УДК 539.12

Е.М. Овсиюк[1], Я.А. Войнова[2], О.В. Веко[3], В.М. Редьков[4]

[1]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина*

[2]*учитель физики Качищанской средней школы Ельского района*

[3]*учитель физики гимназии г. Калинковичи*

[4]*д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник лаборатории теоретической физики Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси*

e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

К АНАЛИЗУ ТУННЕЛЬНОГО ЭФФЕКТА ДЛЯ МАССИВНОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2 В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Исследуется явление туннелирования массивных частиц со спином 1/2 через эффективный потенциальный барьер, создаваемый статической геометрией черной дыры Шварцшильда. Анализ основан на использовании 8 точных решений фробениусовского типа радиального уравнения 2-го порядка с двумя регулярными особыми точками и двумя нерегулярными точками ранга 2. Эти решения построены в явном виде, на основе использования метода Пуанкаре – Перрона доказана сходимость входящих в эти решения степенных рядов во всей физической области изменения радиальной переменной. Результаты эффекта туннелирования зависят от того, откуда частицы падают на барьер: извне или изнутри черной дыры. Структура выведенных выражений для коэффициентов прохождения и отражения является математически точной, однако аналитические выражения для сумм сходящихся рядов неизвестны, эта часть исследования должна базироваться на численном анализе.

Введение

В работе [1] исследовалась безмассовая частица со спином 1/2 в статическом пространстве-времени Шварцшильда; в частности, был изучен процесс туннелирования такой частицы через эффективный потенциальный барьер на основе построения решений Фробениуса возникающего дифференциального уравнения второго порядка [2–13] (хотя опубликованных работ по этой тематике намного больше). В настоящей работе анализ распространен на случай массивной спинорной частицы.

Кратко содержание настоящей работы сводится к следующему. После разделения переменных в уравнении Дирака в статической метрике Шварцшильда выведена система двух радиальных дифференциальных уравнений первого порядка. Из этой системы получено дифференциальное уравнение второго порядка. В системе координат r_*

$$r_* = r + \ln(r-1), \quad r \in (1,+\infty), \quad r_* \in (-\infty,+\infty)$$

уравнение приводится к виду:

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + P^2(r;\varepsilon,M,j)\right] f = 0,$$

где ε, j – квантовые числа энергии и полного момента частицы, M – масса частицы.

Вид уравнения в областях около радиуса Шварцшильда и на бесконечности ($r \to 1,+\infty$) допускает решения с асимптотиками, характерными для плоских волн:

$$r \to +1\ (r_* \to -\infty),\ f = e^{\pm i\varepsilon r_*}, \qquad r \to \infty\ (r_* \to +\infty),\ f = e^{\pm i\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}\, r_*};$$

в области радиуса Шварцшильда масса M частицы эффективно себя не проявляет.

Графики, описывающие поведение кривых эффективного импульса $P^2(r;\varepsilon,M,j)$, указывают на то, что имеем ситуацию возможного туннелирования частиц через запрещенную для классического движения область, двигаясь на этот барьер слева или справа (другими словами, изнутри или извне черной дыры).

Анализ возникающего дифференциального уравнения проводится в переменной $\sqrt{1-1/r}=x, x\in(0,1)$. Учет ненулевой массы приводит к усложнению структуры сингулярных точек [14; 15], добавляется одна регулярная особенность в точке $x=\varepsilon/M$:

$$[0_1,(+1)_2,(-1)_2,\infty_1] \qquad \Rightarrow \qquad [0_1,(+1)_2,(-1)_2,\infty_1;c_1].$$

Для найденного уравнения построены 16 типов решений фробениусовского типа, показано, что вовлеченные в них степенные ряды сходятся во всей физической области изменения переменной $x\in(0,1)$. На основе использования этих решений возможен анализ прохождения частиц, падающих на барьер слева или справа. Использованная в [1] методика претерпевает некоторые изменения, оставаясь в главных чертах той же.

1. Основные дифференциальные уравнения

Исходим из системы радиальных уравнений, полученной после разделения переменных в уравнении Дирака в пространстве-времени со статической метрикой Шварцшильда [2]:

$$dS^2=\Phi dt^2-\Phi^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2)\,,\quad \Phi=(1-\frac{1}{r});$$

имеем уравнения [1]:

$$\left(\Phi\frac{d}{dr}+\frac{\nu\sqrt{\Phi}}{r}\right)f=-(\varepsilon+M\sqrt{\Phi})\,g\,,\quad \left(\Phi\frac{d}{dr}-\frac{\nu\sqrt{\Phi}}{r}\right)g=+(\varepsilon-M\sqrt{\Phi})\,f\,.$$

Введем новую переменную, позволяющую избавиться от квадратного корня:

$$\sqrt{\Phi}=\sqrt{1-1/r}=x,\quad \frac{1}{r}=1-x^2,\quad 2x\frac{dx}{dr}=\frac{1}{r^2}=(1-x^2)^2,$$
$$\Phi\frac{d}{dr}=x^2\frac{dx}{dr}\frac{d}{dx}=\frac{1}{2}x(1-x^2)^2\frac{d}{dx},\quad \frac{\sqrt{\Phi}}{r}=x(1-x^2),$$
$$r\to1, x\to0\,;\quad r\to+\infty, x\to\pm1\,;\quad r\to0,\quad x\to\pm i\infty\,.$$

Физической областью изменения переменной x является интервал $x\in(0,1)$. В этой переменной система уравнений первого порядка примет вид:

$$\left(\frac{x(1-x^2)^2}{2}\frac{d}{dx}+\nu x(1-x^2\right)f=-(\varepsilon-Mx)g\,,$$
$$\left(\frac{x(1-x^2)^2}{2}\frac{d}{dx}-\nu x(1-x^2\right)g=+(\varepsilon+Mx)g\,,$$

или кратко:

$$\left(F\frac{d}{dx}+\nu G\right)f=-(\varepsilon-Mx)g\,,\quad \left(F\frac{d}{dx}-\nu G\right)g=+(\varepsilon+Mx)g\,.$$

Отсюда следуют уравнения второго порядка (отмечаем симметрию относительно замен: $\nu \Rightarrow -\nu, M \Rightarrow -M, f \Rightarrow g$)

$$\left[(\varepsilon + Mx)(F\frac{d}{dx} + \nu G)\frac{1}{\varepsilon + Mx}(F\frac{d}{dx} - \nu G) + (\varepsilon^2 - M^2x^2) \right] f = 0,$$

$$\left[(\varepsilon - Mx)(F\frac{d}{dx} - \nu G)\frac{1}{\varepsilon - Mx}(F\frac{d}{dx} + \nu G) + (\varepsilon^2 - M^2x^2) \right] g = 0.$$

Учтем сначала равенства

$$(\varepsilon - Mx)\left(F\frac{d}{dx} - \nu G \right)\frac{1}{\varepsilon - Mx} = F\frac{d}{dx} + \frac{M}{\varepsilon - Mx}F - \nu G,$$

$$(\varepsilon + Mx)\left(F\frac{d}{dx} + \nu G \right)\frac{1}{\varepsilon + Mx} = F\frac{d}{dx} - \frac{M}{\varepsilon + Mx}F + \nu G,$$

затем равенства

$$\left(F\frac{d}{dx} + \frac{M}{\varepsilon - Mx}F - \nu G \right)\left(F\frac{d}{dx} + \nu G \right) =$$

$$= F^2\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{F'}{F} + \frac{M}{\varepsilon - Mx} \right)\frac{d}{dx} + \nu\frac{G'}{F} - \nu^2\frac{G^2}{F^2} + \nu\frac{M}{\varepsilon - Mx}\frac{G}{F} \right],$$

$$\left(F\frac{d}{dx} - \frac{M}{\varepsilon + Mx}F + \nu G \right)\left(F\frac{d}{dx} - \nu G \right) =$$

$$= F^2\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{F'}{F} - \frac{M}{\varepsilon + Mx} \right)\frac{d}{dx} - \nu\frac{G'}{F} - \nu^2\frac{G^2}{F^2} + \nu\frac{M}{\varepsilon + Mx}\frac{G}{F} \right].$$

Затем находим

$$\frac{F'}{F} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1}, \quad -\nu\frac{G'}{F} = -\nu\frac{2(1-3x^2)}{x(1-x^2)^2},$$

$$-\nu^2\frac{G^2}{F^2} = -\frac{4\nu^2}{(1-x^2)^2}, \quad \nu\frac{M}{\varepsilon + Mx}\frac{G}{F} = \frac{M}{\varepsilon + Mx}\frac{2\nu}{1-x^2}.$$

Уравнение для $f(x)$ примет вид (пусть $c = \varepsilon/M$):

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+c} \right)\frac{d}{dx} - \right.$$

$$\left. -\nu\frac{2(1-3x^2)}{x(1-x^2)^2} - \frac{4\nu^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x+c}\frac{2\nu}{1-x^2} + (\varepsilon^2 - M^2x^2)\frac{4}{x^2(1-x^2)^4} \right\} f(x) = 0. \qquad (1.1)$$

Уравнение для функции $g(x)$ записывается аналогично

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-c} \right)\frac{d}{dx} + \right.$$

$$\left. +\nu\frac{2(1-3x^2)}{x(1-x^2)^2} - \frac{4\nu^2}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{x-c}\frac{2\nu}{1-x^2} + (\varepsilon^2 - M^2x^2)\frac{4}{x^2(1-x^2)^4} \right\} g(x) = 0. \qquad (1.2)$$

Эти уравнения симметричны относительно замен $f \Rightarrow g, \nu \Rightarrow -\nu, c \Rightarrow -c$.

