

УДК 512.542

А. А. Трофимук¹, В. О. Лукьяненко²¹канд. физ.-мат. наук,доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Информатика»

Гомельского государственного технического университета имени П. В. Сухого

e-mail:¹alexander.trofimuk@gmail.com**О СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ ГРУППЫ С ЗАДААННЫМИ УСЛОВИЯМИ
ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП**

Подгруппа A группы G называется тсс-подгруппой в G , если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и для любых $X \leq A$ и $Y \leq T$ существует элемент $u \in \langle X, Y \rangle$ такой, что $XU^u \leq G$. Устанавливается сверхразрешимость группы G в каждом из следующих случаев: все максимальные подгруппы являются тсс-подгруппами в G ; все 2-максимальные подгруппы являются тсс-подгруппами в G .

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1; 2].

Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой, если в G найдется такая максимальная подгруппа M , в которой H является максимальной подгруппой.

Запись $H \leq G$ означает, что H – подгруппа группы G . Подгруппы A и B группы G называются перестановочными, если $AB = BA$. Заметим, что равенство $AB = BA$ равносильно тому, что $AB \leq G$.

Исследования, связанные с изучением максимальных подгрупп, относятся к одному из самых перспективных направлений в теории групп. Это связано прежде всего с тем, что многие известные классы групп допускают описания на основе свойств максимальных подгрупп. Отметим, например, что группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы нормальны; сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы всех ее максимальных подгрупп являются простыми числами (Б. Хупперт [2]).

По мере развития теории максимальных подгрупп многими авторами предпринимались также попытки изучения и применения 2-максимальных подгрупп. При этом как и для максимальных подгрупп, рассматривались группы с различными ограничениями на способ вложения обобщенно максимальных подгрупп в эти группы. Пожалуй, наиболее ранний результат, относящийся к этому направлению, был получен Б. Хуппертом [3], установившим сверхразрешимость группы, в которой все 2-максимальные подгруппы нормальны. Сверхразрешимость разрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами, была установлена Агравалем [4, теорема 6.5], а в работе [5] Л. Я. Поляков доказал, что группа сверхразрешима, если любая ее 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами этой группы. Подгруппа H из G называется квазинормальной в G , если H перестановочна со всеми подгруппами из G . Группы, все 2-максимальные подгруппы которых являются квазинормальными, были рассмотрены в работе А. Манна [6]. Очевидно, что если все максимальные подгруппы квазинормальны, то группа сверхразрешима, т. к. из квазинормальности подгруппы следует ее субнормальность. В [6] также было установлено, что ранг разрешимой группы G не превы-

шает 1 при условии, что каждая ее 2-максимальная подгруппа является квазинормальной в G . Легко увидеть, что в этом случае группа G также сверхразрешима. Подробный обзор результатов, связанных с перестановочностью максимальных подгрупп и их обобщений, представлен в [7].

Одной из фундаментальных работ последнего десятилетия, посвященных перестановочности обобщенно максимальных подгрупп, является работа [8], в которой В. Го, К. Шум и А. Н. Скиба ввели понятие *tss-перестановочной* подгруппы: подгруппа A группы G называется *tss-перестановочной*, если для произвольной подгруппы B группы G и любых $X \leq A$ и $Y \leq B$ существует элемент $u \in \langle X, Y \rangle$ такой, что $XY^u \leq G$. Из работы [9] вытекает сверхразрешимость группы G , у которой все максимальные (2-максимальные) подгруппы *tss-перестановочны*.

Введем следующее

Определение 1. Подгруппа A группы G называется *tss-подгруппой* в G , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$;
- 2) для любых $X \leq A$ и $Y \leq T$ существует элемент $u \in \langle X, Y \rangle$ такой, что $XY^u \leq G$.

Подгруппу T в дальнейшем будем называть *tss-добавлением* к подгруппе A в группе G .

Следующая теорема развивает результаты работы [9].

Теорема 3.1. 1. Если в группе G все максимальные подгруппы являются *tss-подгруппами*, то G сверхразрешима.

2. Если в группе G все 2-максимальные подгруппы являются *tss-подгруппами*, то G сверхразрешима.

1. Вспомогательные результаты

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах.

Если $H \leq G$ и $H \neq G$, то пишем $H < G$. Через G' , $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p - и p' -подгруппы соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G . Элементарная абелева группа порядка p^t и циклическая группа порядка t обозначаются E_{p^t} и Z_t соответственно, а $[A]B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B .

Пусть G – группа и

$$|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, p_1 > p_2 > \dots > p_k, a_i \in \mathbb{N}.$$

Пусть G_{p_i} – силовская p_i -подгруппа группы G .

