

УДК 669.2/8:620

**В. С. Савенко<sup>1</sup>, Н. В. Степанев<sup>2</sup>**<sup>1</sup>д-р техн. наук, проф., зав. каф. физики и математики

Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина

<sup>2</sup>магистрант физико-инженерного факультета

Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина

e-mail: [savenko-vl@rambler.ru](mailto:savenko-vl@rambler.ru)<sup>1</sup>

## РАСЧЕТ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ ФАКТОРОВ И ИХ ГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА МАТЛАВ

*Исследованы физические условия создания пондеромоторных эффектов при электропластической деформации для получения материалов с комплексом высоких физико-механических и служебных характеристик. Показано, что в условиях электропластичности реализация оптимальных значений пондеромоторных факторов достигается при частотах, когда магнитное поле не успевает существенно проникать в материал, при этом скорость диффузии будет зависеть как от проводимости металла, так и частоты тока. С ростом частоты следования импульсов тока магнитное и электрическое поля смещаются к поверхности образца, а с увеличением радиуса образца наблюдается рост напряженности магнитного поля и уменьшение плотности тока.*

### Введение

Перспективным направлением развития физики твердого тела и физического материаловедения в настоящее время является создание высокоинтенсивных технологий для получения материалов с комплексом высоких физико-механических и служебных характеристик.

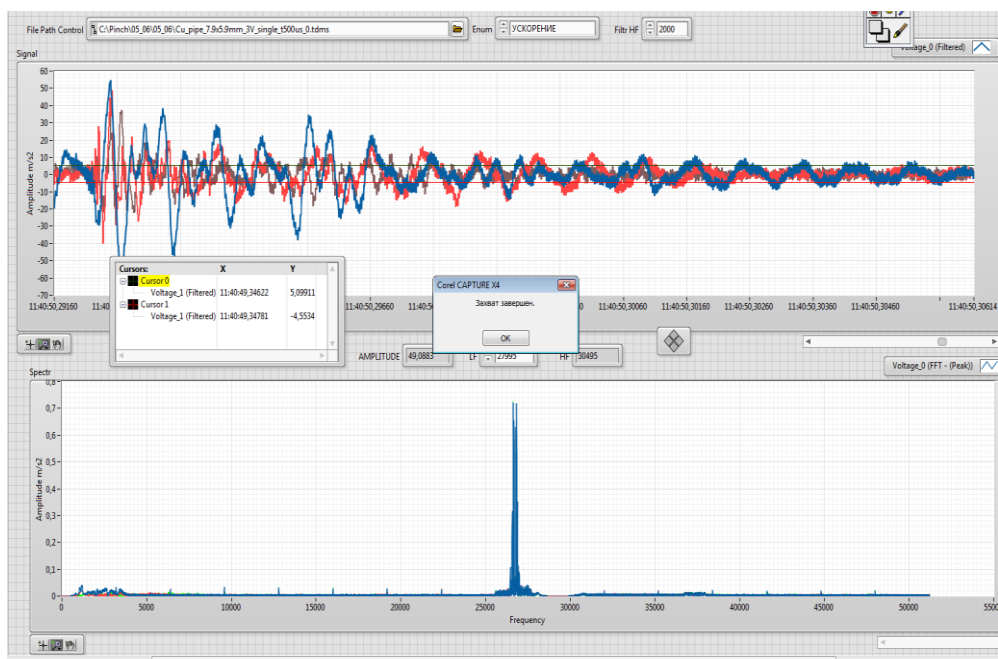
Один из наиболее эффективных подходов для решения данной задачи реализуется при электронно-пластической деформации (ЭПД) металлов при возбуждении их электронной подсистемы высокоэнергетическими воздействиями с целью программированного управления деформационными процессами.

Импульсный ток большой плотности, пропущенный через металл во время деформации выше предела текучести, вызывает ЭПД в том числе за счет пондеромоторных эффектов, которые обуславливают дополнительные механические напряжения ионного остова кристаллической решетки металла.