Для дальнейшего удобно иметь все дроби, разложенными на простые. Тогда последние два уравнения запишутся так:

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} f + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+c} \right) \frac{d}{dx} f + \right.$$

$$+ \left\{ \frac{-8\nu^2 + 35\varepsilon^2 + 8\nu - 5M^2 + 8\nu/(c-1)}{8(x+1)} + \frac{+8\nu^2 - 35\varepsilon^2 + 8\nu + 5M^2 - 8\nu/(c+1)}{8(x-1)} + \right.$$

$$+ \frac{-8\nu^2 + 19\varepsilon^2 - 8\nu - 5M^2}{8(x+1)^2} + \frac{-8\nu^2 + 19\varepsilon^2 + 8\nu - 5M^2}{8(x-1)^2} +$$

$$\left. + \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(x+1)^3} + \frac{-\varepsilon^2 + M^2/2}{(x-1)^3} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x+1)^4} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x-1)^4} - \frac{2\nu}{x} + \frac{4\varepsilon^2}{x^2} - \frac{2\nu}{c^2-1} \cdot \frac{1}{x+c} \right\} f = 0,$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} g + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-c} \right) \frac{d}{dx} g - \right.$$

$$+ \left\{ \frac{-8\nu^2 + 35\varepsilon^2 - 8\nu - 5M^2 + 8\nu/(c+1)}{8(x+1)} + \frac{+8\nu^2 - 35\varepsilon^2 - 8\nu + 5M^2 - 8\nu/(c-1)}{8(x-1)} + \right.$$

$$+ \frac{-8\nu^2 + 19\varepsilon^2 + 8\nu - 5M^2}{8(x+1)^2} + \frac{-8\nu^2 + 19\varepsilon^2 - 8\nu - 5M^2}{8(x-1)^2} +$$

$$\left. + \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(x+1)^3} + \frac{-\varepsilon^2 + M^2/2}{(x-1)^3} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x+1)^4} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x-1)^4} + \frac{2\nu}{x} + \frac{4\varepsilon^2}{x^2} + \frac{2\nu}{c^2-1} \cdot \frac{1}{x-c} \right\} g = 0.$$

2. Качественный анализ уравнений

Исходим из уравнений (напоминаем, что $\Phi\sqrt{1-1/r}$)

$$\left(\Phi \frac{d}{dr} + \frac{\nu\sqrt{\Phi}}{r} \right) f = -(\varepsilon + M\sqrt{\Phi}) g, \quad \left(\Phi \frac{d}{dr} - \frac{\nu\sqrt{\Phi}}{r} \right) g = +(\varepsilon - M\sqrt{\Phi}) f.$$

Преобразуем уравнения к другой переменной r_*, определяемой так:

$$\Phi \frac{d}{dr} = \frac{d}{dr_*}, \quad dr_* = \frac{dr}{1-1/r}, \quad r_* = r + \ln(r-1),$$

$$r_* \in (-\infty, +\infty), \quad r \to 1, \; r_* \to -\infty; \quad r \to \infty, \; r_* \to +\infty;$$

функция $r_*(r)$ монотонная, и ее первая производная положительна:

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r-1} > 0.$$

В новой переменной уравнения записываются таким образом:

$$\left[\frac{d}{dr_*} + \nu\varphi(r_*) \right] f = -(\varepsilon + M\sqrt{\Phi})\, g, \quad \left[\frac{d}{dr_*} - \nu\varphi(r_*) \right] g = +(\varepsilon - M\sqrt{\Phi})\, f,$$

где

$$\varphi(r_*)=\frac{\sqrt{\Phi}}{r}=\frac{\sqrt{1-1/r}}{r},$$

$$r_*\to-\infty\ (r\to 1),\ \varphi(r_*)\to 0, \qquad r_*\to+\infty, (r\to\infty), \varphi(r_*)\to 0.$$

Можем получить уравнения второго порядка для отдельных функций:

$$\left\{(\varepsilon-M\sqrt{\Phi})\left(\frac{d}{dr_*}+\nu\varphi(r_*)\right)\frac{1}{(\varepsilon-M\sqrt{\Phi})}\right\}\left(\frac{d}{dr_*}-\nu\varphi(r_*)\right)g+(\varepsilon^2-M^2\Phi)\,g=0,$$

$$\left\{(\varepsilon+M\sqrt{\Phi})\left(\frac{d}{dr_*}-\nu\varphi(r_*)\right)\frac{1}{(\varepsilon+M\sqrt{\Phi})}\right\}\left(\frac{d}{dr_*}+\nu\varphi(r_*)\right)f+(\varepsilon^2-M^2\Phi)\,f=0.$$

Эти уравнения симметричны, достаточно выполнять вычисления с одним из них. Рассмотрим члены (штрих обозначает производную d/dr^*)

$$(\varepsilon-M\sqrt{\Phi})\left(\frac{d}{dr_*}+\nu\varphi(r_*)\right)\frac{1}{(\varepsilon-M\sqrt{\Phi})}=\frac{d}{dr_*}+\nu\varphi(r_*)-\frac{(\varepsilon-M\sqrt{\Phi})'}{(\varepsilon-M\sqrt{\Phi})},$$

$$(\varepsilon+M\sqrt{\Phi})\left(\frac{d}{dr_*}-\nu\varphi(r_*)\right)\frac{1}{(\varepsilon+M\sqrt{\Phi})}=\frac{d}{dr_*}-\nu\varphi(r_*)-\frac{(\varepsilon+M\sqrt{\Phi})'}{(\varepsilon+M\sqrt{\Phi})}.$$

Ведем промежуточные обозначения:

$$A=\frac{1}{(\varepsilon-M\sqrt{\Phi})}\frac{d}{dr_*}(\varepsilon-M\sqrt{\Phi}), \qquad B=\frac{1}{(\varepsilon+M\sqrt{\Phi})}\frac{d}{dr_*}(\varepsilon+M\sqrt{\Phi}),$$

Тогда уравнения второго порядка запишутся так:

$$\left(\frac{d}{dr_*}+\nu\varphi(r_*)-A\right)\left(\frac{d}{dr_*}-\nu\varphi(r_*)\right)g+(\varepsilon^2-M^2\Phi)\,g=0,$$

$$\left(\frac{d}{dr_*}-\nu\varphi(r_*)-B\right)\left(\frac{d}{dr_*}+\nu\varphi(r_*)\right)f+(\varepsilon^2-M^2\Phi)\,f=0,$$

или

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2}-A\frac{d}{dr_*}+\varepsilon^2-\nu^2\varphi^2-\nu\frac{d\varphi}{dr_*}+\nu A\varphi-M^2\Phi\right]g=0,$$

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2}-B\frac{d}{dr_*}+\varepsilon^2-\nu^2\varphi^2+\nu\frac{d\varphi}{dr_*}-\nu B\varphi-M^2\Phi\right]f=0. \qquad (2.1)$$

В этих уравнениях можно исключить члены с первой производной. Для определенности следим за уравнением для f. Совершив подстановку

$$f(r_*)=\beta(r_*)F(r_*),$$

получаем (штрих обозначает производную по переменной r_*)

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2}+\left(2\frac{\beta'}{\beta}-B\right)\frac{d}{dr_*}+\left(\frac{\beta''}{\beta}-A\frac{\alpha'}{\beta}+\varepsilon^2-\nu^2\varphi^2+\nu\frac{d\varphi}{dr_*}-\nu B\varphi-M^2\Phi\right)\right]F=0.$$

Фиксируем функцию α :

$$2\frac{\beta'}{\beta}=B=\frac{(\varepsilon+M\sqrt{\Phi})'}{\varepsilon+M\sqrt{\Phi}} \quad\Rightarrow\quad \beta(r_*)=\sqrt{\varepsilon+M\sqrt{\Phi}}\ .$$

