

УДК 517.9

А. Н. Сендер

канд. физ.-мат. наук, доц.,

зав. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: alexander_sender@tut.by

**P-АДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ КАК АППАРАТ ПРИБЛИЖЕНИЯ
ЛОКАЛЬНО-ПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$**

Рассматривается приближение непрерывных p -адических функций p -адического аргумента с помощью сплайнов, имеющих следующий вид: $L_{n,m}(x, \alpha) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \frac{\lambda_k}{|x - k|_p^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, где их параметры определяются из интерполяционных соотношений с помощью приближенной функции. Теорема о равномерной сходимости приближения непрерывной функции с помощью сплайнов доказывается для различных $\alpha \in \mathbb{Q}$.

В теории чисел наряду с полем действительных чисел огромную роль играет поле p -адических чисел [1; 2], на котором возможно построение нетривиального анализа. А.М. Островский доказал, что на поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ имеются только два существенно разных нормирования: обычный модуль $|\cdot|$ и p -адическая норма $|\cdot|_p$.

Пусть p – простое число, $x \in \mathbb{Q}$. В поле $\mathbb{Q}$ введем норму по правилу

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\gamma(x)}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

где $\gamma(x)$ определяется из представления $x = p^\gamma \frac{m}{n}$, $m, n, \gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Q}$ и числа m и n взаимно просты с p .

Норма $|x|_p$ обладает следующими свойствами:

- 1) $|x|_p \geq 0$, если $|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$;
- 3) $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

В случае когда $|x|_p \neq |y|_p$, мы имеем равенство $|x + y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$. Определенная таким образом норма $|x|_p$ называется p -адической нормой. Поле $\mathbb{Q}$, пополненное по p -адической норме, называется полем p -адических чисел. Поле $\mathbb{Q}$, пополненное по обычному модулю называется полем вещественных чисел.

Существует несколько реализаций p -адических чисел, одну из которых мы только что упомянули. Приведем другую их реализацию. P -адическим числом называется формальный степенной ряд вида $x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k$, где $0 \leq x_k \leq p-1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{Z}$ и $x_N \neq 0$. Множество таких чисел обозначается через $\mathbb{Q}_p$. Целой частью p -адического числа называется число вида $[x]_p = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k$, а дробной частью – число вида

$\{x\}_p = \sum_{k=N}^{-1} x_k p^k$. Множество чисел с нулевой дробной частью называется целыми p -адическими числами и обозначается через $\mathbb{Z}_p$.

Теперь, когда мы уже определили p -адические числа как формальные степенные ряды, то норму в $\mathbb{Q}_p$ можно переписать в виде:

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-N}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, формальные степенные ряды, являющиеся элементами $\mathbb{Q}_p$, сходятся по p -адической норме. Теперь приведем основные свойства $\mathbb{Q}_p$: все треугольники равнобедренные и остроугольные, т. е. если одна сторона треугольника меньше другой, то третья равна большей; каждый шар в $\mathbb{Q}_p$ является открыто-замкнутым; каждая точка шара является его центром; для двух шаров в $\mathbb{Q}_p$ возможны две ситуации: два шара либо не пересекаются, либо шар с меньшим радиусом содержится в шаре с большим радиусом; $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ – компактное открытое множество (обычно компакт замкнут).

Следует отметить, что $\mathbb{Q}_p$ и R являются полными и локально-компактными, но R – является связным, а $\mathbb{Q}_p$ – вполне несвязно. Из указанных свойств $\mathbb{Q}_p$ как ультраметрического пространства вытекает его полная несвязность.

Сформулируем теорему о равномерном приближении непрерывной функции локально-постоянной функцией.

Теорема 1 [3]. Пусть $X \subset \mathbb{Z}_p$ и $f : X \rightarrow \mathbb{Q}_p$ – непрерывная функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая локально-постоянная функция g , что для любого $x \in X$ $|f(x) - g(x)|_p < \varepsilon$.

Теорией аппроксимации в неархимедовом анализе (в частности, p -адическом) занимались многие математики, однако большинство работ по p -адической интерполяции и аппроксимации посвящены обобщению интерполяционных теорем Дьедонне и Малера либо являются частными случаями теоремы Стоуна – Вейерштрасса.

Одной из задач исследования является нахождение сплайна, который равномерно приближал бы функцию из пространства $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$. По теореме 1 любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить локально-постоянной функцией. Исследуемые непрерывные функции рассматриваются на $\mathbb{Z}_p$. Но т. к. $\mathbb{Z}_p$ является компактом, то локально-постоянная функция есть конечная линейная комбинация индикаторов шаров. Более того, индикатор является непрерывной функцией и конечные линейные комбинации индикаторов шаров плотны в $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$. Поэтому чтобы равномерно приблизить сплайнами произвольную непрерывную функцию, достаточно уметь приближать p -адическими сплайнами индикатор шара, лежащего в единичном шаре, т. е. в $\mathbb{Z}_p$.

