

УДК 513.82

А. А. Юдов¹, Е. В. Кисилюк²¹канд. физ.-мат. наук, доц.доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина²магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: modelmath@brsu.brest.by

**МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОГО РИПЕРА
ПОДМНОГООБРАЗИЯ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА**

Изучаются подмногообразия однородного пространства, описывается построение канонического рипера подмногообразия однородного пространства и строится вычислительный аппарат метода построения канонического рипера. Подмногообразие исследуется локально.

1. Построение инвариантного продолжения подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в алгебру Ли

Пусть G – группа Ли, H – ее замкнутая подгруппа Ли, $M = G/H$ – однородное G -пространство,

$$\pi: G \rightarrow G/H: a \rightarrow aH \quad (1)$$

каноническая проекция.

Группа G действует в M с помощью левых сдвигов:

$$G \times M \rightarrow M: (a, bH) \rightarrow abH = a \cdot bH = T_a(bH). \quad (2)$$

Определение: Подмногообразием размерности n однородного пространства M будем называть пару (D_0, f) , где D_0 – окрестность нуля евклидова пространства R_n , f – аналитическое вложение D_0 в M .

Таким образом, подмногообразия однородного пространства изучаются локально. Теория построения канонического репера подмногообразия подробно описана в работе [4]. Ниже излагаются идеи работы [4] и строится канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в алгебру Ли.

Предположим, что $f(0) = \pi(e)$. В противном случае, если $f(0) = \pi(a) \neq \pi(e)$, от подмногообразия (D_0, f) перейдем к ему эквивалентному $(D_0, T_{a^{-1}} \circ f)$. Пусть $\dim G = r$, $\dim H = s$, тогда $\dim M = r - s = m$.

Рассмотрим пространство Γ_1 всех касательных к M n -мерных подпространств. Действие группы G на M продолжается в действии на Γ_1 , на котором группа G будет действовать с помощью дифференциалов левых сдвигов пространства M :

$$G \times \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1: (a, K) \rightarrow dT_a(K) = a \circ K. \quad (3)$$

При этом Γ_1 становится G -пространством, но необязательно однородным. Наряду с G -пространством Γ_1 будем рассматривать его подмножество Q_1 , состоящее из n -мерных подпространств, касательных к M в точке $\pi(e)$. Q_1 будет H -пространством, тоже необязательно однородным. Между H -орбитами множества Q_1 и G -орбитами множества Γ_1 существует естественное взаимно-однозначное соответствие. Далее будем рассматривать G -орбиты пространства Γ_1 . Каждой такой орбите будет сопоставляться класс n -мерных подмногообразий пространства M , такой, что

все касательные подпространства подмногообразия этого класса попадут в данную орбиту (по крайней мере, в некоторой окрестности). Предположим, что подмногообразие (D_0, f) принадлежит классу с орбитой $O(K_1) = \{a \circ K_1 \mid a \in G\}$, где $K_1 = T_{f(0)}(\text{Im } f)$, $\text{Im } f = f(D_0)$. Пусть H_1 – группа стационарности элемента K_1 :

$$H_1 = \{a \in G \mid a \circ K_1 = K_1\}.$$

Приведем основные факты теории вычислительного аппарата метода построения канонического репера.

Рассмотрим множество Q_1 всех n -мерных подпространств, касательных к M в точке $\pi(e)$. Наряду с множеством Q_1 рассмотрим множество

$$Z_1 = \{d\pi_e^{-1}(K) \mid K \in Q_1\}.$$

Множество Q_1 является H -пространством. Множество Z_1 также является H -пространством, причем действие группы H в Z_1 индуцируется присоединенным представлением Ad . H -пространства Q_1 и Z_1 изоморфны. Отсюда, в частности, следует, что

$$H_1 = \{a \in H \mid Ada(K'_1) = K'_1\}, \tag{4}$$

где $K'_1 = d\pi_e^{-1}(K_1)$.