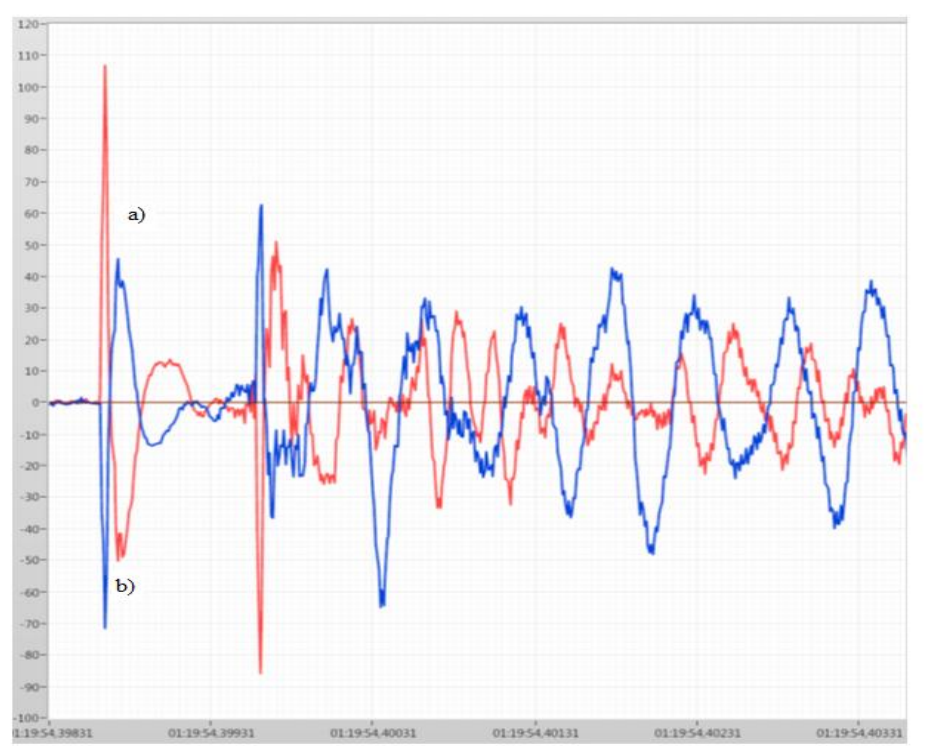
В зоне деформации с периодичностью подачи импульсов тока на фронте их нарастания создается ультразвуковая вибрация, которая активно влияет на кинетику пластической деформации, модифицируя служебные характеристики материала (рисунки 1) [1–3].

Электропластичность в нагруженном проводящем материале в зоне деформации обуславливает перераспределение плотности носителей по сечению проводника от равномерного при отсутствии тока к максимальному на поверхности в начале импульса с последующим переходом к максимуму на оси образца с одновременным возбуждением импульсов ускорения в радиальном и осевом направлениях. На рисунке 2 показано ускорение для импульса тока длительностью 1 мсек с полосой частот 2–20 кГц.

В научно-прикладном аспекте необходимо рассчитывать и моделировать с помощью математических программ и графических изображений физические условия создания пондеромоторных факторов применительно к конкретным технически важным материалам в условиях деформирования статическими, динамическими и знакопеременными нагрузками.



**Рисунок 1. – Переходные процессы ультразвуковой вибрации от действия импульсов тока в условиях деформации выше предела текучести**



**Рисунок 2. – Импульсы ускорения в радиальном и осевом направлениях при периодическом возбуждении импульса тока: а) осевое; б) радиальное**

Наиболее подходящим для этих целей является математический пакет MatLab – один из используемых вычислительных средств, имеющих собственный язык программирования, применяемый во многих областях науки и являющийся предпочтительным для расчетов и графических изображений в моделировании физических процессов.

В пакете MatLab важная роль отводится специальным подпрограммам – Toolboxes, которые служат эффективным средством для решения различного рода линейных и нелинейных дифференциальных уравнений для физических периодических процессов, а также для системных дифференциальных уравнений в частных производных с большим числом переменных, что позволяет визуализировать процессы, происходящие во времени и пространстве с использованием функции plot3.

### Основные результаты

Электропластическая деформация проводящих материалов вызывает ряд факторов вторичного силового действия импульсного тока большой плотности, создающего в деформационной зоне, которая находится под механическим напряжением выше предела текучести, пондеромоторные пинч- и скин-эффекты за счет влияния собственного магнитного поля тока и поляризации электронной подсистемы металла с созданием поперечного электрического поля Холла, препятствующего дальнейшему сжатию электронной плазмы.