Данная работа посвящена приближению непрерывной функции $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{K}$, где $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$, по норме $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|_p$. $\mathbb{K}$ – трансцендентное расширение поля $\mathbb{Q}_p$, содержащее $\mathbb{Q}_p$ и p^α , т. е.

$$\begin{aligned}\mathbb{K} &= \mathbb{Q}_p((p^\alpha)) = \left\{ x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^{\alpha k}, x_k \in \mathbb{Q}_p \right\} = \\ &= \left\{ x = \sum_{k=N}^{\infty} \left(\sum_{j=n_k}^{\infty} x_{k,j} p^j \right) p^{\alpha k}, x_{k,j} \in \{0, 1, \dots, p-1\} \right\} = \\ &= \begin{cases} \sum_{(k,j) \in Q(x) \subset \mathbb{Z}^2 / \sim} x_{k,j} p^{j+\alpha k}, & \text{если } \alpha - \text{рациональный,} \\ \sum_{(k,j) \in Q(x) \subset \mathbb{Z}^2} x_{k,j} p^{j+\alpha k}, & \text{если } \alpha - \text{иррациональный,} \end{cases}\end{aligned}$$

где $Q(x)$ – множество индексов, по которым идет суммирование. По теоремам о существовании и единственности продолжения неархимедовой нормы норма $|p^\alpha|_p = p^{-\alpha}$, заданная на $\mathbb{Q}_p$, продолжается на все поле $\mathbb{K}$.

Приближение будет осуществляться линейными комбинациями сдвигов функции $\frac{1}{|x|_p^\alpha}$ методом интерполяции: значение аппроксиманта должно совпадать со значениями функции на дискретном множестве (чаще всего на конечном). Эти соотношения интерполяции всегда приводят к системе линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей. В качестве аппроксиманта будем брать функцию

$$\varphi_\alpha(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^\alpha}, & r > 0, \\ 0, & r = 0, \end{cases}$$

где α – положительное рациональное число. В итоге аппроксимант будет иметь вид:

$$L_{n,m}(x, \alpha) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \lambda_k \varphi_\alpha(|x - x_k|_p), \quad (1)$$

где x_k – узлы интерполяции (в нашем случае числа $\{0, 1, 2, \dots, p^{n+m}-1\}$, занумерованные в лексикографическом порядке), а коэффициенты λ_k находятся из системы линейных уравнений (соотношений интерполяции):

$$\sum_{k=1}^{p^{n+m}} \lambda_k \varphi_\alpha(|x_i - x_k|_p) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, p^{n+m}. \quad (2)$$

Аппроксимант вида (1) называется p -адическим сплайном.

Следующая лемма является вспомогательной при доказательстве утверждения леммы 2.

Лемма 1. Функция $\varphi_\alpha(x) = |x|_p^{-\alpha}$ является непрерывной в $\mathbb{Z}_p$.

Доказательство. Т. к. функция $\varphi_\alpha|_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}}$ – локально-постоянная, то она непрерывна. Проверим непрерывность функции φ_α в точке нуль. Для этого нужно показать, что $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi_\alpha(x) = 0$. Бесконечно малая величина x представляется в виде

$$x = ap^{l(n)},$$

где

$$|a|_p = 1 \text{ и } l(n) \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Тогда

$$|\varphi_\alpha(x)|_p = \left| \left| ap^{l(n)} \right|_p^{-\alpha} \right|_p = p^{-\alpha l(n)}.$$

Если $x \rightarrow 0$, то $l(n) \rightarrow +\infty$ и $|\varphi_\alpha(x)|_p \rightarrow 0$. Поэтому $\varphi_\alpha \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$, что и требовалось доказать.

В данной статье исследуется расстояние в пространстве $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ между характеристической функцией шара $B[a, p^{-m}]$ (m – фиксированное неотрицательное целое число) и соответствующим p -адическим сплайном в зависимости от параметра α . Показано, что при $0 < \alpha \leq 1$ расстояние неуменьшаемо, а при $\alpha > 1$ расстояние вычисляется точно либо оценивается сверху величиной, стремящейся к нулю, когда n стремится к бесконечности.

Мы будем рассматривать случай, когда $f = I_{B[a, p^{-m}]}$, где $I_{B[a, p^{-m}]}$ – характеристическая функция шара $B[a, p^{-m}]$. Такой выбор функции f не ограничивает общности, поскольку $I_{B[a, p^{-m}]} \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ и конечные линейные комбинации характеристических функций шаров плотны в $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$. Задача интерполирования состоит в том, чтобы найти коэффициенты λ_k для функции вида (1) из равенства (2).