Пусть $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r\}$ – базис пространства \bar{G}^* дуального к алгебре Ли \bar{G} группы Ли G , $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^t\}$ – базис пространства K'_1 , дуального к K'_1 , $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s\}$ – базис пространства \bar{H}^* , дуального к \bar{H} . При этом $t = s + n$. Тогда система Пфаффа, определяющая пространство K'_1 , будет иметь вид:

$$\omega^{t+1} = 0, \omega^{t+2} = 0, \dots, \omega^r = 0. \tag{5}$$

Найдем внешние дифференциалы форм системы (5):

$$d\omega^{t+1} = 0, d\omega^{t+2} = 0, \dots, d\omega^r = 0. \tag{6}$$

Введем индексы суммирования: $i, j = 1, 2, \dots, r$; $\sigma, \tau = s + 1, s + 2, \dots, r$; $\varepsilon, \mu = t + 1, t + 2, \dots, r$; $a, b, c = 1, 2, \dots, s_1$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, t$; $p, q, l = s_1 + 1, s_1 + 2, \dots, s$; $\rho, \delta = s + 1, s + 2, \dots, t$.

Разложим внешние дифференциалы (6) по базису:

$$d\omega^{t+1} = \Lambda_{ij}^{t+1} \omega^i \wedge \omega^j, \dots, \Lambda_{ij}^r \omega^i \wedge \omega^j. \tag{7}$$

Предположим, что подмногообразие (D_0, f) продолжается в пространство $M = G/H$ и $f_1 : D_0 \rightarrow M_1$ – соответствующее продолжение, $K_1 = T_{f(0)}(\text{Im } f)$, $K'_1 = d\pi_e^{-1}(K_1)$, $K_2 = T_{f_1(0)}(\text{Im } f_1)$, $K'_2 = d\pi_{1e}^{-1}(K_2)$.

Лемма 1 [4]. В формулах (7) равны нулю коэффициенты $\Lambda_{\alpha\alpha}^{t+1} \dots \Lambda_{\alpha\alpha}^r$; $\Lambda_{p,q}^{t+1}, \dots, \Lambda_{p,q}^r$.

Следствие 1. Система форм

$$\begin{cases} \omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0; \\ d\omega^{t+1} = 0, \dots, d\omega^r = 0 \end{cases} \tag{8}$$

эквивалентна системе

$$\omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0; \tag{a}$$

$$\omega^p \wedge \theta_p^{t+1} = 0, \dots, \omega^p \wedge \theta_p^r = 0. \tag{б} \tag{9}$$

Пусть H_1 – алгебра Ли группы H_1 , тогда

$$H_1 = \{v \in H \mid [v, K'_1] \subset K'_1\}. \quad (10)$$

Пусть $K'_1 = H \oplus N$, $K'_2 = H \oplus N$.

Теорема 1.1. [4]. Если выполняется условие

$$[N, N] \subset K'_1, \quad (11)$$

то внешние дифференциалы $d\omega^{t+1} = 0, \dots, d\omega^r = 0$ обращаются в нуль в пространстве K'_2 .

Заметим, что условие (11) всегда выполняется для одномерного подмногообразия (D_0, f) , а также для подмногообразий любой размерности в случае, когда группа Ли G является полупрямым произведением группы стационарности точки пространства M и абелевой группы, в частности для всех евклидовых и псевдоевклидовых пространств.

Используя лемму Картана, систему (9, б) на пространстве K'_2 можно переписать в виде [4]: $\Theta_\rho^{t+1} = A_{\rho\delta}^{t+1} \tilde{\omega}^\delta, \dots, \Theta_\rho^r = A_{\rho\delta}^r \tilde{\omega}^\delta, A_{\rho\delta}^\varepsilon = A_{\delta\rho}^\varepsilon, \varepsilon = t+1, \dots, r$ ($\tilde{\omega}^\delta$ – ограничение формы ω^δ на пространство K'_2), а систему (9) в виде:

$$\begin{aligned} \omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0; \\ \Omega_\rho^{t+1} \equiv \Theta_\rho^{t+1} - A_{\rho\delta}^{t+1} \tilde{\omega}^\delta = 0, \dots, \Omega_\rho^r \equiv \Theta_\rho^r - A_{\rho\delta}^r \tilde{\omega}^\delta = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Теорема 1.2. [4]. Система 1-форм

$$\omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0, \Omega_\rho^{t+1} = 0, \dots, \Omega_\rho^r = 0 \quad (13)$$

есть система форм Пфаффа, определяющая подпространство K'_2 .