Механизм пинч-эффекта заключается в появлении вокруг образца с током кольцевых линий собственного магнитного поля и поперечного поля Холла, действующего на движущиеся заряды электронной плазмы в поперечном направлении и смещающего их к оси проводника.

Воздействие собственного магнитного поля тока обуславливает поляризацию электронной плазмы металла и, как следствие, появление поперечного электрического поля Холла [5–8].

Пусть  $H_m(x, t)$  – собственное магнитное поле в образце. Рассмотрим уравнение вида:

$$H_m(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', t) f(x') dx', \quad (1)$$

где  $G(x, x', t) = (4\pi Dt)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x' - x)^2}{4Dt}\right]$ .

Перепишем (1) в виде:

$$H_m(x, t) = (4\pi Dt)^{-1/2} \int_0^{\infty} \left\{ f(x') \exp\left[-\frac{(x' - x)^2}{4Dt}\right] + f(-x') \exp\left[-\frac{(x' + x)^2}{4Dt}\right] \right\} dx'. \quad (2)$$

Удовлетворяя граничному условию, будем иметь:

$$H_m(0, t) = (4\pi Dt)^{-1/2} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{x'^2}{4Dt}\right] \cdot \{f(x') - f(-x')\} dx' \quad . \quad (3)$$

Условие будет выполнено, если  $f(-x') = -f(x')$  ( $0 \leq x' \leq \infty$ ).

Подставим (3) с учетом условия в (2) и получим:

$$H_m(x,t) = (4\pi Dt)^{-1/2} \int_0^\infty f(x') \left\{ \exp\left[-\frac{(x'-x)^2}{4Dt}\right] - \exp\left[-\frac{(x'+x)^2}{4Dt}\right] \right\} dx'. \quad (4)$$

Подставим (3) в (4):

$$H_m(x,t) = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(x'-x)^2}{4Dt}\right] - \exp\left[-\frac{(x'+x)^2}{4Dt}\right] \right\} dx'. \quad (5)$$

Разобьем интеграл на два слагаемых и введем новые переменные интегрирования:

$$\alpha = \frac{x' - x}{\sqrt{4Dt}}, \quad \beta = \frac{x' + x}{\sqrt{4Dt}}. \quad (6)$$

Получим:

$$\begin{aligned} H_m(x,t) &= \frac{H_0}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{-\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha - \int_{-\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \right] = \\ &= \frac{H_0}{\sqrt{\pi}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}}{\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{2H_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}} e^{-\alpha^2} \end{aligned}$$

или

$$H_m(x,t) = H_0 \theta\left(\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}\right), \quad (7)$$

где  $\theta(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$ .

Тогда (7) – вещественное магнитное поле в образце.

Напряженность собственного магнитного поля  $\vec{H}$ . Пусть  $r$  – сечение образца, в котором определяется напряженность поля. Выделим элементарный участок  $d\vec{l}$  и положим, что для всех элементарных участков импульсный ток имеет одно значение, т. е. полная напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} I \int \frac{\sin \alpha}{r^2} d\vec{l}. \quad (8)$$

Из (8) следует

$$\frac{d\vec{l}}{r^2} = \frac{d\vec{\alpha}}{r \sin \alpha}. \quad (9)$$

Учтем, что  $r \sin \alpha = R$ , получим:

$$\frac{d\vec{l}}{r^2} = \frac{d\vec{\alpha}}{R}. \quad (10)$$

Подставим в (10) формулу (9) и перейдем к интегрированию по углу  $\alpha$  в пределах от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ :

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha}{R} d\vec{\alpha} = \frac{1}{4\pi R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\vec{\alpha} = -\frac{1}{4\pi R} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (11)$$

Тогда

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi R} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (12)$$

