

УДК 539.12:530.145

В. А. Плетюхов¹, И. В. Капица², В. В. Кисель³, В. М. Редьков⁴

¹д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²студент V курса физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

³канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики

Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

⁴д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник лаборатории теоретической физики

Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

e-mail: otf@brsu.brest.by

Р-НЕИНВАРИАНТНОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ И ТРЕМЯ МАССАМИ

В подходе Гельфанда – Яглома получены четыре типа Р-неинвариантного релятивистского волнового уравнения для частицы со спином $s = \frac{1}{2}$ и тремя различными массами. Каждое из них может представить интерес в качестве классической основы для описания трех поколений нейтрино, рассматриваемых как единый физический объект.

Введение

В настоящее время наличие у нейтрино массы (хотя и весьма малой, но все-таки ненулевой) считается твердо установленным фактом. В пользу этого свидетельствуют, например, осцилляции нейтрино, которые невозможны для строго безмассовых частиц. Таким образом, обычно используемое в классической теории поля описание нейтрино посредством безмассового уравнения Дирака является, строго говоря, некорректным.

В работе [1] было построено релятивистское волновое уравнение (РВУ) первого порядка, не распадающееся по группе Лоренца, для микрочастицы со спином $S = \frac{1}{2}$ и тремя различными значениями массы, которое рассматривалось как альтернатива уравнению Дирака с точки зрения описания всех трех сортов нейтрино с единых позиций. Важной чертой указанного РВУ является его инвариантность относительно операции пространственного отражения.

Здесь необходимо сделать небольшой исторический экскурс. В те годы, когда формировался постулативный базис теории РВУ (подробнее см. [2]), считалось, что «правильные» уравнения, описывающие физические процессы в микромире, должны быть инвариантными не только в смысле собственной группы Лоренца, но и по отношению к операции пространственного отражения (так называемая *Р*-инвариантность или *Р*-четность). Поэтому требование *Р*-инвариантности, наряду с требованиями лоренцевской инвариантности и возможности лагранжевой формулировки, включалось в систему обязательных постулатов теории РВУ [2; 3]. Однако впоследствии выяснилось, что в процессах, идущих с участием нейтрино, например при β -распаде ядер, закон сохранения *Р*-четности может не выполняться.

В контексте обсуждаемой проблемы это означает, что при описании нейтрино в подходе теории РВУ требование *Р*-инвариантности соответствующего уравнения

можно опустить. В свою очередь, отказ от этого требования существенно расширяет границы применимости методов теории РВУ в нейтринной физике.

В данной работе мы исследуем возможность построения P -неинвариантного РВУ для микрообъекта со спином $s = \frac{1}{2}$ и тремя массовыми состояниями в подходе Гельфанда – Яглома [3; 4].

1. Некоторые сведения из теории РВУ

Как известно [2; 3], теория РВУ для частиц с ненулевой массой базируется на стандартной матрично-дифференциальной форме уравнения первого порядка

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \quad (\mu = 1 \div 4), \quad (1)$$

где $\psi(x)$ – многокомпонентная волновая функция, Γ_μ – квадратные числовые матрицы, m – массовый параметр. Релятивистская инвариантность уравнения (1) предполагает, что волновая функция $\psi(x)$ преобразуется по приводимому представлению T собственной группы Лоренца, состоящему из зацепляющихся неприводимых компонент $\tau \sim (l_1, l_2)$. В описании спина S участвуют представления τ , удовлетворяющие условию

$$|l_1 - l_2| \leq s \leq l_1 + l_2. \quad (2)$$

Среди матриц Γ_μ основную роль играет матрица Γ_4 в том смысле, что алгебраические свойства этой матрицы определяют как спин, так и возможные значения массы частицы, описываемой уравнением (1). Наиболее удобным в указанном смысле является канонический базис $\xi_{s,s_3}^{(\tau)}$, называемый иногда базисом Гельфанда – Яглома [4], в котором матрица Γ_4 имеет блочную структуру