Находим

$$\beta'=\frac{B}{2}\beta,\quad \beta''=\frac{B'}{2}\beta+\frac{B}{2}\cdot\frac{B}{2}\beta \quad\Rightarrow\frac{\beta''}{\beta}=\frac{B'}{2}+\frac{B^2}{4}\,;$$

следовательно, уравнение примет вид:

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2}+\left(\frac{1}{2}\frac{dB}{dr_*}+\frac{B^2}{4}-\frac{AB}{2}+\varepsilon^2-\nu^2\varphi^2+\nu\frac{d\varphi}{dr_*}-\nu B\varphi-M^2\Phi\right)\right]F=0.$$

Аналогично для функции G :

$$g(r_*)=\alpha(r_*)G(r_*)\,,\qquad \alpha(r_*)=\sqrt{\varepsilon-M\sqrt{\Phi}}\ ,$$

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2}+\left(\frac{1}{2}\frac{dA}{dr_*}+\frac{A^2}{4}-\frac{AB}{2}+\varepsilon^2-\nu^2\varphi^2-\nu\frac{d\varphi}{dr_*}+\nu A\varphi-M^2\Phi\right)\right]G=0.$$

Учтем определения

$$\varphi=\frac{1}{r}\sqrt{1-1/r}\,,\qquad \varphi^2=\frac{1}{r^2}(1-1/r)\,,$$

$$\frac{d}{dr_*}=(1-1/r)\frac{d}{dr},\quad \frac{d}{dr_*}\varphi=\frac{1/2r-(1-1/r)}{r^2}\sqrt{1-1/r}\ ,$$

тогда можно получить равенства:

$$\varepsilon^2-\nu^2\varphi^2-\nu\frac{d\varphi}{dr_*}=\varepsilon^2-\nu^2\frac{1-1/r}{r^2}-\nu\,\frac{1/2r-(1-1/r)}{r^2}\sqrt{1-1/r}\,,$$

$$\varepsilon^2-\nu^2\varphi^2+\nu\frac{d\varphi}{dr_*}=\varepsilon^2-\nu^2\frac{1-1/r}{r^2}+\nu\,\frac{1/2r-(1-1/r)}{r^2}\sqrt{1-1/r}\,;$$

$$A=\frac{1}{(\varepsilon-M\sqrt{\Phi})}\frac{d}{dr_*}(\varepsilon-M\sqrt{\Phi})=-\frac{M\sqrt{1-1/r}}{2r^2\,(\varepsilon-M\sqrt{1-1/r})},$$

$$B=\frac{1}{(\varepsilon+M\sqrt{\Phi})}\frac{d}{dr_*}(\varepsilon+M\sqrt{\Phi})=+\frac{M\sqrt{1-1/r}}{2r^2\,(\varepsilon+M\sqrt{1-1/r})},$$

отмечаем, что

$$A|_{r\to1}=0,\quad B|_{r\to1}=0,\quad A|_{r\to\infty}=0,\quad B|_{r\to\infty}=0\,;$$

$$A\cdot\varphi=-\frac{M(1-1/r)}{2r^3(\varepsilon-M\sqrt{1-1/r})},\quad B\cdot\varphi=+\frac{M(1-1/r)}{2r^3(\varepsilon+M\sqrt{1-1/r})},$$

отмечаем, что

$$A\varphi|_{r\to1}=0,\quad B\varphi|_{r\to1}=0,\quad A\varphi|_{r\to\infty}=0,\quad B\varphi|_{r\to\infty}=0\,;$$

$$\frac{1}{2}\frac{dA}{dr_*} = -\frac{M}{4}(1-1/r)\frac{d}{dr}\left\{\sqrt{1-1/r}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{\varepsilon - M\sqrt{1-1/r}}\right\} =$$

$$= -\frac{M}{4}(1-1/r)\left\{\frac{1}{2r^2\sqrt{1-1/r}}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{\varepsilon - M\sqrt{1-1/r}} - \right.$$

$$\left. -\sqrt{1-1/r}\cdot\frac{2}{r^3}\cdot\frac{1}{\varepsilon - M\sqrt{1-1/r}} + \sqrt{1-1/r}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{2(\varepsilon - M\sqrt{1-1/r})^2}\frac{M}{2\sqrt{1-1/r}}\frac{1}{r^2}\right\},$$

отмечаем, что

$$\frac{1}{2}\frac{dA}{dr_*}\Big|_{r\to 1} = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{dA}{dr_*}\Big|_{r\to\infty} = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{dB}{dr_*}\Big|_{r\to 1} = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{dB}{dr_*}\Big|_{r\to\infty} = 0;$$

$$\frac{1}{2}\frac{dB}{dr_*} = +\frac{1}{2}(1-1/r)\frac{d}{dr}\frac{M\sqrt{1-1/r}}{2r^2(\varepsilon + M\sqrt{1-1/r})} = ...$$

$$\frac{1}{4}B^2 = \frac{1}{4}\frac{M^2(1-1/r)}{4r^4(\varepsilon + M\sqrt{1-1/r})^2}, \quad \frac{1}{4}A^2 = \frac{1}{4}\frac{M^2(1-1/r)}{4r^4(\varepsilon - M\sqrt{1-1/r})^2}$$

$$-\frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\frac{M^2(1-1/r)}{4r^4(\varepsilon + M\sqrt{1-1/r})(\varepsilon - M\sqrt{1-1/r})},$$

$$M^2\Phi = M^2(1-1/r), \quad M^2\Phi|_{r\to 1} = 0, \qquad M^2\Phi|_{r\to\infty} = M^2.$$

Из вышеприведенного следует асимптотический вид уравнений второго порядка в областях $r \to 1, +\infty$:

$$r \to +1, \qquad (\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2)\, f = 0, \quad (\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2) g = 0;$$

$$r \to \infty, \qquad (\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2 - M^2) f = 0, \quad (\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2 - M^2) g = 0.$$

3. Анализ дифференциальных уравнений

Введем новую переменную, позволяющую избавиться от квадратного корня:

$$\sqrt{\Phi} = \sqrt{1-1/r} = x, \quad \frac{1}{r} = 1 - x^2, \quad 2x\frac{dx}{dr} = \frac{1}{r^2} = (1-x^2)^2,$$

$$\frac{d}{dr_*} = \Phi\frac{d}{dr} = x^2\frac{dx}{dr}\frac{d}{dx} = \frac{1}{2}x(1-x^2)^2\frac{d}{dx},$$

$$\frac{d^2}{dr_*^2} = \frac{x^2}{4}(1-x^2)^4\left(\frac{d^2}{dx^2} + (\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1})\frac{d}{dx}\right),$$

$$r \to 1, x \to 0; \quad r \to +\infty, x \to \pm 1; \quad r \to 0, \quad x \to \pm i\infty.$$

Преобразуем слагаемые из (2.1) к новой переменной:

$$\varepsilon^2 - \nu^2\varphi^2 - \nu\frac{d\varphi}{dr_*} = \varepsilon^2 - \nu^2 x^2(1-x^2)^2 - \nu\left(\frac{1}{2}x(1-x^2)^3 - x^3(1-x^2)^2\right),$$

$$\varepsilon^2 - \nu^2\varphi^2 + \nu\frac{d\varphi}{dr_*} = \varepsilon^2 - \nu^2 x^2(1-x^2)^2 + \nu\left(\frac{1}{2}x(1-x^2)^3 - x^3(1-x^2)^2\right),$$

$$A=\frac{x(1-x^2)^2}{2(x-\varepsilon/M)},\qquad B=+\frac{x(1-x^2)^2}{2(x+\varepsilon/M)},\qquad A\cdot\varphi=\frac{x^2(1-x^2)^3}{2(x-\varepsilon/M)},\quad B\cdot\varphi=\frac{x^2(1-x^2)^3}{2(x+\varepsilon/M)},$$

$$M^2\Phi=M^2x^2\,,\qquad \frac{d}{dr_*}=\frac{1}{2}x(1-x^2)^2\frac{d}{dx},$$

$$\frac{d^2}{dr_*^2}=\frac{x^2}{4}(1-x^2)^4\left(\frac{d^2}{dx^2}+(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1})\frac{d}{dx}\right)$$

$$-A\frac{d}{dr_*}=-\frac{x^2(1-x^2)^4}{4(x-\varepsilon/M)}\frac{d}{dx},\qquad -B\frac{d}{dr_*}=-\frac{x^2(1-x^2)^4}{4(x+\varepsilon/M)}\frac{d}{dx},$$