Теорема 1.3. Система форм

$$\Omega_\rho^{t+1} = 0, \dots, \Omega_\rho^r = 0, \rho = s+1, \dots, t, \quad (14)$$

рассматриваемая как алгебраическая система относительно форм $\omega^{s_1+1} = 0, \dots, \omega^s = 0$, разрешима относительно этих форм. При этом получается выражение форм $\omega^{s_1+1}, \dots, \omega^s$ через формы $\omega^{s_1+1}, \dots, \omega^t$.

Разрешив систему (14) относительно форм $\omega^{s_1+1} = 0, \dots, \omega^s = 0$, найдем

$$\omega^{s_1+1} = \lambda_\rho^{s_1+1} \omega^\rho, \dots, \omega^s = \lambda_\rho^s \omega^\rho. \quad (15)$$

Система (15) эквивалентна системе (14). Тогда систему (13) можно переписать в виде:

$$\omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0, \omega^{s_1+1} - \lambda_\rho^{s_1+1} \omega^\rho = 0, \dots, \omega^s - \lambda_\rho^s \omega^\rho = 0. \quad (16)$$

Коэффициенты $\lambda_\rho^{s_1+1}, \dots, \lambda_\rho^s, \rho = s+1, \dots, t$ называются *дифференциальными инвариантами подмногообразия (D_0, f) , полученными при первом продолжении*. Может быть, среди полученных дифференциальных инвариантов есть зависимость. Чтобы получить независимые инварианты первого продолжения, надо подействовать на подмногообразии (D_0, f) преобразованием h_1 группы H_1 . При этом подмногообразие (D_0, f) перейдет в $(D_0, h_1 \circ f)$, а подпространство K_1 (а следовательно, и K'_1) не изменится, а подпространство K_2 и, соответственно, K'_2 изменится. При этом надо так подобрать элемент h_1 , чтобы K'_2 привелось к возможно более простому виду. В соответствии с этим и система (13), определяющая K'_2 , приведет к более простому виду и оставшиеся коэффициенты будут независимыми дифференциальными инвариантами первого продолжения.

Замечание 1. Теорема 1.3 верна как при выполнении условий $\dim H - \dim H_1 = \dim Q$, так и в случае

$$\dim Q > \dim H - \dim H_1. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь подмногообразие (D_0, f) пространства $M_1 = G/H_1$ и применим к нему аналогичные рассуждения. Пусть $f_2 : D_0 \rightarrow G/H_2$ – продолжение отображения f_1 в пространство $M_2 = G/H_2$, где H_2 – группа стационарности пространства $K_2 = T_{f_1(0)}(Imf_1)$. Системой Пфаффа, определяющей K_2 , будет система (13). Продолжив ее и применив лемму Картана, придем, аналогично предыдущему, к системе Пфаффа, определяющей подпространство K'_3 , где $K_3 = T_{f_2(0)}(Imf_2)$, $K'_3 = d\pi_{2e}^{-1}(K_3)$, $\pi_2 : G \rightarrow G/H_2 : a \mapsto aH_2$ – каноническая проекция.

При этом получим новые дифференциальные инварианты. Выберем, как и выше, среди дифференциальных инвариантов независимые. При этом будем действовать преобразованиями группы H_2 .

Предположим, что, повторив операцию продолжения $p+1$ раз, мы приведем группу стационарности пространства $K_{\rho+1}$ к единице: $H_{\rho+1} = e$. При этом получится система Пфаффа, определяющая пространство $K'_{\rho+2}$:

$$\omega^1 = \lambda^1_\rho \omega^\rho, \dots, \omega^s = \lambda^s_\rho \omega^\rho, \omega^{s+1} = 0, \dots, \omega^r = 0, \quad (18)$$

в которой все формы выражены через базисные формы $\omega^{s+1} = 0, \dots, \omega^r = 0$.

Определение. Коэффициенты $\lambda^1_\rho, \dots, \lambda^s_\rho$ называются *дифференциальными инвариантами подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$* .

