

УДК 513.82

**А.А. Юдов<sup>1</sup>, Е.А. Сирисько<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии  
и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

<sup>2</sup>магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: [modelmath@brsu.brest.by](mailto:modelmath@brsu.brest.by)**КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОРОДНЫХ РЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ  
СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ  
ШЕСТИМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА  $R_6$** 

Целью исследования является нахождение инвариантных подпространств, прямых и плоскостей для подгрупп Ли группы Ли  $H$  вращений шестимерного евклидова пространства  $R_6$ , классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли  $G$  движений пространства  $R_6$  и исследование свойств подгрупп Ли группы Ли  $G$ .

Геометрия однородных пространств является объектом исследования многих отечественных и зарубежных ученых уже на протяжении более ста лет. В этой области работали Э. Картан, Г. Вейль, П.К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В.И. Ведерников, А.С. Феденко, И.В. Белько, В. Балащенко, С.Г. Кононов, А.А. Юдов и др. Среди однородных пространств особенно важные применения находит теория редуктивных однородных пространств с различными структурными группами, в частности, с группами Ли движений (псевдо)евклидовых пространств различной размерности.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений шестимерного евклидова пространства  $R_6$ .

**Инвариантные подпространства подгрупп Ли**

Рассмотрим пространство  $R_6$  – шестимерное евклидово пространство  $R_6$ .

Выберем в пространстве  $R_6$  репер  $\varepsilon = (0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ , причем  $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = e_6^2 = 1, (e_i, e_j) = 0, i \neq j$ .

Произвольную точку  $M$  пространства  $R_6$ , в репере  $\varepsilon$  зададим координатами  $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ , которые будем записывать в виде  $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T \equiv (X)_\varepsilon$ .

На множестве реперов пространства  $R_6$  действует группа Ли  $G$  движений, которая при заданном репере  $\varepsilon$  изоморфна группе матриц вида:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & & & & & & \\ t_2 & & & & & & \\ t_3 & & & & & & \\ t_4 & & & A & & & \\ t_5 & & & & & & \\ t_6 & & & & & & \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix} \quad (1)$$

Причем  $A^T E_6 A = E_6$ , где знак  $^T$  означает транспонирование, а матрица  $E_6$  является единичной матрицей.

При движении, заданном матрицей (1), репер  $\varepsilon$  переходит в репер  $\varepsilon' = (0, e_1', e_2', e_3', e_4', e_5', e_6') = (0', e')$ , где  $e' = eA$ ,  $0'(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (T)_\varepsilon$ , а точка  $M$  переходит в точку  $M'$ , имеющую в репере  $\varepsilon'$  такие же координаты, какие точка  $M$  имеет в репере  $\varepsilon$ .

Пусть  $M'(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (X)_{\varepsilon'}$ ,  $M(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = (X')_\varepsilon$ . Тогда получим:  $\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = e(T) + e'(X) = e(T) + eA(X) = e((T) + A(X))$ . С другой стороны,  $\overline{OM'} = e(X')$ . Отсюда  $(X') = (T) + A(X)$ , т.е.

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)^T + A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

или

$$(1, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = \overline{A}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T.$$

Таким образом, в пространстве  $R_6$  действует слева группа Ли  $G$ , которая изоморфна группе матриц вида (1), действующих на точки пространства  $R_6$  по формуле (2). Алгебру Ли  $\overline{G}$  этой группы можно отождествить с алгеброй Ли матриц вида:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_1 & & & & & & \\ \tau_2 & & & & & & \\ \tau_3 & & & & & & \\ \tau_4 & & & & & & \\ \tau_5 & & & & & & \\ \tau_6 & & & & & & \end{pmatrix} \quad B \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & B \end{pmatrix} \right\},$$

где  $B$  удовлетворяет условию:  $B^T E_6 + E_6 B = 0$ .

Группа Ли  $H$  стационарности точки  $O$  и алгебра Ли  $\overline{H}$  этой группы будут задаваться матрицами вида:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \quad A \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \quad B \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\}.$$

Группа Ли  $G$  является полупрямым произведением группы Ли  $H$  стационарности точки и абелевой группы  $T_6$  параллельных переносов:  $G = H \otimes T_6$ .

Алгебра Ли  $\overline{G}$  является полупрямой суммой алгебры Ли  $\overline{H}$  группы Ли  $H$  и коммутативной алгебры Ли  $\tau_6$  группы Ли  $T_6$ :  $\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_6$ .