Учитываем эти соотношения в уравнениях (2.1), в результате получаем (пусть $\varepsilon/M=c$):

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+c}\right)\frac{d}{dx}+\right.$$
$$\left.+\frac{4(\varepsilon^2-M^2x^2)}{x^2(1-x^2)^4}-\frac{2\nu(1-3x^2)}{x(1-x^2)^2}-\frac{4\nu^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x+c}\frac{2\nu}{1-x^2}\right\}f(x)=0\,, \tag{3.1}$$

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-c}\right)\frac{d}{dx}+\right.$$
$$\left.+\frac{4(\varepsilon^2-M^2x^2)}{x^2(1-x^2)^4}+\frac{2\nu(1-3x^2)}{x(1-x^2)^2}-\frac{4\nu^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x-c}\frac{2\nu}{1-x^2}\right\}g(x)=0\,. \tag{3.2}$$

Уравнения (3.1) – (3.2) совпадают с полученными ранее (1.1) – (1.2). Достаточно исследовать только одно из них, пусть для функции $f(x)$; запишем это уравнение в краткой форме так:

$$\frac{d^2}{dx^2}f+\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+c}\right)\frac{df}{dx}f+\left\{-\frac{2\nu}{x}+\frac{4\varepsilon^2}{x^2}+\frac{D}{x+c}+\frac{A}{(x+1)}+\frac{A'}{(x-1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{(x-1)^2}+\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{(x+1)^3}-\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{(x-1)^3}+\frac{\varepsilon^2-M^2}{4(x+1)^4}+\frac{\varepsilon^2-M^2}{4(x-1)^4}\right\}f=0\,, \tag{3.3}$$

где

$$A=\frac{-8\nu^2+35\varepsilon^2+8\nu-5M^2+8\nu/(c-1)}{8},\quad A'=\frac{+8\nu^2-35\varepsilon^2+8\nu+5M^2-8\nu/(c+1)}{8},$$

$$B=\frac{-8\nu^2+19\varepsilon^2-8\nu-5M^2}{8},\quad B'=\frac{-8\nu^2+19\varepsilon^2+8\nu-5M^2}{8},\quad D=-\frac{2\nu}{c^2-1}\,.$$

В окрестности $x=0$ решения ведут себя так:

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}+\frac{4\varepsilon^2}{x^2}f=0,\quad f\sim x^{\gamma},\quad \gamma=\pm 2i\varepsilon\,.$$

В окрестности $x=1$ уравнение (3.3) упрощается:

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2}{x-1}\frac{d}{dx}-\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{(x-1)^3}+\frac{\varepsilon^2-M^2}{4(x-1)^4}\right\}f=0\,;$$

в соответствии с тем, что точка $x=1$ – нерегулярная особенность ранга 2, решения должны вести себя соответственно следующей подстановке [14; 15]:

$$f(x)=(x-1)^{\alpha}\exp(\frac{\beta}{x-1}),\quad f'=(x-1)^{\alpha}\exp(\frac{\beta}{x-1})\left(\frac{\alpha}{x-1}-\frac{\beta}{(x-1)^2}\right),$$

$$f''=(x-1)^{\alpha}\exp(\frac{\beta}{x-1})\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{(x-1)^2}+\frac{2\beta-2\alpha\beta}{(x-1)^3}+\frac{\beta^2}{(x-1)^4}\right),$$

с учетом чего уравнение примет вид (сохраняем главные сингулярные члены $(x-1)^{-3},(x-1)^{-4}$):

$$+\frac{2\beta-2\alpha\beta}{(x-1)^3}+\frac{\beta^2}{(x-1)^4}-\frac{2\beta}{(x-1)^3}-\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{(x-1)^3}+\frac{\varepsilon^2-M^2}{4(x-1)^4}=0;$$

отсюда получаем уравнения для параметров α,β:

$$\beta^2=-\frac{(\varepsilon^2-M^2)}{4},\quad 2\alpha\beta=-(\varepsilon^2-M^2/2),$$

т.е. имеем две возможности:

$$\beta=\pm i\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon^2-M^2}}{2},\qquad \alpha=\pm i\cdot\frac{(\varepsilon^2-M^2)+M^2/2}{\sqrt{\varepsilon^2-M^2}}.$$

Рассмотрим аналогично точку $x=-1$:

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2}{x+1}\frac{d}{dx}+\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{(x+1)^3}+\frac{\varepsilon^2-M^2}{4(x+1)^4}\right\}f=0,$$

решения должны вести себя в соответствии с подстановкой [14; 15]:

$$f(x)=(x+1)^{\alpha'}\exp(\frac{\beta'}{x+1}),\quad f'=(x=1)^{\alpha'}\exp(\frac{\beta'}{x+1})\left(\frac{\alpha'}{x+1}-\frac{\beta'}{(x+1)^2}\right),$$

$$f''=(x=1)^{\alpha'}\exp(\frac{\beta'}{x+1})\left(\frac{\alpha'(\alpha'-1)}{(x+1)^2}+\frac{2\beta'-2\alpha'\beta'}{(x+1)^3}+\frac{\beta'^2}{(x+1)^4}\right);$$

уравнение принимает вид:

$$+\frac{2\beta'-2\alpha'\beta'}{(x+1)^3}+\frac{\beta'^2}{(x+1)^4}-\frac{2\beta'}{(x+1)^3}+\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{(x+1)^3}+\frac{\varepsilon^2-M^2}{4(x+1)^4}=0;$$

отсюда получаем уравнения для параметров α',β':

$$\beta^2=-\frac{(\varepsilon^2-M^2)}{4},\qquad 2\alpha'\beta'=\varepsilon^2-M^2/2,$$

т.е.

$$\beta'=\pm i\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon^2-M^2}}{2},\quad \alpha'=\mp i\cdot\frac{(\varepsilon^2-M^2)+M^2/2}{\sqrt{\varepsilon^2-M^2}}.$$

Около регулярной особой точки $x=-c$ (она лежит вне физической области переменой x: $x\in(1,\infty)$) имеем приближенное уравнение с простыми решениями:

$$f''-\frac{1}{x+c}f'+\frac{D}{x+c}f=0,\quad f=(x+c)^{\rho},\quad \rho=0,2\,.$$

Исследуем точку $x=\infty$, для этого перейдем в уравнении для $f(x)$ к новой переменной $y=x^{-1}$; после преобразования имеем:

$$\frac{d^2f}{dy^2}+\frac{2}{y}\frac{df}{dy}+\left(-\frac{1}{y}+\frac{2}{y+1}-\frac{2}{y}-\frac{2}{(1-y)}-\frac{2}{y}-\frac{c}{1+cy}+\frac{1}{y}\right)\frac{df}{dy}+$$
$$+\left\{-\frac{2\nu}{y^3}+\frac{4\varepsilon^2}{y^2}+\frac{D}{y^3}-\frac{Dc^3}{1+cy}+\frac{Dc^2}{y}-\frac{Dc}{y^2}-\frac{A}{1+y}+\frac{A}{y^3}+\frac{A}{y}-\frac{A}{y^2}+\right.$$
$$+\frac{A'}{1-y}+\frac{A'}{y}+\frac{A'}{y^2}+\frac{A'}{y^3}+\frac{2B}{1+y}+\frac{B}{(1+y)^2}-\frac{2B}{y}+\frac{B}{y^2}+\frac{B'}{(1-y)^2}+\frac{2B'}{1-y}+\frac{2B'}{y}+\frac{B'}{y^2}-$$
$$-\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{(1+y)^3}-\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{1+y}-\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{(1+y)^2}+\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{y}-\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{(1-y)^2}-\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{y}-$$
$$\left.-\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{(1-y)^3}-\frac{\varepsilon^2-M^2/2}{1-y}+\frac{\varepsilon^2-M^2}{4(1+y)^4}+\frac{\varepsilon^2-M^2}{4(1-y)^4}\right\}f=0\,.$$

Около $y=0$ уравнение упрощается:

$$\frac{d^2f}{dy^2}-\frac{2}{y}\frac{df}{dy}+$$
$$+\left\{-\frac{2\nu}{y^3}+\frac{4\varepsilon^2}{y^2}+\frac{D}{y^3}+\frac{Dc^2}{y}-\frac{Dc}{y^2}+\frac{A}{y^3}+\frac{A}{y}-\frac{A}{y^2}+\frac{A'}{y}+\frac{A'}{y^2}+\frac{A'}{y^3}-\frac{2B}{y}+\frac{B}{y^2}+\frac{2B'}{y}+\frac{B'}{y^2}+\right\}f=0\,.$$