При построении канонического репера в произвольной точке подмногообразия (D_0, f) получим дифференциальные инварианты $\lambda^1_\rho(x_0), \dots, \lambda^s_\rho(x_0)$, $x_0 \in D_0$, являющиеся функциями. Эти функции определяют подмногообразие (D_0, f) с точностью до преобразования группы G [3] и потому образуют полную систему дифференциальных инвариантов подмногообразия (D_0, f) .

Чтобы получить канонический репер и дифференциальные инварианты подмногообразия (D_0, f) в произвольной точке $x \in D = f(D_0)$, нужно перейти от подмногообразия (D_0, f) к подмногообразию $(D_0, a \circ f)$, причем a выбрать так, чтобы $a \circ x = \pi(e)$. Возможен и второй путь, при котором по аналогии с вышеописанным непосредственно используются подпространства $K'_{1|x}, \dots, K'_{p+1|x}$.

Таким образом, строить канонический репер и находить дифференциальные инварианты можно сразу для всех точек подмногообразия (D_0, f) .

Определение. Систему (18) будем называть *характеризующей системой* подмногообразия (D_0, f) .

2. Проблема эквивалентности подмногообразий однородного пространства

Рассмотрим проблему эквивалентности подмногообразий однородного пространства $M = G/H$.

Пусть заданы два подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) пространства M .

Определение. Два подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) однородного G -пространства M называются эквивалентными (или G -эквивалентными), если существует элемент $a \in G$ такой, что

$$g(x_0) = T_a(f(x_0)), \quad \forall x_0 \in D_0. \quad (19)$$

Определение. Подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) однородного пространства M будем называть эквивалентными по образу, если существует $a \in G$ такое, что

$$g(D_0) = T_a(f(D_0)).$$

Очевидно, что эквивалентные подмногообразия являются эквивалентными по образу.

Подмногообразию (D_0, f) , для которого возможно построение канонического репера, была сопоставлена цепочка подгрупп $H \supset H_1 \supset \dots \supset H_{p+1} = e$, названная типовой цепочкой или типом подмногообразия (D_0, f) . Нетрудно видеть, что каждая подгруппа этой цепочки определена с точностью до сопряженности в группе G .

Определение. Подмногообразия, имеющие одинаковые (с точностью до сопряженности) типовые цепочки, будем называть однотипными.

Теорема 2.1. [3]. Подмногообразия, эквивалентные по образу, однотипны.

Таким образом, классификация подмногообразий по типам более широкая, чем по эквивалентности. Сформулируем критерий эквивалентности подмногообразий.

Теорема 2.2. Два подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) однородного G -пространства $M = G/H$ тогда и только тогда эквивалентны, когда

$$\hat{f}^*(\omega^i) = \hat{g}^*(\omega^i), \quad (20)$$

$i = 1, 2, \dots, r$, где ω^i – базисные левоинвариантные формы на группе Ли G (т. е. базис в \bar{G}^*), а \hat{f} и \hat{g} – канонические лифты подмногообразий (D_0, f) и (D_0, g) .

Доказательство. Необходимость.

Пусть подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) эквивалентны, т. е. существует элемент $a \in G$, выполняется равенство (19), и пусть $\hat{f} = \lambda_f \circ f$ и $\hat{g} = \lambda_g \circ g$ их канонические лифты. Условие (19) удобно записывать в виде:

$$g(x_0) = a \circ f(x_0), \quad \forall x_0 \in D_0. \quad (21)$$

Пусть $\tilde{f} : f(D_0) = \text{Im } f \rightarrow M_1 : x \rightarrow \bar{T}_x(\text{Im } f)$,

$\tilde{g} : g(D_0) = \text{Im } g \rightarrow M_1 : x \rightarrow \bar{T}_x(\text{Im } g)$ – соответствующие продолжающие отображения, причем очевидно, что продолжение производится в одно и то же пространство $M_1 = G/H_1$. Действие G в пространстве M_1 определим формулой:

$$G \times M_1 \rightarrow M_1 : (a, K) \rightarrow dT_a(K) \equiv a \circ K. \quad (22)$$

Тогда имеем:

$$a \circ (\bar{T}_x(\text{Im } f)) = dT_a(T_x(\text{Im } f)) = \bar{T}_{a \circ x}(T_x(\text{Im } f)) = \bar{T}_{a \circ x}(\text{Im}(T_x \circ f)) = T_{a \circ x}(\text{Im } g).$$

Отсюда:

$$\tilde{g}(a \circ x) = a \circ \tilde{f}(x). \quad (23)$$

Значит, $a \circ f_1(x_0) = a \circ \tilde{f}(f(x_0)) = \tilde{g}(a \circ f(x_0)) = \tilde{g}(g(x_0)) = g_1(x_0)$.