Электромагнитное поле для статики описывается системой уравнений Максвелла, законом Ома и уравнениями связи, т. к. ток изменяется по гармоническому закону. Учтем, что ток  $i = \int \vec{j} dS$  и  $H$  изменяются по гармоническому закону:

$$H = \int dH_r. \quad (13)$$

Согласно (13),

$$dH_r = dH \cos \theta = \frac{R}{r} dH. \quad (14)$$

Используя закон Био – Савара – Лапласа, получим:

$$dH = \frac{Idl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (15)$$

или

$$dH_r = \frac{IRdl}{4\pi r^3}. \quad (16)$$

Подставим последнее выражение в формулу (15):

$$\vec{H}_0 = \frac{IR}{4\pi r^3} \int d\vec{l} = \frac{IRdl}{4\pi r^3}. \quad (17)$$

Если подставить (17) в (7), то значение напряженности магнитного поля в образце будет равно:

$$\vec{H} = \frac{IRdl}{4\pi r^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\vec{\alpha} \left( \frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}} \right). \quad (18)$$

Расчет плотности тока  $j$  в образце проведен для случая, когда импульсный ток в образце имеет только одну составляющую  $A_x(y,z)$ ,  $I_y = 0$ ,  $I_z = 0$ .

Тогда можно использовать решения для потенциала собственного магнитного поля в трех областях.

Для верхней:

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-\lambda|z-h|} + \vec{j}_1 e^{-\lambda|z+h|} \right) \frac{e^{2j\lambda y}}{\lambda} d\lambda. \quad (19)$$

Для второй области:

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0 \mu_2 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{q_2 z} + \vec{j}_2 e^{-q_2 z} \right) \frac{e^{\lambda(2jy-h)}}{\lambda} d\lambda. \quad (20)$$

Для нижней:

$$\vec{A}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{j}_3 \frac{e^{\lambda(2jy+z-h)}}{\lambda} d\lambda. \quad (21)$$

Решение уравнений (19–21) возможно с учетом:

$$k^2 = -J\sigma\omega\mu\mu_0; \quad q^2 = \lambda^2 - k^2 \quad (22)$$

$$\vec{j}_1 = \frac{(\lambda^2 \mu_2^2 - q_2^2)(e^{q_2 T} - e^{-q_2 T})}{(\lambda \mu_2 + q_2)^2 e^{q_2 T} - (\lambda \mu_2 - q_2)^2 e^{-q_2 T}}, \quad (23)$$

$$\vec{j}_2 = \frac{2q_2(q_2 - \lambda \mu_2)e^{-q_2 T} + 2q_2(q_2 + \lambda \mu_2)e^{q_2 T}}{(\lambda \mu_2 + q_2)^2 e^{q_2 T} - (\lambda \mu_2 - q_2)^2 e^{-q_2 T}}, \quad (24)$$

$$\vec{j}_3 = \frac{4\lambda q_2 \mu_2 e^{\lambda T}}{(\lambda \mu_2 + q_2)^2 e^{q_2 T} - (\lambda \mu_2 - q_2)^2 e^{-q_2 T}}. \quad (25)$$

Плотность токов можно определить через потенциал:

$$\vec{j} = -J\sigma\omega A_2. \quad (26)$$

Как видно из уравнений (19–26), основными параметрами, определяющими формирование токов, являются магнитная проницаемость, электрическая проводимость материала образца и частота тока.

Расчет в математическом пакете MatLab с исходными данными для поставленной задачи (рисунки 3).

```

1      % исходные данные
2      c = 3*10^10;           % см/с, электродинамическая постоянная
3      si = 3.7*10^7;        % Ом/м, удельная проводимость алюминия
4      m = 1.2566*10^(-6);   % Н/А^2, магнитная постоянная для алюминия
5      j = 10^3;             % А/мм^2, плотность тока
6      S = 4;                % мм^2, площадь поперечного сечения проводника
7      r1 = 0.4;             % мм, радиус образца #1
8      r2 = 1.9;            % мм, радиус образца #2
9      t = 10^(-4);         % с, длительность импульсов тока
10     w1 = 500;             % Гц, частота следования импульсов #1
11     w2 = 700;            % Гц, частота следования импульсов #2
12     w3 = 900;            % Гц, частота следования импульсов #3
13     DM                    % коэффициент магнитной диффузии
14     Hz(x,t)               % значение магнитного поля в образце