Суммарный коэффициент при y^3 равен нулю, т.е. точка $y=0\,(x=\infty)$ – регулярная. Найдем суммарный коэффициент при y^2:

$$\frac{d^2f}{dy^2}-\frac{2}{y}\frac{df}{dy}+\frac{1}{y^2}\left\{4\varepsilon^2-Dc-A+A'+B+B'\right\}f=0\,,$$

с учетом выше введенных замен убеждаемся, что коэффициент тоже равен нулю:

$$4\varepsilon^2+\frac{2\nu c}{c^2-1}+\nu^2-\frac{35\varepsilon^2}{8}-\nu+\frac{5M^2}{8}-\frac{\nu}{c-1}+\nu^2-\frac{35\varepsilon^2}{8}+\nu+$$
$$+\frac{5M^2}{8}-\frac{\nu}{c+1}-\nu^2+\frac{19\varepsilon^2}{8}-\nu-\frac{5M^2}{8}-\nu^2+\frac{19\varepsilon^2}{8}+\nu-\frac{5M^2}{8}=0.$$

Таким образом, около точки $y=0$ имеем приближенное уравнение:

$$\frac{d^2f}{dy^2}-\frac{2}{y}\frac{df}{dy}+\frac{1}{y}(Dc^2+A+A'-2B+2B')f=0\,;$$

отсюда заключаем, что в точке $y=0$ имеем регулярную особенность [14; 15], поведение решений следующее:

$$x \to \infty \, (y \to 0), \qquad f(y) \sim y^{\sigma} = \frac{1}{x^{\sigma}}, \qquad \sigma = 0{,}3 \, .$$

Теперь возвращаемся к общему уравнению (3.3); удобно ввести обозначения:

$$(\varepsilon^2 - M^2)/4 = E, \qquad \varepsilon^2 - M^2/2 = E' \, ,$$

тогда для (3.3) имеем представление:

$$\frac{d^2}{dx^2} f + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+c} \right) \frac{df}{dx} + \left\{ -\frac{2\nu}{x} + \frac{4\varepsilon^2}{x^2} + \frac{D}{x+c} + \frac{A}{(x+1)} + \frac{A'}{(x-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B'}{(x-1)^2} + \frac{E'}{(x+1)^3} - \frac{E'}{(x-1)^3} + \frac{E}{(x+1)^4} + \frac{E}{(x-1)^4} \right\} f = 0 \, . \qquad (3.4)$$

Ищем решения Фробениуса уравнения (3.4) в следующем виде [14; 15]:

$$f(x) = x^{\gamma} \cdot (x-1)^{\alpha} \exp(\frac{\beta}{x-1}) \cdot (x+1)^{\alpha'} \exp(\frac{\beta'}{x+1}) \cdot F(x) \, .$$

С учетом равенств

$$f'(x) = x^{\gamma} \cdot (x-1)^{\alpha} \exp(\frac{\beta}{x-1}) \cdot (x+1)^{\alpha'} \exp(\frac{\beta'}{x+1}) \cdot \times$$

$$\times \left[F' + \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\alpha'}{x+1} + \frac{\alpha}{x-1} - \frac{\beta'}{(x+1)^2} - \frac{\beta}{(x-1)^2} \right) F \right],$$

$$f''(x) = x^{\gamma} \cdot (x-1)^{\alpha} \exp(\frac{\beta}{x-1}) \cdot (x+1)^{\alpha'} \exp(\frac{\beta'}{x+1}) \times$$

$$\times \left[F'' + \left(\frac{2\gamma}{x} + \frac{2\alpha'}{x+1} + \frac{2\alpha}{x-1} - \frac{2\beta'}{(x+1)^2} - \frac{2\beta}{(x-1)^2} \right) F' + \right.$$

$$+ \left(\frac{-\gamma + \gamma^2}{x^2} + \frac{2\gamma\alpha' - 2\gamma\alpha - 2\gamma\beta' - 2\gamma\beta}{x} + \right.$$

$$+ \frac{-2\alpha'\gamma + 2\beta'\gamma - \alpha\alpha' - \frac{1}{2}\alpha'\beta + \frac{1}{2}\alpha\beta' + \frac{1}{2}\beta\beta'}{x+1} + \frac{-\alpha' + 2\gamma\beta' + \alpha\beta' + \frac{1}{2}\beta\beta' + \alpha^2}{(x+1)^2} + \frac{-2\alpha'\beta' + 2\beta'}{(x+1)^3} + \frac{\beta'^2}{(x+1)^4} +$$

$$\left. \left. + \frac{2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha\alpha' + \frac{1}{2}\alpha'\beta - \frac{1}{2}\alpha\beta' - \frac{1}{2}\beta\beta'}{x-1} + \frac{-\alpha - 2\gamma\beta - \alpha'\beta + \frac{1}{2}\beta\beta' + \alpha^2}{(x-1)^2} + \frac{-2\alpha\beta + 2\beta}{(x-1)^3} + \frac{\beta^2}{(x-1)^4} \right) F \right]$$

приходим к уравнению для функции $F(x)$.

Учитывая в нем уже известные ограничения (здесь имеем 8 возможностей):

$$\gamma^2 + 4\varepsilon^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \gamma = \pm 2i\varepsilon \, ;$$

$$-2\alpha\beta - E' = 0, \qquad \beta^2 + E = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \pm i\sqrt{E}, \quad \alpha = \pm i\frac{E'}{2\sqrt{E}},$$

$$-2\alpha'\beta' + E' = 0, \qquad \beta'^2 + E = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta' = \pm i\sqrt{E}, \quad \alpha' = \mp i\frac{E'}{2\sqrt{E}}, \; -$$

получаем уравнение:

$$\frac{d^2F}{dx^2}+\left(\frac{2\gamma+1}{x}+\frac{2\alpha'+2}{x+1}+\frac{2\alpha+2}{x-1}-\frac{2\beta'}{(x+1)^2}-\frac{2\beta}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+c}\right)\frac{dF}{dx}$$

$$+\left\{\frac{2\gamma\alpha'-2\gamma\alpha-2\gamma\beta'-2\gamma\beta+\alpha'-\alpha-\beta'-\beta-2\nu-\frac{\gamma}{c}}{x}+\right.$$

$$+\frac{4\alpha\gamma+4\beta\gamma+2\alpha\alpha'+\alpha'\beta-\alpha\beta'-\beta\beta'+4\alpha+3\beta+4\gamma+2\alpha'-\beta'+2A'-\frac{2\alpha}{c+1}-\frac{2\beta}{(c+1)^2}}{2(x-1)}+$$

$$+\frac{-4\gamma\beta+2\alpha^2-2\alpha'\beta+\beta\beta'-4\beta+2\alpha+2B'+\frac{2\beta}{c+1}}{2(x-1)^2}+$$

$$+\frac{-4\alpha'\gamma+4\beta'\gamma-2\alpha\alpha'-\alpha'\beta+\alpha\beta'+\beta\beta'-4\alpha'+3\beta'-4\gamma-2\alpha-\beta+2A-\frac{2\alpha'}{c-1}-\frac{2\beta'}{(c-1)^2}}{2(x+1)}+$$

$$+\frac{4\gamma\beta'+2\alpha'^2+2\alpha\beta'+\beta\beta'+4\beta'+2\alpha'+2B+\frac{2\beta'}{c-1}}{2(x+1)^2}+$$

$$\left.+\left(\frac{\gamma}{c}+\frac{\alpha'}{c-1}+\frac{\alpha}{c+1}+\frac{\beta'}{(c-1)^2}+\frac{\beta}{(c+1)^2}+D\right)\frac{1}{x+c}\right\}F=0.$$

Для дальнейшего достаточно использовать его краткую запись:

$$F''+\left(\frac{n}{x}+\frac{n_1}{x-1}+\frac{n_2}{(x-1)^2}+\frac{n_3}{x+1}+\frac{n_4}{(x+1)^2}+\frac{n_5}{x+c}\right)F'+$$

$$+\left(\frac{m}{x}+\frac{m_1}{x-1}+\frac{m_2}{(x-1)^2}+\frac{m_3}{x+1}+\frac{m_4}{(x+1)^2}+\frac{m_5}{x+c}\right)F=0.$$