Таким образом, $\forall x_0 \in D_0 \quad g_1(x_0) = a \circ f_1(x_0)$

Аналогично доказываются равенства $g_2(x_0) = a \circ f_2(x_0), \dots, g_p(x_0) = a \circ f_p(x_0)$, а следовательно и

$$\hat{g}(x_0) = a \circ \hat{f}(x_0) = L_a \left(\hat{f}(x_0) \right), \forall x_0 \in D_0. \quad (24)$$

Таким образом, эквивалентным подмногообразиям соответствуют эквивалентные канонические лифты. Из (24) для любой левоинвариантной 1-формы ω^i на группе G получим $\hat{g}^*(\omega^i) = \left(L_a \circ \hat{f} \right)^*(\omega^i) = \hat{f}^*(L_a^*(\omega^i))$ и, следовательно, в силу левоинвариантности формы ω^i : $\hat{g}^*(\omega^i) = \hat{f}^*(\omega^i)$.

Достаточность. Пусть выполняется равенство (20), тогда в силу теоремы 2.3 [1, с. 238] отображения \hat{f} и \hat{g} отличаются левым сдвигом, т. е. существует элемент $a \in G$, такой что $\hat{g}(x_0) = L_a \left(\hat{f}(x_0) \right), \forall x_0 \in D_0$.

Применим к обеим частям этого равенства каноническую проекцию π и, поскольку π есть G -морфизм, получим: $\pi \circ \hat{g}(x_0) = \pi \circ L_a \circ \hat{f}(x_0) = a \circ \pi \circ \hat{f}(x_0)$.

Т. к. $\hat{f} = \lambda_f \circ f, \hat{g} = \lambda_g \circ g$, то $\pi \circ \lambda_g \circ g(x_0) = a \circ \pi \circ \lambda_f \circ f(x_0)$.

Поскольку λ_f и λ_g – сечения, то $\pi \circ \lambda_g = Id, \pi \circ \lambda_f = Id$. Отсюда: $g(x_0) = a \circ f(x_0), \forall x_0 \in D_0$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) однородного G -пространства M тогда и только тогда эквивалентны, когда эквивалентны (в группе G) их канонические лифты.

Необходимость доказывается равенством (24).

Достаточность. Пусть существует элемент $a \in G$, такой что $\hat{g}(x_0) = L_a \left(\hat{f}(x_0) \right), \forall x_0 \in D_0$.

Применим к обеим частям этого равенства каноническую проекцию π : $\pi \circ \hat{g}(x_0) = \pi \circ L_a \left(\hat{f}(x_0) \right) = T_a \circ \pi \circ \hat{f}(x_0)$. Отсюда $g(x_0) = T_a \circ f(x_0)$.

Достаточность доказана.

Теорема 2.3. Если канонический лифт \hat{f} подмногообразия (D_0, f) подвергнуть преобразованию $I(h): G \rightarrow G: a \rightarrow hah^{-1}$, то получим канонический лифт подмногообразия $(D_0, T_h \circ f)$, построенный по системе подпространств $h \circ K_1, h \circ K_2, \dots, h \circ K_{p+1}$.

Доказательство.

$I(h) = R_{h^{-1}} \circ L_h, L_h \left(\hat{f} \right)$ есть канонический лифт подмногообразия $(D_0, T_h \circ f)$.