$$\Gamma_4 = \bigoplus_s C^s \otimes I_{2s+1}. \quad (3)$$

Блоки C^s в (3) формируются представлениями $\tau \sim (l_1, l_2)$, удовлетворяющими условию (2). При этом, если блок C^s имеет отличные от нуля вещественные собственные значения $\lambda_i^{(s)}$ (хотя бы одно), то микрочастица обладает спином S , а возможные значения ее массы вычисляются по формуле

$$m_i^{(s)} = \frac{m}{|\lambda_i^{(s)}|}. \quad (4)$$

2. Основное содержание

Для построения интересующего нас уравнения будем исходить из набора неприводимых представлений группы Лоренца

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)' \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right)' \oplus \left(1, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad (5)$$

где знак «штрих» введен для различения кратных (повторяющихся) компонент. В соответствии с (2) представления, содержащиеся в наборе (5), могут описывать спины $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. Следовательно, матрица Γ_4 (3) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\Gamma_4 = \left(C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2\right) \oplus \left(C^{\frac{3}{2}} \otimes I_4\right) = \Gamma_4^{\frac{1}{2}} \oplus \Gamma_4^{\frac{3}{2}}. \quad (6)$$

Для удобства и упрощения записи дальнейших формул и выражений введем нумерацию представлений, содержащихся в (5), которая одновременно будет служить и для обозначения строк и столбцов спиновых блоков C^s :

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \sim 1, \left(\frac{1}{2}, 0\right) \sim 2, \left(0, \frac{1}{2}\right)' \sim 3, \left(\frac{1}{2}, 0\right)' \sim 4, \left(1, \frac{1}{2}\right) \sim 5, \left(\frac{1}{2}, 1\right) \sim 6. \quad (7)$$

В обозначениях (7) получаем следующие самые общие выражения для спиновых блоков $C^{\frac{1}{2}}, C^{\frac{3}{2}}$, соответствующие выбранному нами набору представлений (5):

$$C^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{14}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{16}^{\frac{1}{2}} \\ C_{21}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{23}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{25}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & C_{32}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{34}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{36}^{\frac{1}{2}} \\ C_{41}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{43}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{45}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & C_{52}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{54}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{56}^{\frac{1}{2}} \\ C_{61}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{63}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{65}^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & C_{56}^{\frac{1}{2}} \\ C_{65}^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где на данном этапе компоненты блоков $C^{\frac{1}{2}}, C^{\frac{3}{2}}$ – произвольные комплексные числа.

Как показано в [5], зацепления между кратными представлениями в (5) могут быть «разорваны», т. е., не уменьшая общности, можно положить

$$C_{14}^{\frac{1}{2}} = C_{23}^{\frac{1}{2}} = C_{32}^{\frac{1}{2}} = C_{41}^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (9)$$

Далее, поскольку нас интересует только спин $s = \frac{1}{2}$, надо выбрать

$$C_{56}^{\frac{3}{2}} = C_{65}^{\frac{3}{2}} = 0, \quad (10)$$

откуда автоматически следует:

$$C_{56}^{\frac{1}{2}} = C_{65}^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (11)$$

С учетом (9) – (11) спиновые блоки $C^{\frac{1}{2}}, C^{\frac{3}{2}}$ (8) принимают вид:

$$C^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12}^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & C_{16}^{\frac{1}{2}} \\ C_{21}^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & C_{25}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{34}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{36}^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & C_{43}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{45}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & C_{52}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{54}^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ C_{61}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{63}^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

С точки зрения физических приложений излагаемой теории интерес представляют только такие уравнения, с которыми можно инвариантно связать наблюдаемые величины, например заряд, энергию, импульс и другие. Иными словами, помимо релятивистской инвариантности строящегося уравнения, обязательным требованием является возможность его получения из некоторой лоренц-инвариантной функции Лагранжа.

