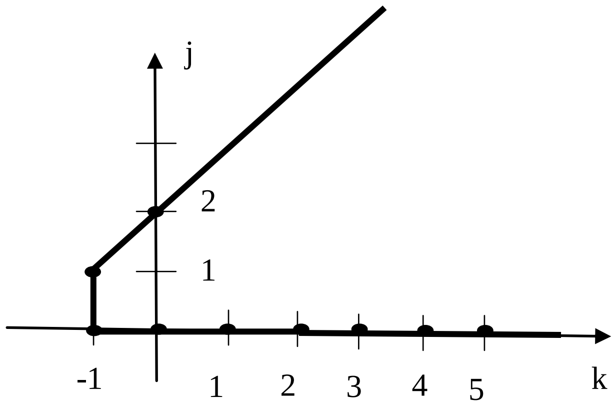

Рисунок 1. – Диаграмма Ньютона для уравнения (13) в случае второго резонанса

Здесь диаграмма Ньютона содержит вертикальный отрезок и наклонную полупрямую, что позволяет получить следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть

$$\frac{1}{a_{12}(\varepsilon)}=k_{-1}^1\frac{1}{\varepsilon}+k_0^1+k_1^1\varepsilon+o(\varepsilon),$$
$$\frac{1}{a_{21}(\varepsilon)}=k_{-1}^2\frac{1}{\varepsilon}+k_0^2+k_1^2\varepsilon+o(\varepsilon)$$

и выполнено условие резонанса $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^{\ 2}$. Тогда существует одна ветвь собственных значений $\lambda_0(\varepsilon)$, имеющая конечный предел $\lambda_0=-\mu_0^2$, где

$$\mu_0=\frac{-2\pi\left(k_{-1}^1 k_0^2+k_0^1 k_{-1}^2\right)}{M_{-1}}.$$

Остальные ветви решений, если они существуют, уходят в бесконечность со скоростью $\frac{1}{\varepsilon}$ [4].

Это согласовано с тем, что в этом случае резонанса предельный оператор имеет одно собственное значение.

В общем случае (рисунок 2) у диаграммы Ньютона таких отрезков или полупрямых не существует, что соответствует тому, что при малых ε оператор L_ε не имеет собственных значений.

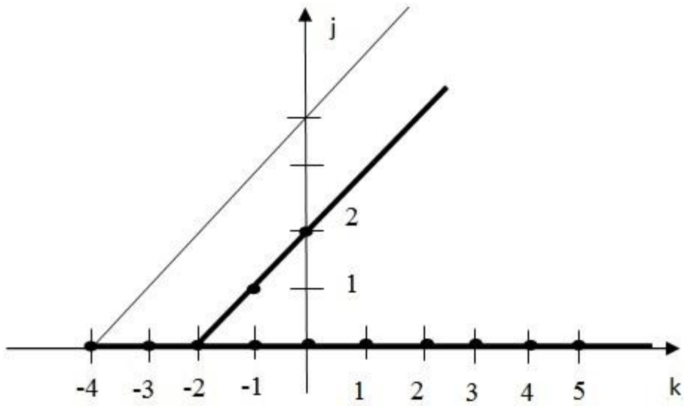

Рисунок 2. – Диаграмма Ньютона для уравнения (13) в общем случае

Таким образом, различие в виде диаграмм в разных случаях резонанса приводит к различному поведению собственных значений.

Каждой из ветвей $\lambda_j(\varepsilon)$ решений уравнения (13) соответствует семейство собственных вектор-функций. Собственные вектор-функции при фиксированном ε есть ненулевые решения системы

$$-\Delta u_1 - \lambda_j(\varepsilon)u_1 + a_{12}(\varepsilon)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x) = 0,$$
$$-\Delta u_2 - \lambda_j(\varepsilon)u_2 + a_{21}(\varepsilon)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x) = 0.$$