Формула (2) – это система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов λ_i , $i = 1, 2, \dots, p^{n+m}$, причем элементы матрицы этой системы равны

$$A_{ij} = \varphi_\alpha(|x_i - x_j|_p), i, j = 1, \dots, p^{n+m}.$$

Матрица A имеет вид

$$A = \sum_{k=1}^{n+m} (I_k - I_{k-1}) p^{\alpha(n+m-k)},$$

где $I_k = \left(\delta_{\left[\frac{i-1}{p^k} \right], \left[\frac{j-1}{p^k} \right]} \right)_{i,j=1}^{p^{n+m}}$, $k = 0, 1, \dots, n+m$ – блочно-диагональная матрица размерности

$p^{n+m} \times p^{n+m}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$ (подробнее в [4; 5]).

Более наглядно матрицу I_k можно изобразить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

Матрица A для случая, когда $p = 3$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3^\alpha & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 0 & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 3^\alpha & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3^\alpha & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 0 & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 3^\alpha & 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 3^\alpha & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 0 & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 3^\alpha & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

Преобразуем матрицу к виду $A = \sum_{k=0}^{n+m} a_k I_k$. Тогда имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{n+m} (I_k - I_{k-1}) p^{\alpha(n+m-k)} = (I_1 - I_0) p^{\alpha(n+m-1)} + (I_2 - I_1) p^{\alpha(n+m-2)} + \dots + \\ &\quad + (I_{n+m} - I_{n+m-1}) p^{\alpha(n+m-n-m)} = -I_0 p^{\alpha(n+m-1)} + \\ &\quad + I_1 p^{\alpha(n+m-2)} (p^\alpha - 1) + \dots + I_k p^{\alpha(n+m-k+1)} (p^\alpha - 1) + \dots + I_n p^{\alpha(n+m-n-m)}, \end{aligned}$$

откуда получим значения коэффициентов:

$$a_0 = -p^{\alpha(n+m-1)}, \quad a_k = p^{\alpha(n+m-k-1)} (p^\alpha - 1), \quad k = 1, \dots, n+m-1, \quad (3)$$

$$a_{n+m} = 1. \quad (4)$$

Тогда для матрицы A (см. [2]) существует обратная матрица

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{n+m} b_k I_k, \quad (5)$$

где

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_k = -\frac{a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i}, \quad k = 1, \dots, n+m. \quad (6)$$

Справедлива следующая теорема о вычислении коэффициентов λ_k для сплайна вида (1).

Теорема 2. Задача (2) имеет единственное решение для любой правой части, а для $f = I_{B[a, p^{-m}]}$ коэффициенты λ_i вычисляются по следующим формулам:

$$\lambda_i = \sum_{k=0}^n b_k p^k + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k, \quad 1 \leq i \leq p^{n+m} : x_i \in B[a, p^{-m}], \quad (7)$$

$$\lambda_i = p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k, \quad 1 \leq i \leq p^{n+m} : x_i \in S[a, p^{-m+N}], \text{ где } N = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Для доказательства теоремы о приближении функции из пространства $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ p -адическим сплайном вида (1) нам потребуется следующее утверждение, являющееся обобщением утверждения: если $|x|_p > |y|_p$, то $|x+y|_p = |x|_p$, которое доказывается методом математической индукции [3].

Утверждение 1. Если $|x_1|_p > \dots > |x_n|_p$, то $|x_1 + \dots + x_n|_p = |x_1|_p$.

Чтобы доказать равномерную сходимость данного p -адического сплайна к характеристической функции шара, нужно вначале показать справедливость следующей леммы.

Лемма 2. Справедлива следующая формула:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = \max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}}. \quad (9)$$

Доказательство. Возьмем произвольный $x \in \mathbb{Z}_p = \bigcup_{k=1}^{p^{n+m}} B[x_k, p^{-n-m}]$. Очевидно, что x попадет в некоторый шар $B[x_\nu, p^{-n-m}]$, $\nu \in \{1, 2, \dots, p^{n+m}\}$. Рассмотрим модуль разности:

$$\left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - \sum_{i=1}^{p^{n+m}} \lambda_i \varphi_\alpha(|x - x_i|_p) \right|_p. \quad (10)$$

Поскольку $|x - x_i|_p = |x_i - x_\nu|_p$, $\forall i \neq \nu$, $i = 1, \dots, p^{n+m}$ (утверждение 1), то левая часть равенства (10) приведет к виду:

$$\begin{aligned} & \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \lambda_i \varphi_\alpha(|x_\nu - x_i|_p) - \sum_{i=\nu+1}^{p^{n+m}} \lambda_i \varphi_\alpha(|x_\nu - x_i|_p) - \lambda_\nu \varphi_\alpha(|x - x_\nu|_p) \right|_p = \\ & = \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x_\nu, \alpha) - \lambda_\nu \varphi_\alpha(|x - x_\nu|_p) \right|_p = \\ & = \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - I_{B[a, p^{-m}]}(x_\nu) - \lambda_\nu \varphi_\alpha(|x - x_\nu|_p) \right|_p. \end{aligned} \quad (11)$$