Рассмотрим группу Ли  $G$  пространства  $R_6$  и ее алгебру Ли  $\overline{G}$ . Базис алгебры Ли  $G$  выбирается следующим образом:

$$\begin{aligned} i_7 &= E_{12} - E_{21}, i_8 = E_{13} - E_{31}, i_9 = E_{14} - E_{41}, i_{10} = E_{15} - E_{51}, i_{11} = E_{16} - E_{61}, \\ i_{12} &= E_{23} - E_{32}, i_{13} = E_{24} - E_{42}, i_{14} = E_{25} - E_{52}, i_{15} = E_{26} - E_{62}, i_{16} = E_{34} - E_{43}, \\ i_{17} &= E_{35} - E_{53}, i_{18} = E_{36} - E_{63}, i_{19} = E_{45} - E_{54}, i_{20} = E_{46} - E_{64}, i_{21} = E_{56} - E_{65}. \end{aligned} \quad (2)$$

где  $E_{\alpha\beta}$  – матрица размера  $(6 \times 6)$ , у которой в  $\alpha$  – ой строке,  $\beta$  – м столбце стоит единица, а остальные элементы – нули, причем  $i_7 \dots i_{21}$  образуют базис алгебры Ли  $\overline{H}$  группы Ли  $H$ , векторы  $i_1 \dots i_6$  образуют базис алгебры  $\tau_6$ , а операция коммутирования в алгебре Ли  $\overline{G}$  задается в виде:

$$[A, B] = AB - BA, A, B \in \overline{G}$$

Проводя непосредственные вычисления, получаем следующие формулы для коммутаторов базисных векторов:  $i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}$  алгебры Ли группы Ли вращений пространства  $R_6$ .

Согласно формуле для коммутаторов получим  $[i_7, i_8] = i_7 i_8 - i_8 i_7 = -i_{12}$ .

Аналогично, проводя вычисления, получим:

$$\begin{aligned} [i_7, i_8] &= -i_{12}, & [i_8, i_{16}] &= i_9, & [i_{10}, i_{14}] &= -i_7, & [i_{12}, i_{16}] &= i_{13}, & [i_{15}, i_{16}] &= 0, \\ [i_7, i_9] &= -i_{13}, & [i_8, i_{17}] &= i_{10}, & [i_{10}, i_{15}] &= 0, & [i_{12}, i_{17}] &= i_{14}, & [i_{15}, i_{17}] &= 0, \\ [i_7, i_{10}] &= -i_{14}, & [i_8, i_{18}] &= i_{11}, & [i_{10}, i_{16}] &= 0, & [i_{12}, i_{18}] &= i_{15}, & [i_{15}, i_{18}] &= -i_{12}, \\ [i_7, i_{11}] &= -i_{15}, & [i_8, i_{19}] &= 0, & [i_{10}, i_{17}] &= -i_8, & [i_{12}, i_{19}] &= 0, & [i_{15}, i_{19}] &= 0, \\ [i_7, i_{12}] &= i_8, & [i_8, i_{20}] &= 0, & [i_{10}, i_{18}] &= 0, & [i_{12}, i_{20}] &= 0, & [i_{15}, i_{20}] &= -i_{13}, \\ [i_7, i_{13}] &= i_9, & [i_8, i_{21}] &= 0, & [i_{10}, i_{19}] &= -i_9, & [i_{12}, i_{21}] &= 0, & [i_{15}, i_{21}] &= -i_{14}, \\ [i_7, i_{14}] &= i_{10}, & [i_9, i_{10}] &= -i_{19}, & [i_{10}, i_{20}] &= 0, & [i_{13}, i_{14}] &= -i_{19}, & [i_{16}, i_{17}] &= -i_{19}, \\ [i_7, i_{15}] &= i_{11}, & [i_9, i_{11}] &= -i_{20}, & [i_{10}, i_{21}] &= i_{11}, & [i_{13}, i_{15}] &= -i_{20}, & [i_{16}, i_{18}] &= -i_{20}, \\ [i_7, i_{16}] &= 0, & [i_9, i_{12}] &= 0, & [i_{11}, i_{12}] &= 0, & [i_{13}, i_{16}] &= -i_{12}, & [i_{16}, i_{19}] &= i_{17}, \\ [i_7, i_{17}] &= 0, & [i_9, i_{13}] &= -i_7, & [i_{11}, i_{13}] &= 0, & [i_{13}, i_{17}] &= 0, & [i_{16}, i_{20}] &= i_{18}, \\ [i_7, i_{18}] &= 0, & [i_9, i_{14}] &= 0, & [i_{11}, i_{14}] &= 0, & [i_{13}, i_{18}] &= 0, & [i_{16}, i_{21}] &= 0, \\ [i_7, i_{19}] &= 0, & [i_9, i_{15}] &= 0, & [i_{11}, i_{15}] &= -i_7, & [i_{13}, i_{19}] &= i_{14}, & [i_{17}, i_{18}] &= -i_{21}, \\ [i_7, i_{20}] &= 0, & [i_9, i_{16}] &= -i_8, & [i_{11}, i_{16}] &= 0, & [i_{13}, i_{20}] &= i_{15}, & [i_{17}, i_{19}] &= -i_{16}, \\ [i_7, i_{21}] &= 0, & [i_9, i_{17}] &= 0, & [i_{11}, i_{17}] &= 0, & [i_{13}, i_{21}] &= 0, & [i_{17}, i_{20}] &= 0, \\ [i_8, i_9] &= -i_{16}, & [i_9, i_{18}] &= 0, & [i_{11}, i_{18}] &= -i_8, & [i_{14}, i_{15}] &= -i_{21}, & [i_{17}, i_{21}] &= i_{18}, \\ [i_8, i_{10}] &= -i_{17}, & [i_9, i_{19}] &= i_{10}, & [i_{11}, i_{19}] &= 0, & [i_{14}, i_{16}] &= 0, & [i_{18}, i_{19}] &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[i_8, i_{11}] &= -i_{18}, & [i_9, i_{20}] &= i_{11}, & [i_{11}, i_{20}] &= -i_9, & [i_{14}, i_{17}] &= -i_{12}, & [i_{18}, i_{20}] &= -i_{12}, \\
[i_8, i_{12}] &= -i_7, & [i_9, i_{21}] &= 0, & [i_{11}, i_{21}] &= -i_{10}, & [i_{14}, i_{18}] &= 0, & [i_{18}, i_{21}] &= -i_{17}, \\
[i_8, i_{13}] &= 0, & [i_{10}, i_{11}] &= -i_{21}, & [i_{12}, i_{13}] &= -i_{16}, & [i_{14}, i_{19}] &= -i_{13}, & [i_{19}, i_{20}] &= -i_{21}, \\
[i_8, i_{14}] &= 0, & [i_{10}, i_{12}] &= 0, & [i_{12}, i_{14}] &= -i_{17}, & [i_{14}, i_{20}] &= 0, & [i_{19}, i_{21}] &= i_{20}, \\
[i_8, i_{15}] &= 0, & [i_{10}, i_{13}] &= 0, & [i_{12}, i_{15}] &= -i_{18}, & [i_{14}, i_{21}] &= i_{15}, & [i_{20}, i_{21}] &= -i_{19},
\end{aligned}$$