Говорят, что группа G обладает силовой башней сверхразрешимого типа, если существует цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_{k-1} \leq G_k = G$$

такая, что G_i нормальна в группе G и фактор-группа G_i / G_{i-1} изоморфна силовой p_i -подгруппе G_{p_i} из G для всех i .

Группа называется сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов являются простыми числами. Через $\mathfrak{U}$ обозначим класс всех сверхразрешимых групп. Группа с нормальной силовой p -подгруппой называется p -замкнутой, а группа с нормальной p' -холловой подгруппой называется p -нильпотентной.

Лемма 2.1 [9, теорема 1, предложения 1–2]. Пусть $G = AB$ – произведение тсс-перестановочных подгрупп A и B . Тогда для минимальной нормальной подгруппы N группы G справедливы следующие утверждения:

- (1) $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{1, N\}$;
- (2) если $N \leq A \cap B$ или $N \cap A = N \cap B = 1$, то $|N| = p$, где p – простое число.

Лемма 2.2 [10, теорема 4]. Пусть $G = AB$ является произведением тсс-перестановочных подгрупп A и B . Тогда $[A, B] \leq F(G)$.

Лемма 2.3 [11, лемма 6]. Предположим, что разрешимая группа $G \notin \mathfrak{U}$, но фактор-группа $G/K \in \mathfrak{U}$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $Z(G) = O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;
- (2) группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N , $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$ для некоторого $p \in \pi(G)$;
- (3) G – примитивная группа; $G = [N]M$, где M – максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром;
- (4) N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $n > 1$;
- (5) если V – подгруппа группы G и $G = VN$, то $V = M^x$ для некоторого $x \in G$.

Из леммы 2.3 легко получается следующая

Лемма 2.4 [12]. Пусть G – минимальная несверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) G разрешима и $|\pi(G)| \leq 3$;
- (2) G имеет единственную нормальную силовскую подгруппу P и $P = G^{\mathfrak{U}}$;
- (3) $P/\Phi(P)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi(P)$ и $|P/\Phi(P)| > p$;
- (4) если Q – дополнение к P в G , то $Q/Q \cap \Phi(G)$ либо примарная циклическая группа, либо минимальная неабелева группа;
- (5) если $|\pi(Q)| = 2$, то Q – нециклическая группа с циклическими силовскими подгруппами.
- (6) если G не является группой Шмидта, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

Приведем некоторые свойства тсс-подгрупп.

Лемма 2.5 Пусть A – тсс-подгруппа группы G и Y – тсс-добавление к A в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) A – тсс-подгруппа в H для каждой подгруппы H группы G такой, что $A \leq H$;

(2) AN/N – тсс-подгруппа в G/N для каждой нормальной подгруппы N группы G ;

(3) для каждой нормальной подгруппы A_1 группы A и $X \leq Y$ существует $y \in Y$ такой, что $A_1 X^y \leq G$. В частности, $A_1 M \leq G$ для некоторой максимальной подгруппы M группы Y и $A_1 H \leq G$ для некоторой π -холовой подгруппы H разрешимой группы Y и любого $\pi \subseteq \pi(G)$;

(4) $A_1 K \leq G$ для каждой субнормальной подгруппы K в Y и для каждой нормальной подгруппы A_1 группы A ;

(5) если T нормальная подгруппа в G такая, что $T \leq A$ и $T \cap Y = 1$, то T_1 нормальная подгруппа в G для каждой нормальной подгруппы T_1 группы A такой, что $T_1 \leq T$;

(6) если T нормальная подгруппа в G такая, что $T \cap A = 1$ и $T \leq Y$, то $A_1 \leq N_G(T_1)$ для каждой нормальной подгруппы T_1 группы T и для каждой нормальной подгруппы A_1 группы A ;

(7) A^x – тсс-подгруппа группы G и Y^x – тсс-добавление к A^x в G для любого $x \in G$.

Доказательство.

1. Т. к. Y – тсс-добавление к A в G , то $G = AY$, A и Y – тсс-перестановочные подгруппы из G . По тождеству Дедекинда $H = H \cap AY = A(H \cap Y)$. Т. к. $H \cap Y \leq Y$, то для любых $X \leq A$ и $Z \leq H \cap Y$ существует элемент $u \in \langle X, Z \rangle$ такой, что $XZ^u \leq G$. Поэтому A и $H \cap Y$ тсс-перестановочны и, значит, A – тсс-подгруппа в H .

2. Т. к. $G = AY$, то $G/N = (AN/N)(YN/N)$. Пусть B/N – произвольная подгруппа из AN/N и X/N – произвольная подгруппа в YN/N . Т. к. $N \leq B \leq AN$, то по тождеству Дедекинда $B = B \cap AN = (B \cap A)N$.