Т. к. $x \in B[x_v, p^{-n-m}]$ и поскольку в $\mathbb{Q}_p$ шары либо не пересекаются, либо шар с меньшим радиусом содержится в шаре с большим радиусом, то либо

$$B[x_v, p^{-n-m}] \cap B[a, p^{-m}] = \emptyset,$$

и тогда

$$I_{B[a, p^{-m}]}(x) = I_{B[a, p^{-m}]}(x_v) = 0,$$

либо

$$B[x_v, p^{-n-m}] \subset B[a, p^{-m}],$$

и тогда

$$I_{B[a, p^{-m}]}(x) = I_{B[a, p^{-m}]}(x_v) = 1.$$

В обоих случаях имеем

$$I_{B[a, p^{-m}]}(x) = I_{B[a, p^{-m}]}(x_v).$$

Отсюда, учитывая (10) и (11), получим равенство:

$$\left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = |\lambda_v|_p \frac{1}{\left| |x - x_v|_p \right|_p^\alpha}, \quad x \in \mathbb{Z}_p. \quad (12)$$

Возьмем максимум от обеих частей, при этом получим:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = |\lambda_v|_p \frac{1}{\left| |x^* - x_v|_p \right|_p^\alpha}, \quad x^* \in B[x_v, p^{-m-n}],$$

где x^* — точка, в которой достигается максимум правой части равенства (12), согласно лемме 1 о непрерывности функции $\varphi_\alpha(x)$ в $\mathbb{Z}_p$. Чтобы значение правой части (12) было максимальным, необходимо и достаточно, чтобы $x^* \in S[x_v, p^{-m-n}]$ и было максимальным число $|\lambda_v|_p$. Удовлетворив этим требованиям, получим утверждение леммы.

Используя результаты леммы 2, получаем теорему о равномерном приближении характеристической функции шара с помощью p -адического сплайна.

Теорема 3. Пусть $\alpha \in \mathbb{Q}$. Тогда справедливы соотношения:

- 1) $\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = \frac{1}{p^{(\alpha-1)(n+1)}} \text{ для } \alpha > 2.$
- 2) $\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, 2) \right|_p = \frac{1}{p^{(n+1)}} \text{ для } \alpha = 2.$
- 3) $\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = \frac{p^{(2-\alpha)m+\alpha-3}}{p^{(\alpha-1)n}} \text{ для } 1 < \alpha < 2.$
- 4) $\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[0,1]}(x) - L_{n,m}(x, 1) \right|_p \geq \frac{1}{p} \text{ для } \alpha = 1.$

$$5) \max_{x \in \mathbb{Z}_p} |I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha)|_p = \frac{1}{p^\alpha} \text{ для } 0 < \alpha < 1.$$

где сплайн $L_{n,m}(x, \alpha) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \frac{\lambda_k}{|x-k|_p^\alpha}$, $\alpha > 1, \alpha \in \mathbb{Q}$, $\lambda_k \in \{1, \dots, p^{n+m}\}$.

В $\mathbb{Q}_p$ норма $|p^\alpha|_p = p^{-\alpha}$ принимает дискретные значения, равные целой степени p . Но т. к. $\alpha \in \mathbb{Q}$, то в данном случае функция f будет принимать значения не из поля $\mathbb{Q}_p$, а из поля K , являющегося трансцендентным расширением поля $\mathbb{Q}_p$, содержащего $\mathbb{Q}_p$ и p^α .

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает из леммы 2. Надо лишь найти значение $\max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p$ и подставить его в выражение (9). Для вычисления максимума нужно воспользоваться формулами (5), (6) и утверждением 2.

Вначале докажем теорему для случая, когда $\alpha \geq 2$. Из формул (3), (4) следует, что

$$|a_k|_p = p^{-\alpha(n+m-k-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n+m-1, \quad |a_{n+m}|_p = 1. \quad (13)$$

Подставим в формулу (7) значения b_k , $k = 0, 1, \dots, n+m$, в соответствии с равенствами (6):

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \sum_{k=0}^n b_k p^k + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^n \frac{-a_k p^k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} + \\ &+ p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sum_{i=0}^k a_i p^i} - \frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i} \right) + \\ &+ p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} = \frac{1}{a_0} + \left(\frac{1}{\sum_{i=0}^1 a_i p^i} - \frac{1}{a_0} \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{\sum_{i=0}^2 a_i p^i} - \frac{1}{\sum_{i=0}^1 a_i p^i} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} - \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i} \right) + \\ &+ p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i}. \end{aligned}$$