```

Рисунок 3. – Исходные данные для решения задачи

Рассмотрим уравнение, которое согласуется с уравнением диффузии, выбрав проекцию на ось  $Z$  (рисунок 4). Т. к. поле вне образца изменяется по гармоническому закону, следующая  $Z$ -проекция магнитного поля образца будет на границе при  $x = 0$ . Гармоническая зависимость определяет скин-эффект в стационарном состоянии.

```

16     while diff(n)/diff(t)=D*laplace^2*n
17     for i=1:n
18         diff(H)/diff(t)=(c^2./4*pi*si*m).*laplace^2*H;
19         for j=1:n
20             while DM=(c^2)/(4*pi*si*m)
21                 if (i==j)
22                     diff(Hz)/diff(t)=DM.*(diff^2)*Hz./diff(x^2);
23                 end
24             end
25         end;
26         x=0;
27         for i=1:n
28             Hz(0,t)=Ho.*cos(wt);
29         end;

```

Рисунок 4. – Постановка исходной задачи

Поскольку уравнение линейно и содержит вещественные коэффициенты, то его можно упростить, перейдя к комплексной записи, и искать решение другой вспомогательной задачи с заменой  $\cos(\omega t)$  на комплексную экспоненту. Решение исходной задачи с вещественным полем можно получить из решения вспомогательной задачи с комплексным полем путем отделения вещественной части.

```

31 x=0;
32 while cos(wt)
33     for i=1:n
34         Hz(0,t)=Ho.*exp^-(iwt);
35     end;
36 end;
37 max=x;
38 for i=1:n
39     for x=1:n
40         Hz(x,t)=H(x).*exp^-(iwt);
41     end
42 end;
43 for i=1:n
44     if max=x
45         (diff^2 *H) ./ (diff(x^2)) = -(2*i) ./ (bi^2) *H;
46     end
47 end;
    
```

Рисунок 5. – Решение исходной задачи с вещественным полем

Т. к. магнитное поле вне образца пропорционально  $e^{-i\omega t}$ , то решение вспомогательной задачи следует искать в виде, показанном на рисунке 5. Подставляя эту зависимость в уравнение с частными производными, можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение. Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами находится в виде суммы экспонент  $Ae^{ikx}$  с постоянными коэффициентами  $A$  и  $k^2$ . Коэффициент  $k$  находится подстановкой  $e^{ikx}$  в исходное уравнение. Получившееся алгебраическое уравнение  $k^2 = \frac{2i}{\delta^2}$  имеет два корня  $k_{\pm} = \frac{1+i}{\delta}$ :  $k_+$  отвечает убывающему, а  $k_-$  – нарастающему

вглубь образца (при  $x \rightarrow \infty$ ) переменному магнитному полю. Нарастающее к оси образца магнитное поле следует опустить, т. к. оно отвечает бессмысленному увеличению магнитного поля вплоть до бесконечного значения при удалении от источника.

Таким образом, внутри проводника решение вспомогательной задачи имеет вид, как показано на рисунке 6.

```

51 e=0.001;
52 x=[0,inf];
53 for k=1:n
54     for i=k+1:n
55         x=A(i,k)/a(k,k);
56         for j=k:n
57             A(i,j)=A(i,j)-x*A(k,j);
58         end
59         if A(i,j)~=0
60             Hz(x,t)=A.*exp^-(1-i). *x/bi) .*exp^-(iwt);
61         end
62     end
    
```

Рисунок 6. – Решение вспомогательной задачи с вещественным полем

Коэффициент  $A$  можно найти из условия непрерывности тангенциальной проекции напряженности магнитного поля на границе образца при  $x = 0$ .

Поскольку вне проводника при  $x = 0$  напряженность магнитного поля изменяется по закону  $H_z(0, t) = H_0 e^{-i\omega t}$ , заключаем, что  $A = H_0$ . Определяя вещественную часть комплексной функции, найдем вещественное магнитное поле в образце (рисунок 7).

```

Editor - D:\RAS4ET_MP.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
x=0;
Hz(0,t)=Ho.*exp^(-iwt);
A=Ho;
e=0.001;
for i=n-1:(-1):1
    for j=i+1:n
        if A(i,j)~=0
            Hz(x,t)=Ho.*exp^(-(1-i).*x/bi).*exp^(-iwt);
        end
    end
    Hz(0,t)=Ho.*exp^(-x/bi).*cos(w.*t-(x./bi));
end
script Ln 29 Col 5 OVR

```

Рисунок 7. – Нахождение вещественного магнитного поля  $H_z$

Как видно из графических изображений (рисунок 8), в образце деформационного алюминия наблюдается изменение магнитного поля, причем при перемещении от центра к поверхности образца напряженность магнитного поля увеличивается и достигает значения 225 Э, на расстоянии в 1 мм от центра поперечного сечения образца напряженность магнитного поля принимает наибольшее значение в 25 Э.