Всего получено 20 подгрупп Ли  $G_1 \dots G_{20}$  группы Ли вращений, которые в базисе (1) задаются своими алгебрами Ли  $\overline{G}_1 \dots \overline{G}_{20}$  в виде:

$$\begin{aligned}
\overline{G}_1 &= \{i_7\}, \\
\overline{G}_2 &= \{i_{16} + \mu i_7\}, \\
\overline{G}_3 &= \{i_{16} + \mu i_7 + \nu i_{21}\}, \\
\overline{G}_4 &= \{i_7, i_{16}\}, \\
\overline{G}_5 &= \{i_{16} + \mu i_7, i_{21}\}, \\
\overline{G}_6 &= \{i_7, i_8, i_{12}\}, \\
\overline{G}_7 &= \{i_7 + i_{16}, i_8 - i_{13}, i_9 + i_{12}\}, \\
\overline{G}_8 &= \{i_7 + 2i_{16}, \sqrt{3}i_{14} + i_8 + i_{13}, \sqrt{3}i_{10} - i_9 + i_{12}\}, \\
\overline{G}_9 &= \{i_7, i_{16}, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{10} &= \{i_7, i_8, i_{21}, i_{19}\}, \\
\overline{G}_{11} &= \{i_7 + i_{16}, i_8 - i_{13}, i_9 + i_{12}, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{12} &= \{i_7, i_{16}, i_8 - i_{13}, i_9 + i_{12}, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{13} &= \{i_7, i_8, i_{12}, i_9 + i_{10}, i_{13} + i_{14}, i_{16} + i_{17}\}, \\
\overline{G}_{14} &= \{i_7, i_{16}, i_8, i_{13}, i_9, i_{12}\}, \\
\overline{G}_{15} &= \{i_7, i_8, i_{12}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{16} &= \{i_7, i_8, i_{12}, i_{11}, i_{15}, i_{18}\}, \\
\overline{G}_{17} &= \{i_7, i_{16}, i_8, i_{13}, i_9, i_{12}, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{18} &= \{i_7, i_8, i_{12}, i_9 + i_{10}, i_{13} + i_{14}, i_{16} + i_{17}, i_{19}\}, \\
\overline{G}_{19} &= \{i_7, i_8, i_{12}, i_9, i_{10}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}\}, \\
\overline{G}_{20} &= \{i_7, i_8, i_9, i_{12}, i_{13}, i_{16}, i_{10} + i_{11}, i_{14} + i_{15}, i_{17} + i_{18}, i_{10} + i_{20}\}.
\end{aligned}$$