Лагранжиан уравнения (1) имеет вид

$$L = -\psi^+ \eta (\Gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi, \quad (13)$$

где η – матрица вещественной лоренц-инвариантной билинейной формы $\psi^+ \eta \psi$, имеющая в базисе Гельфанда – Яглома структуру, аналогичную (6):

$$\eta = (\eta^{\frac{1}{2}} \otimes I_2) \oplus (\eta^{\frac{3}{2}} \otimes I_4). \quad (14)$$

P -инвариантности билинейной формы и лагранжиана (13) при этом не требуется. Требование лоренц-инвариантности и вещественности формы означает, что ненулевые элементы $\eta_{\tau\bar{\tau}}^s$ матрицы η должны удовлетворять условиям [2]:

$$(\eta_{\tau\bar{\tau}}^s)^* = \eta_{\tau\bar{\tau}}^s, \quad (15)$$

$$\eta_{\tau\bar{\tau}}^s = -\eta_{\tau\bar{\tau}}^{s+1}. \quad (16)$$

Не уменьшая общности, условию (15) можно удовлетворить, полагая, например:

$$\eta_{12}^{\frac{1}{2}} = -\eta_{21}^{\frac{1}{2}} = \eta_{34}^{\frac{1}{2}} = -\eta_{43}^{\frac{1}{2}} = i, \quad \eta_{56}^{\frac{1}{2}} = -\eta_{65}^{\frac{1}{2}} = if \quad (f = \pm 1). \quad (17)$$

В общем случае требование возможности лагранжевой формулировки РВУ вида (1) приводит к условию

$$C_{\tau\bar{\tau}'}^s \eta_{\tau'\bar{\tau}}^s = (C_{\tau'\bar{\tau}}^s)^* \eta_{\tau\bar{\tau}}^s, \quad (18)$$

которое применительно к нашему случаю при выборе (17) элементов матрицы η накладывает следующие ограничения на компоненты спинного блока $C^{\frac{1}{2}}$:

$$C_{12}^{\frac{1}{2}}, C_{21}^{\frac{1}{2}}, C_{34}^{\frac{1}{2}}, C_{43}^{\frac{1}{2}} - \text{чисто мнимые}; \quad (19)$$

$$C_{61}^{\frac{1}{2}} = -f(C_{25}^{\frac{1}{2}})^*, \quad C_{52}^{\frac{1}{2}} = -f(C_{16}^{\frac{1}{2}})^*, \quad (20)$$

$$C_{63}^{1/2} = -f(C_{45}^{1/2})^*, C_{54}^{1/2} = -f(C_{36}^{1/2})^*. \quad (21)$$

Условиям (19) – (21) можно удовлетворить, полагая, например:

$$\begin{aligned} C_{12}^{1/2} = -C_{21}^{1/2} = iC_1, C_{34}^{1/2} = -C_{43}^{1/2} = iC_3, \\ C_{16}^{1/2} = -C_{25}^{1/2} = iC_2, C_{36}^{1/2} = -C_{45}^{1/2} = iC_4, \end{aligned} \quad (22)$$

где C_1, C_3 – произвольные вещественные, C_2, C_4 – произвольные комплексные числа. Спиновой блок $C^{1/2}$ при этом принимает вид

$$C^{1/2} = i \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & C_2 \\ -C_1 & 0 & 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & C_4 \\ 0 & 0 & -C_3 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & fC_2^* & 0 & fC_4^* & 0 & 0 \\ -fC_2^* & 0 & fC_4^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma_4^{1/2} = C^{1/2} \otimes I_2 = C \otimes i\gamma_5\gamma_4, \quad (23)$$

где γ_4, γ_5 – матрицы Дирака и

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & C_3 & C_4 \\ fC_2^* & fC_4^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Спектр массовых состояний обсуждаемой микрочастицы связан с корнями λ_i матрицы C (24) соотношением (4). Характеристическое уравнение для матрицы C имеет вид

$$\lambda^3 - \lambda^2(C_1 + C_3) + \lambda(C_1C_3 - f|C_2|^2 - f|C_4|^2) + f|C_2|^2C_3 + f|C_4|^2C_1 = 0. \quad (25)$$