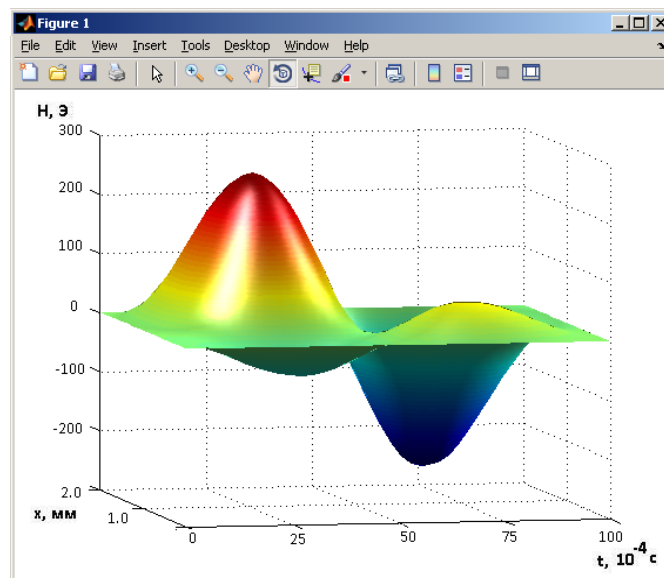
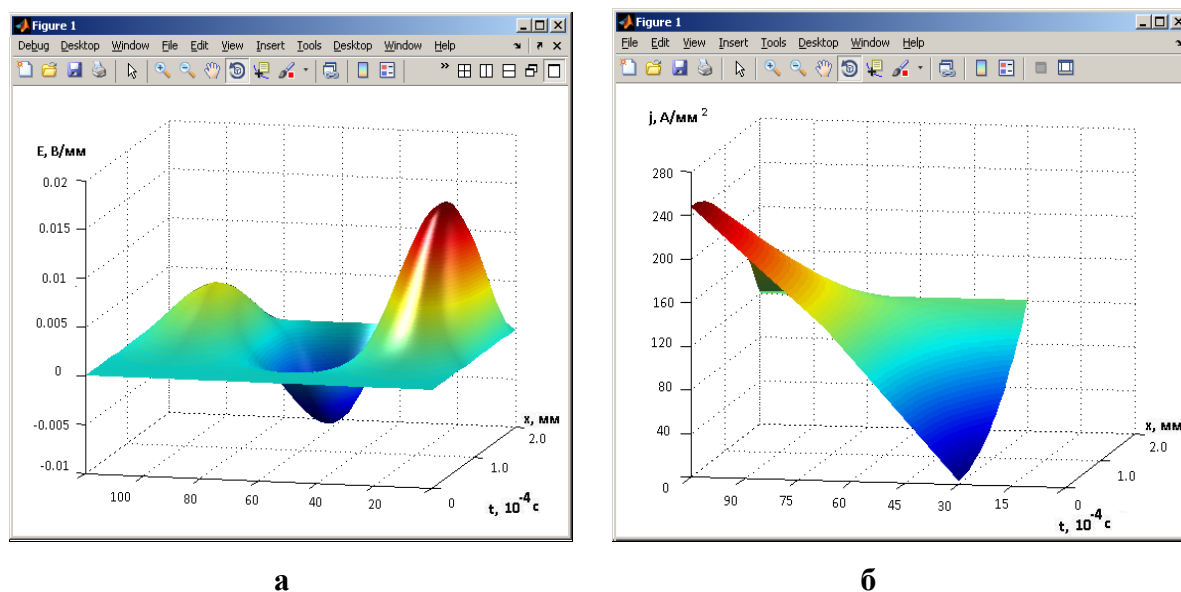