В итоге выражение (7) примет вид

$$\lambda_i = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i}. \quad (14)$$

Вычислим p -адический модуль от слагаемых в (14), используя равенства (13). Тогда $|a_i p^i|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)i}$ и, используя утверждение 1, имеем

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i p^i \right|_p = \left| a_0 + \sum_{i=1}^n a_i p^i \right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)n}. \quad (15)$$

В результате первое слагаемое (14) примет вид:

$$\left| \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \right|_p = p^{\alpha(n+m-1)-(\alpha-1)n} = p^{\alpha(m-1)+n}. \quad (16)$$

Для того чтобы найти p -адический модуль $|b_k|_p$, вычислим p -адические модули выражений

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \right|_p &= \left| a_0 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i p^i \right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)(k-1)}, \\ \left| \sum_{i=0}^k a_i p^i \right|_p &= \left| a_0 + \sum_{i=1}^k a_i p^i \right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)k}. \end{aligned}$$

Тогда окончательный результат для $|b_k|_p$ будет следующим:

$$|b_k|_p = \left| \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} \right|_p = \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)k}}, \text{ где } k = n+1, \dots, n+m-1. \quad (17)$$

Теперь вычислим $|b_{n+m}|_p$. Для этого нужно вычислить p -адические модули

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p &= \left| a_0 + \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p = \max \left\{ \left| -p^{-\alpha(n+m-1)} \right|_p, \left| \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p \right\} = \\ &= \max \left\{ p^{-\alpha(n+m-1)}, \left| \sum_{i=1}^{n+m-1} p^{\alpha(n+m-1)} \cdot (p^\alpha - 1) \cdot p^{(1-\alpha)i} \right|_p \right\} = \\ &= \max \{ p^{-\alpha(n+m-1)}, p^{-n-m+1} \} = p^{-n-m+1}, \\ \left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i \right|_p &= \left| a_0 + \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i + a_{n+m} p^{n+m} \right|_p = \\ &= \max \left\{ \left| -p^{-\alpha(n+m-1)} \right|_p, \left| \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p, |a_{n+m} p^{n+m}|_p \right\} = \\ &= \max \{ p^{-\alpha(n+m-1)}, p^{-n-m+1}, p^{-n-m} \} = p^{-n-m+1}. \end{aligned}$$

В итоге получим:

$$|b_{n+m}|_p = \left| \frac{-1}{\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i} \right|_p = p^{-2(n+m-1)}. \quad (18)$$

Рассмотрим два случая. Если $\alpha > 2$, то $|b_{n+1}|_p$ больше всех остальных $|b_k|_p$, $k = n+2, \dots, n+m$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m} \right|_p = \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k \right|_p, |b_{n+m}|_p \right\} = \\ &= \max \left\{ \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)(n+1)}}, p^{-2(n+m-1)} \right\} = \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)(n+1)}} = |b_{n+1}|_p. \end{aligned}$$

Отсюда при $\alpha > 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{-n} \cdot |b_{n+1}|_p = p^{-n} \cdot \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)(n+1)}} = p^{\alpha(m-1)+n+1}. \quad (19)$$

Если $\alpha = 2$, то $|b_{n+1}|_p = |b_{n+2}|_p = \dots = |b_{n+m-1}|_p = p^{2m+2n-1} > |b_{n+m}|_p$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m} \right|_p \leq \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k \right|_p, |b_{n+m}|_p \right\} = \\ &= \max \left\{ p^{2(n+m)-1}, p^{-2(n+m-1)} \right\} = p^{2(n+m)-1} = |b_{n+1}|_p. \end{aligned}$$

При $\alpha = 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p \leq p^{-n} \cdot |b_{n+1}|_p = p^{-n} \cdot \frac{p^{2(n+m)-1}}{p^{(2-2)(n+1)}} = p^{2m+n-1}. \quad (20)$$

Очевидно, что значение модуля из формулы (19) и формулы (20) больше модуля из формулы (16). Поэтому модуль правой части равенства (14) для $\alpha > 2$ равен $p^{\alpha(m-1)+n+1}$, а для $\alpha = 2$ не превосходит p^{2m+n-1} . По доказанному видно, что для $\alpha > 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k \right|_p \leq \left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1}$$

для всех $N = 1, \dots, m$, а для $\alpha = 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k \right|_p \leq \left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{2m+n-1}$$

для всех $N = 1, \dots, m$. Отсюда вытекает равенство

$$\max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1}, \quad \text{где } \alpha > 2. \quad (21)$$

В силу (20) имеем неравенство

$$\max_{k=1,\dots,p^{n+m}} |\lambda_k|_p \leq p^{2m+n-1}, \quad \text{где } \alpha = 2. \quad (22)$$

Подставляя (21) в (9), для $\alpha > 2$ получим:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1} \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}} = \frac{1}{p^{(\alpha-1)(n+1)}}. \quad (23)$$

Это эквивалентно утверждению 1 теоремы.