Умножая его на $x(x+c)(x-1)^2(x+1)^2$, получим уравнение со структурой

$$\left[x^6+cx^5-2x^4-2cx^3+x^2+cx\right]F''+$$

$$+\Big[\big(n+n_1+n_3+n_5\big)x^5+\big(\big(n+n_1+n_3\big)c+n_1+n_2-n_3+n_4\big)x^4+$$

$$+\big(\big(n_1+n_2-n_3+n_4\big)c-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4-2n_5\big)x^3+$$

$$+\big(\big(-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4\big)c-n_1+n_2+n_3+n_4\big)x^2+$$

$$+\big(\big(-n_1+n_2+n_3+n_4\big)c+n+n_5\big)x+nc\Big]F'+$$

$$+\Big[\big(m+m_1+m_3+m_5\big)x^5+\big(\big(m+m_1+m_3\big)c+m_1+m_2-m_3+m_4\big)x^4+$$

$$+\big(\big(m_1+m_2-m_3+m_4\big)c-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4-2m_5\big)x^3+$$

$$+\big(\big(-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4\big)c-m_1+m_2+m_3+m_4\big)x^2+$$

$$+\big(\big(-m_1+m_2+m_3+m_4\big)c+m+m_5\big)x+mc\Big]F=0.$$

Строим решения в виде степенного ряда

$$F=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k,\qquad F'=\sum_{k=1}^{\infty}kb_kx^{k-1},\qquad F''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_kx^{k-2},$$

учитывая эти равенства в уравнении и изменяя необходимым образом индексы суммирования, получим:

$$\sum_{i=6}^{\infty}(i-4)(i-5)b_{i-4}x^i+c\sum_{i=5}^{\infty}(i-3)(i-4)b_{i-3}x^i-2\sum_{i=4}^{\infty}(i-2)(i-3)b_{i-2}x^i-$$

$$-2c\sum_{i=3}^{\infty}(i-1)(i-2)b_{i-1}x^i+\sum_{i=2}^{\infty}i(i-1)b_ix^i+c\sum_{i=1}^{\infty}i(i+1)b_{i+1}x^i+\left(n+n_1+n_3+n_5\right)\sum_{i=5}^{\infty}(i-4)b_{i-4}x^i+$$

$$+\left[\left(n+n_1+n_3\right)c+n_1+n_2-n_3+n_4\right]\sum_{i=4}^{\infty}(i-3)b_{i-3}x^i+$$

$$+\left[\left(n_1+n_2-n_3+n_4\right)c-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4-2n_5\right]\sum_{i=3}^{\infty}(i-2)b_{i-2}x^i+$$

$$+\left[\left(-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4\right)c-n_1+n_2+n_3+n_4\right]\sum_{i=2}^{\infty}(i-1)b_{i-1}x^i+$$

$$+\left[\left(-n_1+n_2+n_3+n_4\right)c+n+n_5\right]\sum_{i=1}^{\infty}ib_ix^i+nc\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)b_{i+1}x^i+$$

$$+\left(m+m_1+m_3+m_5\right)\sum_{i=5}^{\infty}b_{i-5}x^i+\left[\left(m+m_1+m_3\right)c+m_1+m_2-m_3+m_4\right]\sum_{i=4}^{\infty}b_{i-4}x^i+$$

$$+\left[\left(m_1+m_2-m_3+m_4\right)c-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4-2m_5\right]\sum_{i=3}^{\infty}b_{i-3}x^i+$$

$$+\left[\left(-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4\right)c-m_1+m_2+m_3+m_4\right]\sum_{i=2}^{\infty}b_{i-2}x^i+$$

$$+\left[\left(-m_1+m_2+m_3+m_4\right)c+m+m_5\right]\sum_{i=1}^{\infty}b_{i-1}x^i+mc\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i=0.$$

Таким образом, находим рекуррентные соотношения:

$$i=0,\qquad nb_1+mb_0=0,$$

$$i=1,\qquad 2cb_2+2ncb_2+\left[\left(-n_1+n_2+n_3+n_4\right)c+n+n_5\right]b_1+mcb_1+$$

$$+\left[\left(-m_1+m_2+m_3+m_4\right)c+m+m_5\right]b_0=0,$$

$$i=2,\qquad +3ncb_3+6cb_3+2b_2+2\left[\left(-n_1+n_2+n_3+n_4\right)c+n+n_5\right]b_2+mcb_2+$$

$$+\left[\left(-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4\right)c-n_1+n_2+n_3+n_4\right]b_1+\left[\left(-m_1+m_2+m_3+m_4\right)c+m+m_5\right]b_1+$$

$$+\left[\left(-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4\right)c-m_1+m_2+m_3+m_4\right]b_0=0,$$

$$i=3,\qquad 12cb_4+4ncb_4+6b_3+3\left[\left(-n_1+n_2+n_3+n_4\right)c+n+n_5\right]b_3+mcb_3-$$

$$-4cb_2+2\left[\left(-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4\right)c-n_1+n_2+n_3+n_4\right]b_2+$$

$$+\left[\left(-m_1+m_2+m_3+m_4\right)c+m+m_5\right]b_2+$$

$$+\left[\left(n_1+n_2-n_3+n_4\right)c-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4-2n_5\right]b_1+$$

$$+\left[\left(-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4\right)c-m_1+m_2+m_3+m_4\right]b_1+$$

$$+\left[\left(m_1+m_2-m_3+m_4\right)c-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4-2m_5\right]b_0=0,$$

....

$$i=6,7,8\ldots\qquad \left(m+m_1+m_3+m_5\right)b_{i-5}+$$

$$+\left[(i-4)(i-5)+\left(n+n_1+n_3+n_5\right)(i-4)+\left(m+m_1+m_3\right)c+m_1+m_2-m_3+m_4\right]b_{i-4}+$$

$$+\Big\{c(i-3)(i-4)+\Big[\big(n+n_1+n_3\big)c+n_1+n_2-n_3+n_4\Big](i-3)+$$
$$+\Big[\big(m_1+m_2-m_3+m_4\big)c-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4-2m_5\Big]\Big\}b_{i-3}+$$
$$+\Big\{-2(i-2)(i-3)+\Big[\big(n_1+n_2-n_3+n_4\big)c-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4-2n_5\Big](i-2)+$$
$$+\Big[\big(-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4\big)c-m_1+m_2+m_3+m_4\Big]\Big\}b_{i-2}+$$
$$+\Big\{-2c(i-1)(i-2)+\Big[\big(-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4\big)c-n_1+n_2+n_3+n_4\Big](i-1)+$$
$$+\Big[\big(-m_1+m_2+m_3+m_4\big)c+m+m_5\Big]\Big\}b_{i-1}+$$
$$+\Big\{i(i-1)+\Big[\big(-n_1+n_2+n_3+n_4\big)c+n+n_5\Big]i+mc\Big\}b_i+\big[ci(i+1)+nc\,(i+1)\big]b_{i+1}=0.$$

Для анализа вопроса о сходимости ряда используем метод Пуанкаре – Перрона. Соответственно, делим уравнение на b_{i-5}:

$$\big(m+m_1+m_3+m_5\big)+$$
$$+\Big[(i-4)(i-5)+\big(n+n_1+n_3+n_5\big)(i-4)+\big(m+m_1+m_3\big)c+m_1+m_2-m_3+m_4\Big]\frac{b_{i-4}}{b_{i-5}}+$$
$$+\Big\{c(i-3)(i-4)+\Big[\big(n+n_1+n_3\big)c+n_1+n_2-n_3+n_4\Big](i-3)+$$
$$+\Big[\big(m_1+m_2-m_3+m_4\big)c-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4-2m_5\Big]\Big\}\frac{b_{i-3}}{b_{i-4}}\frac{b_{i-4}}{b_{i-5}}+$$
$$+\Big\{-2(i-2)(i-3)+\Big[\big(n_1+n_2-n_3+n_4\big)c-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4-2n_5\Big](i-2)+$$
$$+\Big[\big(-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4\big)c-m_1+m_2+m_3+m_4\Big]\Big\}\frac{b_{i-2}}{b_{i-3}}\frac{b_{i-3}}{b_{i-4}}\frac{b_{i-4}}{b_{i-5}}+$$
$$+\Big\{-2c(i-1)(i-2)+\Big[\big(-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4\big)c-n_1+n_2+n_3+n_4\Big](i-1)+$$
$$+\Big[\big(-m_1+m_2+m_3+m_4\big)c+m+m_5\Big]\Big\}\frac{b_{i-1}}{b_{i-2}}\frac{b_{i-2}}{b_{i-3}}\frac{b_{i-3}}{b_{i-4}}\frac{b_{i-4}}{b_{i-5}}+$$
$$+\Big\{i(i-1)+\Big[\big(-n_1+n_2+n_3+n_4\big)c+n+n_5\Big]i+mc\Big\}\frac{b_i}{b_{i-1}}\frac{b_{i-1}}{b_{i-2}}\frac{b_{i-2}}{b_{i-3}}\frac{b_{i-3}}{b_{i-4}}\frac{b_{i-4}}{b_{i-5}}+$$
$$+\big[ci(i+1)+nc\,(i+1)\big]\frac{b_{i+1}}{b_i}\frac{b_i}{b_{i-1}}\frac{b_{i-1}}{b_{i-2}}\frac{b_{i-2}}{b_{i-3}}\frac{b_{i-3}}{b_{i-4}}\frac{b_{i-4}}{b_{i-5}}=0.$$