Рисунок 8. – Изменение магнитного поля в образце

Построение графических изображений распределения электрического поля и плотности электрического тока при вторичных пондеромоторных факторах в явлении электропластичности (рисунки 9а, 9б) показали, что напряженность электрического поля изменяется от оси к стенкам и достигает максимального значения 0,025 В/мм, на расстоянии в 1 мм от центра поперечного сечения образца напряженность электрического поля принимает значение в 0,01 В/мм. Плотность тока будет также неравномерно распределяться по сечению образца. Как видно из рисунка 9б, при перемещении от центра к поверхности образца плотность тока увеличивается и достигает максимального значения 320 А/мм<sup>2</sup>.



**Рисунок 9. – Электрическое поле и плотность тока:**  
**а – распределение электрического поля; б – плотности тока в образце**

### Заключение

Рассмотрены физические условия создания пондеромоторных эффектов при электропластической деформации проводящих материалов. Импульсный ток большой плотности, пропущенный через зону деформации, обуславливает виброакустические колебания кристаллической решетки в различных направлениях и дополнительные деформационные напряжения. В условиях электропластичности реализация оптимальных значений пондеромоторных факторов достигается при частотах, когда магнитное поле не успевает существенно проникать в материал, при этом скорость диффузии будет зависеть как от проводимости металла, так и частоты тока. С ростом частоты следования импульсов тока магнитное и электрическое поля смещаются к поверхности образца, а с увеличением радиуса образца наблюдается рост напряженности магнитного поля и уменьшение плотности тока. При одной и той же геометрии образцов пинч-эффект выражен сильнее на материале с более высокой электропроводностью.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савенко, В. С. Вклад пондеромоторных факторов в реализацию электропластической деформации / В. С. Савенко, О. А. Троицкий, А. Г. Силивонец // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2017. – № 1. – С. 85–91.

2. Троицкий, О. А. Физические и технологические основы электропластической деформации металлов : монография / О. А. Троицкий, В. В. Савенко. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2016. – 208 с.
3. Bennett, W. H. Magnetically self-focussing streams / W. H. Bennett // Phys. Rev. – 1934. – № 45. – P. 890.
4. Рошупкин, А. М. О влиянии электрического тока и магнитного поля на взаимодействие дислокаций с точечными дефектами в металлах / А. М. Рошупкин, И. Л. Батаронов // Физика твердого тела. – 1988. – Т. 30, № 11. – С. 3311–3318.
5. Савенко, В. С. Механическое двойникование и электропластичность металлов в условиях внешних энергетических воздействий : монография / В. С. Савенко. – 2-е изд., доп. и перераб. – Минск : БГАФК, 2003. – 203 с.
6. Физические основы электроимпульсной и электропластической обработок и новые материалы / Ю. И. Баранов [и др.]. – М. : МГИУ, 2001. – 844 с.
7. Батаронов, И. Л. О механизме влияния электрического тока на пластическую деформацию металлов / И. Л. Батаронов, А. М. Рошупкин // Физика прочности и пластичности металлов и сплавов : тез. докл. 11 Всесоюз. конф. – Куйбышев, 1986. – С. 87–88.
8. Савенко, В. С. К расчету плотности тока и напряженности магнитного поля в условиях электропластичности / В. С. Савенко, О. А. Троицкий // Электромагнитное поле и материалы : материалы 26-й Междунар. конф. – М. : МЭИ, 2018. – С. 134–138.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.02.2019

**Savenko V. S., Stepaneev N. V. Calculation of Pre-Motor Factors and Their Graphic Images at Electroplastic Deformation of Metals Using the Matlab Package**

*The physical conditions for the creation of ponderomotive effects during electroplastic deformation are studied to obtain materials with a complex of high physicomechanical and service characteristics. It is shown that under electroplasticity conditions, the realization of optimal values of ponderomotive factors is achieved at frequencies when the magnetic field does not have time to significantly penetrate the material, and the diffusion rate will depend on both the conductivity of the metal and the frequency of the current. With increasing pulse repetition frequency, the magnetic and electric fields shift to the sample surface, and with increasing sample radius, the magnetic field strength increases and the current density decreases.*