Это следует из того, что эквивалентным подмногообразиям соответствуют эквивалентные канонические лифты (следствие 1). С другой стороны, $R_{h^{-1}} \left(L_h \left(\hat{f} \right) \right)$ есть канонический лифт подмногообразия $(D_0, T_h \circ f)$ по совокупности подпространств

$h \circ K_1, h \circ K_2, \dots, h \circ K_{p+1}$. Каждому подмногообразию (D_0, f) , для которого возможно построение канонического репера, была отнесена совокупность функций $\lambda_p^1(x_0), \dots, \lambda_p^s(x_0)$, $x_0 \in D_0$, которые называются дифференциальными инвариантами подмногообразия (D_0, f) . Справедлива теорема о том, что два подмногообразия однородного пространства одинаковой размерности эквивалентны в том и только в том случае, если в соответствующих точках их дифференциальные инварианты одинаковы. Будем считать, что соответствие между точками подмногообразий задается с помощью прообразов. Что же означает «одинаковые дифференциальные инварианты»? Система $\omega^{s+1} = 0, \dots, \omega^r = 0$, $\omega^{s_1+1} - \lambda_p^{s_1+1} \omega^p = 0, \dots, \omega^s - \lambda_p^s \omega^p = 0$, задающая дифференциальные инварианты подмногообразия (D_0, f) , дает выражение левоинвариантных форм группы через некоторые базисные: $\omega^{s+1}, \dots, \omega^r$. Базисные формы выбираются произвольно с тем условием, что они, будучи ограничены на $T(\widehat{\text{Im}} f)$, образуют там базис. Вид функций, являющихся дифференциальными инвариантами, зависит от выбора базиса. Выберем базис $V = \{V_1, \dots, V_n\}$ векторных полей на D_0 . Условимся в качестве базисных форм подмногообразия (D_0, f) в точке $x_0 \in D_0$ брать формы $d\widehat{f}(V_i)^*$, где знак звездочка означает форму, дуальную соответствующему вектору, а знак черты означает ее левоинвариантное распространение на группу Ли G . При этом понятие «дифференциальные инварианты» приобретает конкретность для подмногообразия (D_0, f) . Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.4. Для того чтобы подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовал базис векторных полей

$V = \{V_1, \dots, V_n\}$ на D_0 , такой, что $d\widehat{f}(V_i)^* = d\widehat{g}(V_i)^*$, и для любых соответствующих точек этих подмногообразий дифференциальные инварианты, найденные соответственно в базисах $d\widehat{f}(V_i)^*$ и $d\widehat{g}(V_i)^*$, совпадают.

Доказательство. Необходимость.

Пусть подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) эквивалентны, т. е. существует такой элемент $a \in G$, что

$$g(x_0) = a \circ f(x_0). \quad (25)$$

Заметим, что эквивалентные подмногообразия продолжают в одну и ту же орбиту $M_1 = G/H_1$ множества Γ_1 . Пусть $\tilde{f} : \text{Im } f \rightarrow M_1 : x \rightarrow \bar{T}_x(\text{Im } f)$, $\tilde{g} : \text{Im } g \rightarrow M_1 : x \rightarrow \bar{T}_x(\text{Im } g)$ – продолжающие отображения. Тогда имеет место равенство (5): $\tilde{g}(a \circ x) = a \circ \tilde{f}(x)$. Значит, $a \circ f_1(x_0) = a \circ \tilde{f}(f(x)) = \tilde{g}(a \circ f(x_0)) = \tilde{g}(g(x_0)) = g_1(x_0)$.

Аналогично доказываются равенства:

$$g_i(x_0) = a \circ f_i(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (26)$$

где f_i, g_i – последующие отображения f и g . Отсюда:

$$\widehat{g}(x_0) = a \circ \widehat{f}(x_0). \quad (27)$$

Следовательно,

$$\hat{g}^*(x_0) = (a \circ \hat{f})^*(x_0). \quad (28)$$

Равенство (27) выполняется и для любых линейных комбинаций форм ω^i .

Пусть $x_0 \in D_0$. Рассмотрим последовательность подпространств

$$N_f = T_{f(x_0)}(\text{Im } f), N_{1f} = T_{f_1(x_0)}(\text{Im } f_1), \dots, N_{p+1,f} = T_{f_{p+1}(x_0)}(\text{Im } f_{p+1}), \quad (29)$$

$$N_g = T_{g(x_0)}(\text{Im } g), N_{1g} = T_{g_1(x_0)}(\text{Im } g_1), \dots, N_{p+1,g} = T_{g_{p+1}(x_0)}(\text{Im } g_{p+1}). \quad (30)$$

В силу (26) пространства (29) с помощью сдвига элементом преобразуются в соответствующие пространства (30).