Подставляя (22) в (9), для $\alpha = 2$ имеем:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p \leq p^{2m+n-1} \cdot \frac{1}{p^{2(n+m)}} = \frac{1}{p^{n+1}}. \quad (24)$$

Это эквивалентно утверждению 2 теоремы.

Теперь рассмотрим случай $1 < \alpha < 2$.

Значение p -адического модуля для коэффициентов из формул (3) и (4) будет равно:

$$|a_i|_p = p^{-\alpha(n+m-i-1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n+m-1, \quad |a_{n+m}|_p = 1. \quad (25)$$

Вычислим p -адический модуль от слагаемых в (14), используя формулы (25).

Получим: $|a_i p^i|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)i}$, $i = 0, 1, \dots, n+m-1$,

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i p^i \right|_p = |a_n p^n|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)n}, \quad (26)$$

$$\left| \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \right|_p = p^{\alpha(n+m-1)-(\alpha-1)n} = p^{\alpha(m-1)+n}. \quad (27)$$

Чтобы найти p -адические модули коэффициентов $|b_k|_p$, вычислим p -адические модули приведенных ниже сумм для случая, когда $1 < \alpha < 2$:

$$\left| \sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \right|_p = |a_{k-1} p^{k-1}|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)(k-1)},$$

$$\left| \sum_{i=0}^k a_i p^i \right|_p = |a_k p^k|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)k}.$$

Тогда значение p -адического модуля для $|b_k|_p$ для данного случая будет иметь вид:

$$|b_k|_p = \left| \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} \right|_p = \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)k}}, \quad \text{где } k = n+1, \dots, n+m-1. \quad (28)$$

Теперь вычислим $|b_{n+m}|_p$. Для этого нужно вычислить p -адические модули следующих сумм:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p &= \left| a_{n+m-1} p^{n+m-1} \right|_p = p^{-(n+m-1)}. \\
\left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i \right|_p &= \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i + a_{n+m} p^{n+m} \right|_p = \max \left\{ \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p, \left| a_{n+m} p^{n+m} \right|_p \right\} = \\
&= \max \{ p^{-(n+m-1)}, p^{-n-m} \} = p^{-(n+m-1)}.
\end{aligned}$$

В итоге получим значение p -адического модуля для b_{n+m} :

$$\left| b_{n+m} \right|_p = \left| \frac{-1}{\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i} \right|_p = p^{2(n+m-1)}. \quad (29)$$

Если $1 < \alpha < 2$, то $|b_{n+1}|_p$ больше всех остальных $|b_k|_p$, $k = n+2, \dots, n+m$. Тогда

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m} \right|_p = \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k \right|_p, |b_{n+m}|_p \right\} = \\
&= \max \{ p^{2(n+m)+\alpha-3}, p^{2(n+m-1)} \} = p^{2(n+m)+\alpha-3} = |b_{n+1}|_p.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{-n} \cdot |b_{n+m-1}|_p = p^{-n} \cdot p^{2(n+m)+\alpha-3} = p^{n+2m+\alpha-3}. \quad (30)$$

Очевидно, что p -адический модуль (30) больше p -адического модуля (27). Поэтому модуль правой части равенства (14) для $1 < \alpha < 2$ равен $p^{n+2m+\alpha-3}$. Из доказанного видно, что для $1 < \alpha < 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k \right|_p \leq \left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{n+2m+\alpha-3} \quad \text{для всех } N=1, \dots, m.$$

Тогда

$$\max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p = p^{n+2m+\alpha-3}. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (9), имеем:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = p^{n+2m+\alpha-3} \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}} = \frac{p^{(2-\alpha)m+\alpha-3}}{p^{(\alpha-1)n}}. \quad (32)$$

В каждом из условий 1–3 теоремы 3 справа стоит некоторая вещественнозначная функция ошибки, зависящая от параметра α . Найдем пределы слева и справа в точке $\alpha = 2$. Тогда из соотношений 1 и 3 теоремы 3 имеем:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2+0} \frac{1}{p^{(\alpha-1)(n+1)}} = \frac{1}{p^{n+1}},$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2-0} \frac{p^{(2-\alpha)m+\alpha-3}}{p^{(\alpha-1)n}} = \lim_{\alpha \rightarrow 2-0} \frac{p^{-1}}{p^n} = \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Отсюда видно, что пределы слева и справа в точке $\alpha = 2$ совпадают и равняются значению функции ошибки в той же самой точке $\alpha = 2$ (теорема 3 соотношение 2), т. е.