Домножив полученное соотношение на i^{-2} и устремив $i\to\infty$, находим алгебраическое уравнение для величины R, определяющей возможные радиусы сходимости R_{conv} степенного ряда:

$$R=\lim_{i\to\infty}\frac{b_i}{b_{i-1}},\qquad R_{conv}=\frac{1}{|R|},$$
$$R+cR^2-Rr^3-2cR^4+R^5+cR^6=0\;\Rightarrow\;(1+cR)\,R\,(R^2-1)^2=0\,.$$

Его решения такие:

$$R=0,\quad R=\pm1,\quad R=-\frac{1}{c},$$

т.е. возможные радиусы сходимости равны $1, c, \infty$. Минимальный из возможных радиус сходимости равен $R_{conv} = 1$, он покрывает всю физическую область изменения переменной $x \in (0,1)$. В соответствии с симметрией между уравнениями (3.1) и (3.2) решения уравнения для функции $g(x)$ строятся аналогично; фактически достаточно выполнить формальную замену:

$$\nu \;\Rightarrow\; -\nu, \qquad c \;\Rightarrow\; -c\,.$$

4. Анализ туннельного эффекта

На основе использованной подстановки

$$f(x) = x^{\gamma} \cdot (x-1)^{\alpha} \exp(\frac{\beta}{x-1}) \cdot (x+1)^{\alpha'} \exp(\frac{\beta'}{x+1}) \cdot F(x)\,,$$

где

$$\beta = \pm i\Gamma, \quad \alpha = \pm i\Sigma, \quad \Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}}{2}, \quad \Sigma = \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}},$$
$$\beta' = \pm i\Gamma, \quad \alpha' = \pm i\Sigma, \quad \Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}}{2}, \quad \Sigma = \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}},$$
$$\gamma = \pm 2i\varepsilon\,.$$

можно построить 8 решений (здесь буквами $R(x), I(x)$ обозначены вещественные и мнимые части сходящихся степенных рядов):

$$g_1(x) = e^{+2i\varepsilon \ln x}\; e^{+i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{+i\Gamma}{x-1}}\; e^{-i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{+i\Gamma}{x+1}}\; (R_1(x) + iI_1(x))\,,$$
$$g_2(x) = e^{-2i\varepsilon \ln x}\; e^{-i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{-i\Gamma}{x-1}}\; e^{+i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{-i\Gamma}{x+1}}\; (R_1(x) - iI_1(x))\,;$$
$$g_3(x) = e^{+2i\varepsilon \ln x}\; e^{-i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{-i\Gamma}{x-1}}\; e^{+i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{-i\Gamma}{x+1}}\; (R_3(x) + iI_3(x))\,,$$
$$g_4(x) = e^{-2i\varepsilon \ln x}\; e^{+i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{+i\Gamma}{x-1}}\; e^{-i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{+i\Gamma}{x+1}}\; (R_3(x) - iI_3(x))\,; \tag{4.1}$$

$$g_5(x) = e^{+2i\varepsilon \ln x}\; e^{+i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{+i\Gamma}{x-1}}\; e^{+i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{-i\Gamma}{x+1}}\; (R_5(x) + iI_5(x))\,,$$
$$g_6(x) = e^{-2i\varepsilon \ln x}\; e^{-i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{-i\Gamma/2}{x-1}}\; e^{-i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{+i\Gamma/2}{x+1}}\; (R_5(x) - iI_5(x))\,;$$
$$g_7(x) = e^{+2i\varepsilon \ln x}\; e^{-i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{-i\Gamma/2}{x-1}}\; e^{-i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{+i\Gamma/2}{x+1}}\; (R_7(x) + iI_7(x))\,,$$
$$g_8(x) = e^{-2i\varepsilon \ln x}\; e^{+i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{+i\Gamma}{x-1}}\; e^{+i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{-i\Gamma}{x+1}}\; (R_7(x) - iI_7(x))\,. \tag{4.2}$$

Отметим, что множитель $e^{+i\Sigma \ln(x-1)}$, $x \in (0,1)$ зависит от логарифма отрицательной переменной, что дает многозначную функцию

$$e^{\pm i\Sigma \ln(x-1)} = e^{\pm i\Sigma[\ln|x-1| + i(\pi + 2\pi n)]} = e^{\mp\Sigma(\pi + 2\pi n)}\; e^{\pm i\Sigma \ln|x-1|}\,.$$

Использование той или иной ветви многозначной функции влияет только на выбор вещественного множителя перед решением; для определенности пусть $n = 0$.

Соотношения (4.1), (4.2) задают точные и везде определенные решения, поскольку ряды сходятся во всей физической области изменения переменной $x \in (0,+1)$. Отметим, что перечисленные решения разбиты на пары комплексно сопряженных. Применяя численный анализ, легко убедиться, что вещественные и мнимые части функций $G(x)$, определяемых степенными рядами, ведут себя как монотонно растущие функции с явно выраженным асимптотическим стремлением к постоянным значениям, зависящим от квантовых чисел $\varepsilon,\ \nu = j + 1/2$.

Найдем асимптотики решений g_1, g_3 и g_2, g_4 (учитывая сходимость рядов):

$$x \to 0 (r_* \to -\infty),$$
$$g_1 = e^{-\Sigma\pi}\ e^{+i\varepsilon r_*}, \quad g_2 = e^{+\Sigma\pi}\ e^{-i\varepsilon r_*},$$
$$g_3 = e^{+\Sigma\pi}\ e^{+i\Sigma r_*}, \quad g_4 = e^{-\Sigma\pi}\ e^{-i\varepsilon r_*};$$
$$x \to +1 (r_* \to +\infty),$$
$$g_1 = [e^{-i\Sigma \ln 2} e^{+i\Gamma/2}\ (R_1 + iI_1)]\, e^{-i2\Gamma r_*},$$
$$g_2 = [e^{+i\Sigma \ln 2} e^{-i\Gamma/2}\ (R_1 - iI_1)]\, e^{+i2\Gamma r_*},$$
$$g_3 = [e^{+i\Sigma \ln 2} e^{-i\Gamma/2}\ (R_3 + iI_3)]\, e^{+i2\Gamma r_*},$$
$$g_4 = [e^{-i\Sigma ln 2} e^{+i\Gamma/2}\ (R_3 - iI_3)]\, e^{-i2\Gamma r_*}.$$

Образуем линейные комбинации из этих четырех функций:

$$H_+ = \frac{g_3 + g_1}{2}, H_- = \frac{g_3 - g_1}{2}, \qquad F_+ = \frac{g_2 + g_4}{2}, F_- = \frac{g_2 - g_4}{2}.$$

Их асимптотики слева задаются равенствами:

$$r_* \to -\infty, \qquad H_+ = \cosh \Sigma\pi\, e^{+i\varepsilon r_*}, \quad H_- = \sinh \Sigma\pi\, e^{+i\varepsilon r_*};$$
$$r_* \to -\infty, \qquad F_+ = \cosh \Sigma\pi\, e^{-i\varepsilon r_*}, \quad F_- = \sinh \Sigma\pi\, e^{-i\varepsilon r_*};$$

асимптотики справа задаются соотношениями:

$$r_* \to +\infty,$$
$$H_\pm = \frac{1}{2}[e^{+i\Sigma \ln 2} e^{-i\Gamma/2} (R_3 + iI_3))] e^{+i2\Gamma r_*} \pm \frac{1}{2}[e^{-i\Sigma \ln 2} e^{+i\Gamma/2} (R_1 + iI_1)] e^{-i2\Gamma r_*},$$
$$F_\pm = \frac{1}{2}[e^{+i\Sigma \ln 2} e^{-i\Gamma/2} (R_1 - iI_1))]\, e^{+i2\Gamma r_*} \pm \frac{1}{2}[e^{-i\Sigma \ln 2} e^{+i\Gamma/2} (R_3 - iI_3)] e^{-i2\Gamma r_*}.$$

Таким образом, имеем две пары решений с асимптотиками (слева $\leftrightarrow$ справа) следующего вида:

$$H_+, \quad \cosh \Sigma\pi\, e^{+i\varepsilon r_*} \quad <\!\!-\!\!-\!\!> \quad A e^{+i2\Gamma r_*} + B e^{-i2\Gamma r_*},$$
$$H_-, \quad \sinh \Sigma\pi e^{+i2\Gamma r_*} \quad <\!\!-\!\!-\!\!> \quad A e^{+i2\Gamma r_*} - B e^{-i2\Gamma r_*};$$

$$F_+, \quad \cosh \Sigma\pi\, e^{-i2\Gamma r_*} \quad <\!\!-\!\!-\!\!> \quad A^* e^{-i2\Gamma r_*} + B^* e^{+i2\Gamma r_*},$$
$$F_-, \quad \sinh \Sigma\pi e^{-i2\Gamma r_*} \quad <\!\!-\!\!-\!\!> \quad A^* e^{-i2\Gamma r_*} - B^* e^{+i2\Gamma r_*}. \tag{4.3}$$

Пара (4.3) более проста для интерпретации: ее можно сопоставить ситуации, когда частица падает справа на барьер Шварцшильда, частично отражается и частично проходит сквозь него. Два варианта соответствуют разным сдвигам фаз. Если комбинировать функции в пределах пар $H_+ -- H_-$ и $F_+ -- F_-$, то можно получить решения, нужные для описания явления туннелирования майорановских частиц, падающих на барьер извне.