Рассмотрим пространства $N_f^* = d\pi^1(T_{f(x_0)}(\text{Im } f))$ и $N_g^* = d\pi^1(T_{g(x_0)}(\text{Im } g))$. В силу равенств $\pi \circ L_a = T_a \circ \pi, d\pi \circ dL_a = dT_a \circ d\pi$ имеем

$$d\pi \circ dL_a(N_f^*) = dT_a(d\pi(N_f^*)) = dT_a(N_f) = N_g = d\pi(d\pi^1(N_g)) = d\pi(N_g^*).$$

Отсюда:

$$dL_a(N_f^*) = N_g^*, \quad (31)$$

поскольку при dL_a полный прообраз преобразуется в полный прообраз.

Пусть

$$\omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0 - \quad (32)$$

система 1-форм в точке $\hat{g}^*(x_0)$, определяющая подпространство N_g^* , тогда система

$$dL_a \omega^{t+1} = 0, \dots, dL_a \omega^r = 0 \quad (33)$$

1-форм в точке $\hat{f}(x_0)$ будет определять подпространство N_f^* . Рассуждая аналогично для подпространства N_{if}^* и N_{ig}^* , $i=1,2,\dots,p+1$, получим, что N_{if}^* и N_{ig}^* определяются системами 1-форм, отличающимися левым сдвигом L_a . Это означает, что дифференциальные инварианты подмногообразий (D_0, f) и (D_0, g) в соответствующих точках совпадают. Базисными формами подмногообразия (D_0, f) , $\omega^{s+1}, \dots, \omega^t$ можно

выбрать формы $\overline{d\hat{f}(V_i)_{x_0}^*}$, где $V = \{V_1, \dots, V_n\}$ – некоторый базис векторных полей на D_0 . Тогда базисными формами подмногообразия (D_0, f) будут формы $\overline{d(a \circ \hat{f})(V_i)_{x_0}^*} = \overline{d\hat{g}(V_i)_{x_0}^*} = \overline{d\hat{f}(V_i)_{x_0}^*}$.

Достаточность. Пусть существует базис $V = \{V_1, \dots, V_n\}$ векторных полей на D_0 , такой, что $\forall x_0 \in D_0$ в базисе $\overline{\omega^i} = \overline{d\hat{f}(V_i)_{x_0}^*} = \overline{d\hat{g}(V_i)_{x_0}^*}$ подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) имеют одинаковые дифференциальные инварианты. Это значит, что любая форма ω^i , не являющаяся базисной, выражается через ω^i на пространствах $T_{\hat{f}(x_0)}(\text{Im } \hat{f})$ и $T_{\hat{g}(x_0)}(\text{Im } \hat{g})$ с одними и теми же коэффициентами. Поскольку

$\omega^i = d \widehat{f}(V_i)_{x_0}^* = d \widehat{g}(V_i)_{x_0}^*$, то $\omega^i \left(d \widehat{f}(V_i)_{x_0}^* \right) = \omega^i \left(d \widehat{g}(V_i)_{x_0}^* \right) = \delta_k^i$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ и, значит, $\widehat{f}^*(\omega^i) = \widehat{g}(\omega^i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Остальные левоинвариантные формы ω^i группы Ли G в точках $\widehat{f}(x_0)$ и $\widehat{g}(x_0)$ выражаются через базисные с одинаковыми коэффициентами: $\omega^i = \sum_i \alpha_i \omega^i$. Значит,

$$\widehat{f}^*(\omega^i) = \widehat{f}^* \left(\sum_i \alpha_i \omega^i \right) = \sum_i \alpha_i \widehat{f}^*(\omega^i) = \sum_i \alpha_i \widehat{g}^*(\omega^i) = \widehat{g}^* \left(\sum_i \alpha_i \omega^i \right) = \widehat{g}^*(\omega^i).$$

Таким образом, выполняется условие теоремы 2.3 [2, с. 238]. Тогда существует элемент $a \in G$, такой что для любого $x_0 \in D_0$: $g(x_0) = L_a(f(x_0))$, т. е. по следствию 1 подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) эквивалентны. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь каноническое вложение $\overset{\vee}{f}$ подмногообразия (D_0, f) в алгебру Ли \overline{G} структурной группы Ли G :

$$\overset{\vee}{f} : D_0 \rightarrow \overline{G} : x_0 \rightarrow \exp^{-1} \left(\widehat{f}(x_0) \right). \quad (34)$$