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} |I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, 2)|_p = \frac{1}{p^{(n+1)}}, \text{ где } \alpha = 2.$$

Это эквивалентно утверждению 3 теоремы.

Покажем, что при $\alpha = 1$ выражение

$$\left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, 1) \right|_p$$

не стремится к нулю. Для этого достаточно привести хотя бы один контрпример. Пусть $m = 0$. Тогда

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^n b_k p^k = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \text{ для всех } j = 1, \dots, p^n$$

и с учетом формул (3) и (4) справедлива оценка

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i p^i \right|_p = \left| p^{n-1}(n(p-1)-1) \right|_p \leq p^{-n+1} |n(p-1)-1|_p \leq p^{-n+1},$$

из которой следует соотношение:

$$|\lambda_j|_p \geq p^{n-1}. \quad (33)$$

Используя (33) в правой части формулы (9), получим:

$$\max_{k=1, \dots, p^n} |\lambda_k|_p \cdot \frac{1}{p^n} \geq \frac{p^{n-1}}{p^n} = \frac{1}{p}. \quad (34)$$

Это эквивалентно утверждению 4 теоремы.

Пусть $0 < \alpha < 1$. В этом случае значение p -адического модуля для коэффициентов из формул (3) и (4) будет равно:

$$|a_i|_p = p^{-\alpha(n+m-i-1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n+m-1, \quad |a_{n+m}|_p = 1. \quad (35)$$

Вычислим p -адический модуль от слагаемых в (14), используя формулы (35).

Тогда $|a_i p^i|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)i}$, $i = 0, 1, \dots, n+m-1$, и т. к. $|a_0|_p > |a_1 p|_p > \dots > |a_{n+m-1} p^{n+m-1}|_p$,

то

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i p^i \right|_p = |a_0|_p = p^{-\alpha(n+m-1)}, \quad (36)$$

откуда

$$\left| \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \right|_p = p^{\alpha(n+m-1)} = p^{\alpha n + \alpha(m-1)}. \quad (37)$$

Чтобы найти p -адические модули коэффициентов $|b_k|_p$, вычислим p -адические модули следующих выражений для случая, когда $0 < \alpha < 1$:

$$\left| \sum_{i=0}^k a_i p^i \right|_p = |a_0|_p = p^{-\alpha(n+m-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n+m-1.$$

В итоге значение p -адического модуля для $|b_k|_p$ примет вид:

$$|b_k|_p = \left| \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} \right|_p = p^{\alpha(n+m+k-1)}, \quad \text{где } k = n+1, \dots, n+m-1. \quad (38)$$

Далее вычислим $|b_{n+m}|_p$, для чего нужно вычислить суммы

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p &= |a_0|_p = p^{-\alpha(n+m-1)}. \\ \left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i \right|_p &= \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i + a_{n+m} p^{n+m} \right|_p = \max \{ p^{-\alpha(n+m-1)}, |a_{n+m} p^{n+m}|_p \} = \\ &= \max \{ p^{-\alpha(n+m-1)}, p^{-n-m} \} = p^{-\alpha(n+m-1)}. \end{aligned}$$

В результате получим:

$$|b_{n+m}|_p = \left| \frac{-1}{\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i} \right|_p = p^{2\alpha(n+m-1)}. \quad (39)$$

Если $0 < \alpha < 1$, то $|b_{n+1}|_p < |b_{n+2}|_p < \dots < |b_{n+m-1}|_p = |b_{n+m}|_p$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m} \right|_p \leq \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k \right|_p, |b_{n+m}|_p \right\} = \\ &= \max \{ p^{2\alpha(n+m-1)}, p^{2\alpha(n+m-1)} \} = p^{2\alpha(n+m-1)} = |b_{n+m-1}|_p. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p \leq p^{-n} \cdot |b_{n+m-1}|_p = p^{-n} \cdot p^{2\alpha(n+m-1)} = p^{(2\alpha-1)n+2\alpha(m-1)}. \quad (40)$$

Поскольку p -адический модуль (37) больше p -адического модуля (40) для достаточно больших n $\left(n > \frac{\alpha(m-1)}{1-\alpha} \right)$, то

$$\max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p = p^{\alpha(n+m-1)}. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (9), имеем:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = p^{\alpha(n+m-1)} \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}} = \frac{1}{p^\alpha}, \quad (42)$$

что эквивалентно утверждению 5 теоремы.