Из (25) вытекает следующая система уравнений для λ_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= C_1 + C_3, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 &= C_1C_3 - f|C_2|^2 - f|C_4|^2, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -f|C_2|^2C_3 - f|C_4|^2C_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Как видно из (4), в силу произвольности массового параметра m , один из корней λ_i , не уменьшая общности, можно выбрать равным 1. Пусть

$$\lambda_3 = 1. \quad (27)$$

Тогда для нахождения двух оставшихся корней получим уравнение

$$\lambda^2 - \lambda(C_1 + C_3 - 1) - f|C_2|^2 C_3 - f|C_4|^2 C_1 = 0, \quad (28)$$

где произвол в выборе параметров C_1, C_2, C_3, C_4 ограничен условием

$$C_1 C_3 - C_1 - C_3 + 1 + f|C_2|^2 (C_3 - 1) + f|C_4|^2 (C_1 - 1) = 0. \quad (29)$$

Условие (29) выполняется, например, при

$$C_1 = C_3 = 1. \quad (30)$$

На параметры C_2, C_4 при этом никаких ограничений не накладывается.

Уравнение (28) при условии (30) трансформируется к виду

$$\lambda^2 - \lambda - f|C_2|^2 - f|C_4|^2 = 0, \quad (31)$$

откуда следует:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + f|C_2|^2 + f|C_4|^2}. \quad (32)$$

Поскольку корни $\lambda_{1,2}$ должны быть вещественными и разными, то при $f = -1$ на параметры уравнения C_2, C_4 накладывается ограничение

$$|C_2|^2 + |C_4|^2 < \frac{1}{4}. \quad (33)$$

В случае же, когда $f = 1$, выбор C_2, C_4 ничем не ограничен.

Помимо (17) матрицу билинейной формы можно задать иным, неэквивалентным способом, а именно:

$$\eta_{12}^{1/2} = -\eta_{21}^{1/2} = -\eta_{34}^{1/2} = \eta_{43}^{1/2} = i, \quad \eta_{56}^{1/2} = -\eta_{65}^{1/2} = if \quad (f = \pm 1). \quad (34)$$

При этом условие (19) не изменится, а (20), (21) трансформируются так:

$$C_{61}^{1/2} = -f(C_{25}^{1/2})^*, \quad C_{51}^{1/2} = -f(C_{16}^{1/2})^*, \quad (35)$$

$$C_{63}^{1/2} = f(C_{45}^{1/2})^*, \quad C_{54}^{1/2} = f(C_{36}^{1/2})^*. \quad (36)$$

Вводя по-прежнему обозначения (22), для спинного блока $C^{1/2}$ получим в этом случае выражение

$$C^{\frac{1}{2}} = i \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & C_2 \\ -C_1 & 0 & 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & C_4 \\ 0 & 0 & -C_3 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & fC_2^* & 0 & -fC_4^* & 0 & 0 \\ -fC_2^* & 0 & fC_4^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma_4^{\frac{1}{2}} = C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = C' \otimes i\gamma_5\gamma_4, \quad (37)$$

где

$$C' = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & C_3 & C_4 \\ fC_2^* & -fC_4^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Характеристическое уравнение матрицы C' (38) имеет вид

$$\lambda^3 - \lambda^2(C_1 + C_3) + \lambda(C_1C_3 - f|C_2|^2 + f|C_4|^2) + f|C_2|^2C_3 - f|C_4|^2C_1 = 0. \quad (39)$$

Полагая, как и ранее (см. (27)), один из корней равным 1, для нахождения двух остальных корней получим уравнение

$$\lambda^2 - \lambda(C_1 + C_3 - 1) - f|C_2|^2C_3 + f|C_4|^2C_1 = 0, \quad (40)$$