Аналогично $X = X \cap YN = (X \cap Y)N$. Т. к. $B \cap A \leq A$ и $X \cap Y \leq Y$, то $(B \cap A)(X \cap Y)^u \leq G$ для некоторого $u \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle$. Поэтому

$$(B/N)(X/N)^{uN} = (B \cap A)(X \cap Y)^u N/N \leq G/N$$

для

$$uN \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle N/N \subseteq \langle B, X \rangle N/N = \langle B/N, X/N \rangle.$$

Значит, AN/N – тсс-подгруппа в G/N .

3. Т. к. A – тсс-подгруппа группы G , то по определению для каждой нормальной подгруппы A_1 группы A и $X \leq Y$ существует $u \in \langle A_1 X \rangle$ такой, что $A_1 X^u \leq G$. Т. к. $u \in G = AY = YA$, то $u = ya$ для некоторых $y \in Y$ и $a \in A$. Тогда

$$A_1 X^u = A_1 X^{ya} = A_1 (X^y)^a = A_1^a (X^y)^a = (A_1 X^y)^a \leq G.$$

Поэтому существует подгруппа A_1X^y в группе G для некоторого $y \in Y$. Очевидно, что если X – π -холлова подгруппа группы Y , то $H = X^y$ – π -холлова подгруппа группы Y . Поэтому $A_1H \leq G$. Аналогично и в случае, когда X – максимальная подгруппа группы Y . Тогда $M = X^y$ – максимальная подгруппа группы Y и $A_1M \leq G$.

4. Поскольку K субнормальная подгруппа в Y , то существует цепь подгрупп

$$Y = K_0 \geq K_1 \geq \dots \geq K_{n-1} \geq K_n = K,$$

в которой подгруппа K_{i+1} нормальна в K_i для всех i . Применим индукцию по n . По п. (3) существует $y \in Y$ такой, что $A_1K_1^y = A_1K_1 \leq G$. Поэтому утверждение справедливо для $n=0$ и $n=1$. Значит, $n \geq 2$. Согласно п. (1) A – тсс-подгруппа в AK_1 и K_1 – тсс-добавление к A в AK_1 . Т. к. длина субнормальной цепи между K и K_1 меньше, чем n , то по индукции в группе AK_1 существует подгруппа A_1K , а следовательно, $A_1K \leq G$.

5. По п. 3 в группе G существует подгруппа T_1Y . Т. к. $T_1 = T \cap T_1Y$ нормальна в T_1Y , то $Y \leq N_G(T_1)$ и T_1 нормальна в $G = AY$.

6. Т. к. T_1 субнормальна в Y , то по п. 4 в группе G существует подгруппа $A_1T_1 \leq G$ каждой нормальной подгруппы A_1 группы A . Т. к. $T_1 = T \cap A_1T_1$ нормальна в A_1T_1 , то $A_1 \leq N_G(T_1)$.

7. Т. к. $AY = G$, то $A^xY^x = G$. Пусть $K \leq A^x$, $L \leq Y^x$. Тогда $K^{x^{-1}} \leq A$, $L^{x^{-1}} \leq Y$ и существует $u \in \langle K^{x^{-1}}, L^{x^{-1}} \rangle$ такой, что $K^{x^{-1}}(L^{x^{-1}})^u \leq G$. Т. к.

$$\langle K^{x^{-1}}, L^{x^{-1}} \rangle = \langle K, L \rangle^{x^{-1}},$$

то существует $v \in \langle K, L \rangle$ такой, что $u = v^{x^{-1}}$.

Поскольку $x^{-1}u = vx^{-1}$, то

$$K^{x^{-1}}(L^{x^{-1}})^u = K^{x^{-1}}L^{vx^{-1}} = (KL^v)^{x^{-1}}.$$

Поэтому $KL^v \leq G$. Следовательно, A^x – тсс-подгруппа группы G и Y^x – ее тсс-добавление в G . Лемма доказана.

2. Доказательство основного результата

1. Предположим, что лемма неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть N – неединичная нормальная в G подгруппа и M/N – максимальная подгруппа G/N . Тогда M – максимальная подгруппа в G и по лемме 2.5 (2) все фактор-группы G/N наследуют условия теоремы. Поэтому G/N свержразрешима.

Пусть H – максимальная подгруппа и Y – ее тсс-добавление в G . Если $F(G) \neq 1$, то G разрешима. Поэтому $F(G) = 1$ и по лемме 2.2 $Y \leq C_G(H)$. Тогда H нормальна в G и $|G:H|$ – простое число. Т. к. H – произвольная максимальная подгруппа в G , то группа G свержразрешима, а следовательно, разрешима.

По лемме 2.3 в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что

$$N = C_G(N) = O_p(G) = F(G)$$

для некоторого $p \in \pi(G)$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $n > 1$, $G = [N]T$, где T – некоторая максимальная подгруппа группы G .