Решения этой системы, имеющие в $L_2(R^3, C^2)$ норму 1 при всех ε, строятся в явном виде:

$$v_1(x,\varepsilon) = \frac{-a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon))(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon)(x)}{\sqrt{\left[1+(a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon)))^2\right]\int\left[(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon)(x)\right]^2 dx}},$$
$$v_2(x,\varepsilon) = \frac{(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon)(x)}{\sqrt{\left[1+(a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon)))^2\right]\int\left[(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon)(x)\right]^2 dx}}. \qquad (14)$$

Поведение семейства функций $(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon)(x)$ и выражений $a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda_j(\varepsilon))$ зависит от поведения ветви $\lambda_j(\varepsilon)$ и от поведения коэффициента $a_{12}(\varepsilon)$. В соответствии с описанными выше качественно различными случаями поведения $\lambda_j(\varepsilon)$ получаем разные описания асимптотического поведения собственных вектор-функций (14).

Самый содержательный результат получается в случае второго резонанса, когда одна из ветвей имеет конечный предел, а остальные стремятся к бесконечности.

Теорема 7. Пусть

$$\frac{1}{a_{12}(\varepsilon)} = k_{-1}^1\frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + k_1^1\varepsilon + o(\varepsilon),$$
$$\frac{1}{a_{21}(\varepsilon)} = k_{-1}^2\frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + k_1^2\varepsilon + o(\varepsilon),$$

выполнено условие резонанса $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^{\ 2}$ и $\lambda_0(\varepsilon)$ есть ветвь собственных значений, имеющая конечный предел $\lambda_0(0) = -\mu_0^2$, где

$$\mu_0 = \frac{-2\pi\left(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2\right)}{M_{-1}}.$$

Если $-\mu_0^2$ не лежит на положительной полуоси, то семейство собственных вектор-функций (14) при $\varepsilon \to 0$ сходится к вектор-функции

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = C\frac{1}{4\pi\|x\|}e^{-\mu_0\|x\|}\begin{pmatrix} \dfrac{a_1^1 M_{-1}}{\sqrt{1+\left[a_1^1 M_{-1}\right]^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\left[a_1^1 M_{-1}\right]^2}} \end{pmatrix}, C = \left\|\frac{e^{-\mu_0\|x\|}}{4\pi\|x\|}\right\|^{-1}, \tag{15}$$

которая является собственной вектор-функцией предельного оператора.

Для всех других ветвей собственных значений предел семейства нормированных собственных вектор-функций не существует.

Теорема 8. Пусть

$$\frac{1}{a_{12}(\varepsilon)} = k_{-1}^1\frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + k_1^1\varepsilon + o(\varepsilon),$$
$$\frac{1}{a_{21}(\varepsilon)} = k_{-1}^2\frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + k_1^2\varepsilon + o(\varepsilon),$$

выполнено условие резонанса

$$k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^{\ 2}$$

и $\lambda_j(\varepsilon)$ есть одна из ветвей собственных значений, стремящихся к бесконечности. Тогда при $\varepsilon \to 0$ нормированное семейство собственных вектор-функций сходится почти всюду и слабо к нулю и, следовательно, не имеет предела в пространстве L_2.

Заключение

Таким образом, найден явный вид предела в смысле резольвентной сходимости семейства операторов, аппроксимирующего формальное выражение с δ-образными коэффициентами, получены условия резонанса, выявлены отличия от скалярного случая.

Получен общий вид условий резонанса для семейства матриц-функций, зависящих от двух переменных, на основе приведения их к нормальной форме.

Кроме того, описано асимптотическое поведение собственных значений и вектор-функций для различных случаев резонанса. В частности, показано, что непрерывная ветвь собственных значений может иметь конечный предел только в том случае, если предельный оператор имеет собственные значения, а собственные функции, соответствующие ветвям, уходящим в бесконечность, слабо сходятся к нулю и при этом не имеют предела в смысле сходимости по норме [4].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио [и др.]. – М. : Мир, 1991. – 566 с.

2. Березин, Ф. А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5. – С. 1011–1014.

3. Кот, М. Г. О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений с δ-образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вестн. БГУ. Физика. Математика. Информатика. – 2015. – № 1. – С. 111–117.

4. Кот, М. Г. Асимптотика собственных вектор-функций операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ-образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 3. – С. 15–26.