Согласно теореме 1, любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить локально постоянной функцией. Исследуемые непрерывные функции рассматриваются на множестве целых p -адических чисел. Но поскольку известно, что $\mathbb{Z}_p$ является компактом, то локально постоянная функция есть конечная линейная комбинация характеристических функций шаров. Следовательно, данную функцию можно равномерно приблизить конечной линейной комбинацией характеристических функций шаров, т. е.

$$\sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]} \rightrightarrows f(x), \quad \max_{k=1, \dots, N} m_k \rightarrow \infty, \quad \mu_k = f(a_k) \in \mathbb{K}.$$

На основании теоремы 1 и данных рассуждений покажем справедливость следующей теоремы о равномерной сходимости p -адического сплайна к непрерывной $\mathbb{Q}_p$ -значной функции, заданной на $\mathbb{Z}_p$, если параметр $\alpha > 1$ и $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Теорема 3. Для любой функции $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ существует последовательность $L_{n,m}(x, \alpha)$, где $\alpha > 1$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \mathbb{Q}_p} |L_{n,m}(x, \alpha) - f(x)|_p = 0. \quad (43)$$

Доказательство. Т. к. функцию $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ можно равномерно приблизить линейной комбинацией характеристических функций шаров, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $N \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| \sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - f(x) \right|_p < \varepsilon, \quad \text{для всех } x \in \mathbb{Z}_p. \quad (44)$$

Запишем сильное неравенство треугольника для $|\cdot|_p$:

$$\begin{aligned} & |L_N(x, \alpha) - f(x)|_p = \\ & = \left| L_N(x, \alpha) - \sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) + \sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - f(x) \right|_p \leq \\ & \leq \max \left\{ \left| L_N(x, \alpha) - \sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) \right|_p, \left| \sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - f(x) \right|_p \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$L_N(x, \alpha) = \sum_{k=1}^N \mu_k L_{n_k, m_k}(x, \alpha).$$

Т. к. по теореме 3 p -адический сплайн равномерно приближает характеристическую функцию шара, то справедливы следующие оценки:

существует такой номер ν_1 , что для любого $n_1 > \nu_1$

$$\left| I_{B[a_1, p^{-m_1}]}(x) - L_{n_1, m_1}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max_{1, \dots, N} |\mu_1|_p},$$

существует такой номер ν_2 , что для любого $n_2 > \nu_2$

$$\left| I_{B[a_2, p^{-m_2}]}(x) - L_{n_2, m_2}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max_{1, \dots, N} |\mu_2|_p},$$

...

существует такой номер ν_k , что для любого $n_k > \nu_k$

$$\left| I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max_{1, \dots, N} |\mu_k|_p},$$

...

существует такой номер ν_N , что для любого $n_N > \nu_N$

$$\left| I_{B[a_N, p^{-m_N}]}(x) - L_{n_N, m_N}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max_{1, \dots, N} |\mu_N|_p},$$

для $k = 1, \dots, N$. Т. к. этих номеров конечное число, то выберем из них максимальный такой, что

$$\nu = \max \{N_\varepsilon, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N\}.$$

Тогда для любого $n_k > \nu$ будем иметь

$$\left| I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max_{1, \dots, N} |\mu_k|_p}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - \sum_{k=1}^N \mu_k L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p = \\ & = \left| \sum_{k=1}^N \mu_k \left(I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right) \right|_p \leq \\ & \leq \max_{1, \dots, N} |\mu_k|_p \cdot \left| I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (46)$$

Т. к. первый член неравенства (45) меньше ε согласно неравенству (44), а второй меньше ε согласно выражению (46), то данное неравенство примет вид

$$|L_N(x, \alpha) - f(x)|_p \leq \varepsilon,$$

что эквивалентно выражению (42).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schikhof, W. Ultrametric calculus / W. Schikhof. – Cambridge : University Press, 1984.
2. *p*-адический анализ и математическая физика / В. С. Владимиров [и др.]. – М. : Наука, 2001. – 352 с.
3. Радына, А. Я. Элементарныя ўводзіны ў *p*-адычны аналіз : дапаможнік / А. Я. Радына, Я. В. Радына. – Мінск : БДПУ, 2006. – 82 с.
4. Khrennikov, A. *p*-Adic interpolation and approximation of a continuous function by linear combinations of shifts of *p*-adic valuations / A. Khrennikov, A. Radyna // Journal of Approximation Theory. – 2003. – № 120. – P. 124–135.
5. Радына, А. Я. Інтэрпаляцыя і набліжэнне *p*-адычнымі лінейнымі сплайнамі функцыі класа $C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{R})$ / А. Я. Радына // Вес. НАН Беларусі. – 2004. – № 2. – С. 21–24.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 30.09.2019

Sender A. N. *p*-adic Splines for Approximation of Local Constant Functions from $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$

*The article is devoted to approximation of continuous *p*-adic function of *p*-adic argument by *p*-adic splines that is functions of the form $L_{n,m}(x, \alpha) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \frac{\lambda_k}{|x - k|_p^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ where their parameters are defined from interpolation relations by a function to be approximated. The theorem about uniform approximation of a continuous function by such splines is proved for different $\alpha \in \mathbb{Q}$.*