По теореме 3 при воздействии на канонический лифт $\overset{\vee}{f}$ подмногообразия (D_0, f) преобразованием $I(h)$ получим канонический лифт подмногообразия $(D_0, T_h \circ f)$ по совокупности пространств

$$h \circ K_1, h \circ K_2, \dots, h \circ K_{p+1}, h \in H. \quad (35)$$

Справедлива формула

$$\exp Ad(\sigma)X = I(\sigma)(\exp X). \quad (36)$$

Рассмотрим $\overset{\vee}{f} = \exp^{-1} \circ \widehat{f}$. Отсюда $\widehat{f} = \exp \circ \overset{\vee}{f}$. В силу (36) имеем:

$$I(h) \left(\exp \circ \overset{\vee}{f}(x_0) \right) = \exp Adh \left(\overset{\vee}{f}(x_0) \right) = I(h)(\widehat{f}(x_0)), x_0 \in D_0. \quad (37)$$

Отсюда следует, что $Ad(h)\overset{\vee}{f}$ есть образ при отображении \exp^{-1} канонического лифта подмногообразия $(D_0, T_h \circ f)$ по совокупности пространств (35).

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 2.5. Если на каноническое вложение $\overset{\vee}{f}$ подмногообразия (D_0, f) действовать преобразованием Adh присоединенной группы AdH , то оно преобразуется в каноническое вложение подмногообразия $(D_0, T_h \circ f)$ по совокупности подпространств (35).

Применив к равенству (37) каноническую проекцию π , получим:

$$\pi \circ I(h)(\exp \circ \overset{\vee}{f}(x_0)) = \pi \circ \exp Adh(\overset{\vee}{f}(x_0)) = \pi \circ I(h)(\widehat{f}(x_0)). \quad (38)$$

Учитывая, что $\pi \circ I(h) = T_h \circ \pi$, $\pi \circ \widehat{f} = f$, получим:

$$T_h \circ f(x_0) = \pi \circ I(h)(\widehat{f}(x_0)), \quad (39)$$

$$T_h \circ f(x_0) = \pi \circ \exp Adh(\overset{\vee}{f}(x_0)). \quad (40)$$

Равенства (39) и (40) вместе с теоремами 2.3 и 2.5 доказывают, что имеет место теорема.

Теорема 2.6. Эквивалентность относительно внутренних автоморфизмов группы H на множестве канонических лифтов n -мерных подмногообразий однородного пространства G/H индуцирует H -эквивалентность соответствующих подмногообразий. Эквивалентность относительно присоединенной группы AdH на множестве всех канонических вложений n -мерных подмногообразий однородного пространства G/H индуцирует H -эквивалентность соответствующих подмногообразий.

Поскольку в однородном пространстве G/H проблема G -эквивалентности подмногообразий сводится к проблеме H -эквивалентности, то теорема 2.5 сводит проблему G -эквивалентности подмногообразий в однородном пространстве $M = G/H$ к проблеме AdH -эквивалентности подмногообразий в алгебре Ли \bar{G} структурной группы G .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рашевский, П. К. Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. – М., 1956. – С. 428.
2. Стернберг, С. Лекции по дифференциальной геометрии / С. Стернберг. – М. : Наука, 1970. – 336 с.
3. Юдов, А. А. G -пространства, порожденные однородным фактор-пространством / А. А. Юдов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. – 1975. – № 2. – С. 27–31.
4. Юдов, А. А. Описание и обоснование метода Картана построения канонического репера подмногообразия / А. А. Юдов. – Деп. в ВИНТИ 1982, рег. № 359582.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 14.10.2019

Yudov A. A., Kisilyuk E. V. Method for Constructing a Canonical Ripper of a Submanifold of Homogeneous Space

The work examines submanifolds of a homogeneous space, describes the construction of a canonical ripper of a submanifold of a homogeneous space, and constructs the computing apparatus of the method of constructing a canonical ripper. The submanifold is studied locally.