5. Романчук, Т. А. Явление резонанса для матрично-значных функций / Т. А. Романчук // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 8–16.

6. Антоневич, А. Б. Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами / А. Б. Антоневич, Т. А. Романчук // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: Е. А. Ровба [и др.]. – Гродно, 2008. – С. 11–28.

7. Антоневич, А. Б. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций / А. Б. Антоневич, Т. А. Романчук. – Саарбрюккен, 2012. – 142 с.

8. Кащенко, И. С. Асимптотическое разложение решений уравнений : метод указания / И. С. Кащенко. – Ярославль : ЯрГУ, 2011. – 44 с.

9. Васильев, В. А. Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума / В. А. Васильев // Функцион. анализ и его прил. – 1977. – Т. 11, вып. 3. – С. 1–11.

10. Забрейко, П. П. Диаграммы Ньютона и алгебраические кривые / П. П. Забрейко, А. В. Кривко-Красько // Тр. ин-та математики НАН Беларуси. – 2014. – Т. 22, № 2. – С. 32–45.

11. Забрейко, П. П. Диаграммы Ньютона и алгебраические кривые. II / П. П. Забрейко, А. В. Кривко-Красько // Тр. ин-та математики НАН Беларуси. – 2015. – Т. 23, № 1. – С. 64–75.

REFERENCES

1. Rieshajemyje modeli v kvantovoj miekhanikie / S. Al’beverio [i dr.]. – M. : Mir, 1991. – 556 s.

2. Bieriezin, F. A. Zamiechanije ob uravnienii Shredingiera s singuliarnym potencialom / F. A. Bieriezin, L. D. Faddiejev // Dokl. AN SSSR. – 1961. – T. 137, № 5. – S. 1011–1014.

3. Kot, M. G. O riezol’vientnoj skhodimosti opieratorov, approksimirujushchikh sistiemu uravnienij s δ-obraznymi koefficijentami / M. G. Kot // Viestn. BGU. Fizika. Matiematika. Informatika. – 2015. – № 1. – S. 111–117.

4. Kot, M. G. Asimptotika sobstviennykh viektor-funkcij opieratorov, approksimirujushchikh diffieriencial’nyje uravnienija s δ-obraznymi koefficijentami / M. G. Kot // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2017. – № 3. – S. 15–26.

5. Romanchuk, T. A. Javlienije riezonansa dlia matrichno-znachnykh funkcij / T. A. Romanchuk // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2008. – № 2. – S. 8–16.

6. Antonievich, A. B. Approksimacii opieratorov s delta-obraznymi koefficijentami / A. B. Antonievich, T. A. Romanchuk // Aktual’nyje probliemy matiematiki : sb. nauch. tr. GrGU im. Ya. Kupaly ; riedkol.: Ye. A. Rovba [i dr.]. – Grodno, 2008. – S. 11–28

7. Antonievich, A. B. Uravnienija s delta-obraznymi koefficijentami: mietod koniechno-miernyh approksimacij / A. B. Antonievich, T. A. Romanchuk. – Saarbriukkien, 2012. – 142 s.

8. Kashchienko, I. S. Asimptotichieskoje razlozhenije rieshenij uravnienij : mietod. ukazanija / I. S. Kashchienko. – Yaroslavl' : YarGU, 2011. – 44 s.

9. Vasil'jev, V. A. Asimptotika eksponencial'nykh integralov, diagramma N'jutona i klassifikacija tochiek minimuma // Funkcion. analiz i jego pril. – 1977. – T. 11, vyp. 3. – S. 1–11.

10. Zabriejko, P. P. Diagrammy N'jutona i algiebraicheskie krivyje / P. P. Zabriejko, A. V. Krivko-Kras'ko // Tr. in-ta matiematiki NAN Bielarusi. – 2014. – T. 22, № 2. – S. 32–45.

10. Zabriejko, P. P. Diagrammy N'jutona i algiebraicheskie krivyje. II / P. P. Zabriejko, A. V. Krivko-Kras'ko // Tr. in-ta matiematiki NAN Bielarusi. – 2015. – T. 23, № 1. – S. 64–75.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 31.10.2022