Физическая информация о процессе туннелирования частиц, падающих на барьер извне:

$$\frac{C_\pm}{A^*} e^{-i\varepsilon r_*} \quad <--- \quad e^{-i2\Gamma r_*} \pm \frac{B^*}{A^*} e^{+i2\Gamma r_*}$$

определяется коэффициентами прохождения D и отражения R:

$$D = \left| \frac{C_\pm}{A^*} \right|^2, \qquad R = 1 - D = \left| \frac{B^*}{A^*} \right|^2 .$$

Аналогично можно исследовать и туннельный эффект в ситуации, когда частица падает на барьер Шварцшильда слева, при этом нужно комбинировать функции $g_5, ..., g_8$. Имеем асимптотики:

$$x \to +1, \quad g_5 = e^{+i\Sigma \ln 2} e^{-i\Gamma/2} (R_5 + iI_5) e^{-i2\Gamma r_*} ,$$
$$g_8 = e^{+i\Sigma \ln 2} e^{-i\Gamma/2} (R_7 - iI_7) e^{-i\varepsilon r_*} ;$$
$$x \to 0, \qquad g_5 = e^{-\Sigma\pi} e^{i\varepsilon r_*}, \qquad g_8 = e^{+\Sigma\pi} e^{-i2\Gamma r_*};$$

$$x \to +1, \quad g_6 = e^{-i\Sigma \ln 2} e^{+i\Gamma/2} (R_5 - iI_5) e^{+i2\Gamma r_*} ,$$
$$g_7 = e^{-i\Sigma \ln 2} e^{+i\Gamma/2} (R_7 + iI_7) e^{+i2\Gamma r_*};$$
$$x \to 0, \qquad g_6 = e^{+\Sigma\pi} e^{-i2\Gamma r_*}, \quad g_7 = e^{-\Sigma\pi} e^{+i2\Gamma r_*}.$$

Введем функции

$$\bar{H}_\pm = g_5 \pm g_8, \qquad \bar{F}_\pm = g_6 \pm g_7;$$

они имеют асимптотики (слева $\leftrightarrow$ справа):

$$\bar{H}_\pm, \quad e^{-\Sigma\pi} e^{+i\varepsilon r_*} \pm e^{+\Sigma\pi} e^{-i\varepsilon r_*} <\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!> e^{+i\Sigma \ln 2} e^{-i\Gamma/2} \left[(R_5 + iI_5) \pm (R_7 - iI_7) \right] e^{-i2\Gamma r_*};$$
$$\bar{F}_\pm, \quad e^{-\Sigma\pi} e^{+i\varepsilon r_*} \pm e^{+\Sigma\pi} e^{-i\varepsilon r_*} <\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!> e^{+i\Sigma \ln 2} e^{-i\Gamma/2} \left[(R_5 - iI_5) \pm (R_7 + iI_7) \right] e^{+i2\Gamma r_*}. \qquad (4.4)$$

Функции (4.4) можно сопоставить ситуации, когда частица падает слева на барьер Шварцшильда, частично отражается и частично проходит сквозь него:

$$\bar{A} e^{+i\varepsilon r_*} \pm \bar{B} e^{-i\varepsilon r_*} \; --\!\!> \; \bar{C}_\pm e^{+i2\Gamma r_*} .$$

Процесс туннелирования частиц, падающих на барьер изнутри, определяется коэффициентами прохождения $\bar{D}$ и отражения $\bar{R}$:

$$\bar{D} = \left| \frac{\bar{C}_\pm}{\bar{A}} \right|^2, \qquad \bar{R} = \left| \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \right|^2 .$$

Заключение

Таким образом, для массивных спинорных частиц в поле Шварцшильда развита математическая схема анализа прохождения частиц через эффективный потенциальный барьер Шварцшильда. Результаты существенно зависят от того, откуда частицы падают на гравитационный барьер: извне или изнутри. Анализ основан на использовании 8 решений Фробениуса для уравнения с двумя регулярными особыми точками и двумя нерегулярными особыми точками ранга 2. Математическая структура полученных выражений для коэффициентов прохождения и отражения является точной, однако неизвестны аналитические выражения для сумм входящих в эти формулы степенных. Эта часть исследования должна базироваться на численном суммировании рядов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. To analysis of the Dirac and Majorana particle solutions in Schwarzschild field / E. M. Ovsiyuk [et al.] // NPCS. – 2017. – Vol. 20, № 1. – P. 56–72.

2. Schwarzschild, K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie / K. Schwarzschild // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1. – 1916. – S. 189–196.

3. Regge, T. Stability of a Schwarzschild Singularity / T. Regge, J. A. Wheeler // Physical Review. – 1957. – Vol. 108, № 4. – P. 1063–1069.

4. Brill, D. R. Wheeler. Interaction of neutrinos and gravitational fields / D. R. Brill, A. John // Rev. of Modern Physics. – 1957. – Vol. 29. – P. 465–479.

5. Bardeen, J. M. Radiation fields in the Schwarzschild background / J. M. Bardeen, W. H. Press // J. Math. Phys. – 1973. – Vol. 14. – P. 7–19.

6. Hawking, S. W. Black hole explosions? / S. W. Hawking // Nature. – 1974. – № 5443. – P. 30–31.

7. Hawking, S. W. Particle creation by black holes / S. W. Hawking // Commun. Math. Phys. – 1975. – Vol. 43. – P. 199–220.

8. Page, D. N. Particle emission rates from a black hole: Massless particles from an uncharged, non-rotating hole / D. N. Page // Phys. Rev. D. – 1976. – Vol. 13. – P. 198–206.

9. Chandrasekhar, S. The Mathematical Theory of Black Holes / S. Chandrasekhar. – Oxford : Oxford Univ. Press, 1983.

10. Фролов, В. П. Физические эффекты в гравитационном поле черных дыр / В. П. Фролов // Тр. ФИАН. – 1986. – Т. 169. – С. 3–131.

11. Гальцов, Д. В. Частицы и поля в окрестности черных дыр / Д. В. Гальцов. – М. : Изд-во МГУ, 1986. – 288 с.

12. Fiziev, P. [Electronic resource]. – Mode of access: https://www. research-gate.net/-profile/Plamen-Fiziev/publications.

13. Smoller, J. Asymptotic Behavior of Massless Dirac Waves in Schwarzschild Geometry / J. Smoller, Chunjing Xie // Annales Henri Poincare. – 2012. – Vol. 13, № 4. – P. 943–989.

14. Ronveaux, A. Heun’s Differential Equations / A. Ronveaux. – Oxford : Oxford Univ. Press, 1995.

15. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford : Oxford Univ. Press, 2000.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.11.2018

Ovsiyuk E.M., Voynova Ya.A., Veko O.V., Red’kov V.M. **To Description of the Tunneling Effect for Dirac Massive Particles Through the Schwarzschild Gravitational Barrier**

For massive spin 1/2 particles, the tunneling process through effective potential barrier generated by the Schwarzschild black hole static geometry is studied. The treatment is based on the use of 8 Frobenius solutions of relevant 2-nd order differential equations with two regular points and two irregular points of the rank 2. These solutions are constructed in explicit form and the convergence of all involved power series for the physical region of the radial variable r from the interval (1, + \infty) is proved by Poincare – Perrone method. Results for tunneling effect significantly differ for two situations: one when the particle falls on the barrier from outside the black hole and another when the particle falls on the barrier from within. Mathematical expressions for transmission and reflection coefficients are mathematically exact, however analytical expressions for involved convergent powers series are not known, and further study assumes numerical calculation.