Пусть U – тсс-добавление к T в G . По лемме 2.1 $N \leq U$. Т. к. N – элементарная абелева p -подгруппа, выберем нормальную подгруппу N_1 в N такую, что $|N_1| = p$. Тогда по лемме 2.5 (6) $T \leq N_G(N_1)$. Поскольку N_1 нормальна в N , то N_1 нормальна в $G = [N]T$ и $N = N_1$. Противоречие. Лемма доказана.

2. Предположим, что теорема неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. По лемме 2.5 (1) и по теореме 3.1 каждая максимальная подгруппа M будет сверхразрешимой. Поэтому G – минимальная несверхразрешимая группа и применима лемма 2.4. Тогда группа G разрешима, $|\pi(G)| \leq 3$ и имеет единственную нормальную силовскую подгруппу $P = G^u$. Очевидно, что $\Phi(G) = 1$. Поэтому P – минимальная нормальная подгруппа порядка p^n , $n > 1$ и $G = [P]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G .

Если $|\pi(G)| = 3$, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и $M = [T]R$, где $|T| = t$, $|R| = r$, $t, r \in \pi(G)$. Подгруппы T и R являются 2-максимальными подгруппами группы G . Тогда по условию $TY_1 = G = RY_2$, где Y_1 и Y_2 – их тсс-добавления в G . Кроме того, $P \leq Y_1$ и $P \leq Y_2$. Пусть P_1 – минимальная нормальная подгруппа в P . Тогда по лемме 2.5 (6) $T \leq N_G(P_1)$ и $R \leq N_G(P_1)$. Тогда P_1 нормальна в $G = PM = PTR$, противоречие.

Таким образом, $|\pi(G)| = 2$. Тогда M – q -группа. Если $|M| > q$, то существует в M максимальная подгруппа M_1 такая, что $M_1 \neq 1$. Очевидно, что $H = [P]M_1$ – максимальная подгруппа в G . Т. к. H сверхразрешима, то в H существует максимальная подгруппа H_1 такая, что $M_1 \leq H_1$ и $|H:H_1| = p$. По условию подгруппа H_1 – тсс-подгруппа группы G . Тогда $H_1V = G$, где V – ее тсс-добавление в G . По лемме 2.1 $P \leq V$ и $P \cap H_1 = 1$. Тогда по тождеству Дедекинда

$$H_1 = H_1 \cap PM_1 = (H_1 \cap P)M_1 = M_1.$$

Поэтому $|P| = p$. Противоречие.

Значит, $|M| = q$ и P – максимальная подгруппа. Пусть P_1 – максимальная подгруппа в P . Тогда по условию $P_1K = G$, где K – тсс-добавление к P_1 в G . По лемме 2.1 $P \leq K$ и $P \cap P_1 = 1$, что возможно только при $|P| = p$. Противоречие. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 320 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer. – 1967.
3. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
4. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Passaic : Polygonal Publishen House, 1982.
5. Поляков, Л. Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л. Я. Поляков // Конечные группы : сб. – Минск : Наука и техника, 1966. – С. 75–88.
6. Mann, A. Finite groups whose n -maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.
7. Ковалева, В. А. Конечные группы с заданными обобщенно максимальными подгруппами (обзор). I. Конечные группы с обобщеннонормальными n -максимальными подгруппами / В. А. Ковалева // ПФМТ. – 2016. – Т. 29, № 4. – С. 48–58.
8. Guo, W. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, № 3–4. – P. 433–449.
9. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // SEAMS Bull. Math. – 2004. – Vol. 29, № 2. – P. 240–254.
10. Arroyo-Jorda, M. Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda // Journal of Algebra. – 2017. – Vol. 476. – P. 395–414.
11. On conditional permutability and factorized groups / M. Arroyo-Jorda [et al.] // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 2014. – Vol. 193. – P. 1123–1138.
12. Monakhov, V. S. On the supersoluble residual of a product of subnormal supersoluble subgroups / V. S. Monakhov, I. K. Chirik // Siberian Math. J. – 2017. – Vol. 58, № 2. – P. 271–280.
13. Doerk, K. Minimal nicht überauflösbare, endliche gruppen / K. Doerk // Math. Zeitschrift. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.10.2019

Trofimuk A. A., Lukyanenko V. O. On the Supersolubility of a Group with Given Conditions of Permutability of Maximal Subgroups

A subgroup A of a group G is called tcc-subgroup of G , if there is a subgroup T of G such that $G = AT$ and for any $X \leq A$ and for any $Y \leq T$ there exists an element $u \in \langle X, Y \rangle$ such that $XY^u \leq G$. In present paper the supersolubility of a group G is obtained in each of the following cases: all maximal subgroups of G are tcc-subgroups in G ; all 2-maximal subgroups of G are tcc-subgroups in G .