на параметры которого налагается ограничение

$$C_1C_3 - C_1 - C_3 + 1 + f|C_2|^2(C_3 - 1) - f|C_4|^2(C_1 - 1) = 0. \quad (41)$$

Условие (41) выполняется при естественном выборе (30) вещественных параметров C_1, C_3 . При этом уравнение (40) принимает вид

$$\lambda^2 - \lambda - f|C_2|^2 + f|C_4|^2 = 0. \quad (42)$$

Отсюда для корней λ_1, λ_2 получаем выражение

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + f|C_2|^2 - f|C_4|^2}, \quad (43)$$

имеющее смысл при выполнении условий

$$|C_2|^2 - |C_4|^2 > -\frac{1}{4} \text{ при } f = 1, \quad (44)$$

$$|C_2|^2 - |C_4|^2 < \frac{1}{4} \text{ при } f = -1. \quad (45)$$

Заключение

Таким образом, исходя из набора (5) неприводимых представлений группы Лоренца, можно построить, вообще говоря, четыре различных типа P -неинвариантного

РВУ для микрообъекта со спином $s = \frac{1}{2}$ и тремя массовыми состояниями. В базисе Гельфанда – Яглома при использовании индексной нумерации (7) неприводимых компонент, входящих в (5), спиновые блоки $C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2$ матрицы Γ_4 (6) и блоки $\eta^{\frac{1}{2}} \otimes I_2$ матрицы билинейной формы η (14) для каждого из этих типов уравнений имеют, как следует из вышеприведенного исследования, вид:

Первый тип

$$C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_2 \\ 0 & 1 & C_4 \\ C_2^* & C_4^* & 0 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4; \quad \eta^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4, \quad (46)$$

где C_2, C_4 – произвольные комплексные числа, не равные одновременно нулю. Массовый спектр (4) определяется корнями

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + |C_2|^2 + |C_4|^2}, \quad \lambda_3 = 1. \quad (47)$$

Второй тип

$$C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_2 \\ 0 & 1 & C_4 \\ -C_2^* & -C_4^* & 0 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4; \quad \eta^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4, \quad (48)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - |C_2|^2 - |C_4|^2}, \quad \lambda_3 = 1, \quad (49)$$

где произвол в выборе параметров C_2, C_4 ограничен условием (33).

Третий тип

$$C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_2 \\ 0 & 1 & C_4 \\ C_2^* & -C_4^* & 0 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4; \quad \eta^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4, \quad (50)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + |C_2|^2 - |C_4|^2}, \quad \lambda_3 = 1 \quad (51)$$

при выполнении ограничения (44).

Четвертый тип

$$C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_2 \\ 0 & 1 & C_4 \\ -C_2^* & C_4^* & 0 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4; \quad \eta^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4, \quad (52)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - |C_2|^2 + |C_4|^2}, \quad \lambda_3 = 1. \quad (53)$$

где параметры C_2, C_4 подчиняются условию (45).

Выбор определенных значений параметров C_2, C_4 может быть осуществлен путем сопоставления полученных результатов с экспериментальными данными для масс флейворных нейтрино.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гугнюк, М. Л. Описание поколений нейтрино в подходе теории релятивистских волновых уравнений / М. Л. Гугнюк, В. А. Плетюхов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 1. – С. 5–11.
2. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.
3. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М. : Наука, 1958. – 368 с.
4. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, № 8. – С. 703–733.
5. Федоров, Ф. И. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцелый спин / Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 78–83.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.09.2019

Pletyukhov V. A., Kapitsa I. V., Kisel V. V., Red'kov V. M. P-Noninvariant Relativistic Wave Equation for the Particle with Spin $\frac{1}{2}$ and Three Masses

Four types of P-noninvariant relativistic wave equation for the particle with spin $s = \frac{1}{2}$ and three different masses are obtained in the Gelfand – Yagolam approach. Each of them can present an interest as a classical basis for describing three generations of neutrinos, considered as a single physical object.