Рассматривается однопараметрическая подгруппа Ли  $G$  группы Ли вращений шестимерного евклидова пространства  $R_6$ , соответствующая алгебре Ли с оператором

$$i_{16} + \mu i_7 = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Ставится задача найти все инвариантные относительно  $G$  одномерные, двумерные, трехмерные, четырехмерные и пятимерные векторные подпространства пространства  $R_6$ , а так же инвариантные прямые и  $K$ -плоскости.

Рассмотрим оператор  $i_{16} + \mu i_7$ .

Найдем одномерные подпространства пространства  $R_6$ , инвариантные относительно этого оператора. Условие инвариантности подпространства с направляющим вектором  $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$  имеет вид:

$$\alpha i_7 = \lambda \alpha, \quad (4)$$

или в координатном виде:

$$-\alpha_2 = \lambda \alpha_1, \alpha_1 = \lambda \alpha_2, 0 = \lambda \alpha_3, 0 = \lambda \alpha_4, 0 = \lambda \alpha_5, 0 = \lambda \alpha_6 \quad (5)$$

Из системы (5) получим:  $-\alpha_2 = \lambda^2 \alpha_2$ . Отсюда  $\alpha_2 = 0, \alpha_1 = 0$ . При  $\lambda \neq 0$  ненулевых решений нет. При  $\lambda = 0$  получим инвариантные подпространства в виде:

$$\{\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6\}, \forall \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6.$$

Найдем двумерные подпространства, инвариантные относительно оператора. Условие инвариантности подпространства с базисом  $\{\alpha, b\}, \alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$  имеет вид:

$$\alpha i_7 = \lambda \alpha + \mu b, b i_7 = \nu \alpha + \delta b, \quad (6)$$

или в координатном виде:

$$\begin{aligned} -\alpha_2 &= \lambda \alpha_1 + \mu b_1 & -b_2 &= \nu \alpha_1 + \delta b_1, \\ -\alpha_1 &= \lambda \alpha_2 + \mu b_2 & -b_1 &= \nu \alpha_2 + \delta b_2, \\ 0 &= \lambda \alpha_3 + \mu b_3 & 0 &= \nu \alpha_3 + \delta b_3, \\ 0 &= \lambda \alpha_4 + \mu b_4 & 0 &= \nu \alpha_4 + \delta b_4, \\ 0 &= \lambda \alpha_5 + \mu b_5 & 0 &= \nu \alpha_5 + \delta b_5, \\ 0 &= \lambda \alpha_6 + \mu b_6 & 0 &= \nu \alpha_6 + \delta b_6. \end{aligned} \quad (7)$$

С помощью замены базиса получаем, что решение системы можно свести к рассмотрению 15 частных случаев  $1^\circ - 15^\circ$ :

$$1^\circ. \alpha(1, 0, a_3, a_4, a_5, a_6), b(0, 1, b_3, b_4, b_5, b_6).$$

В этом случае система (7) имеет вид:

$$\begin{cases} 0 = \lambda, 1 = \mu, 0 = \lambda a_3 + \mu b_3, 0 = \lambda a_4 + \mu b_4, 0 = \lambda a_5 + \mu b_5, 0 = \lambda a_6 + \mu b_6, \\ -1 = \nu, 0 = \sigma, 0 = \nu a_3 + \delta b_3, 0 = \nu a_4 + \delta b_4, 0 = \nu a_5 + \delta b_5, 0 = \nu a_6 + \delta b_6. \end{cases} \quad (8)$$

Отсюда следует:  $a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0, b_3 = 0, b_4 = 0, b_5 = 0, b_6 = 0$ . Получаем инвариантное подпространство в виде:  $\forall \mu = \{e_1, e_2\} \cdot \{e_1 + a_3 e_3 + a_4 e_4, e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4\}$ .

$$2^\circ. \alpha(1, a_2, 0, a_4, a_5, a_6), b(0, 0, 1, b_4, b_5, b_6).$$

$$3^\circ. \alpha(1, a_2, a_3, 0, a_5, a_6), b(0, 0, 0, 1, b_5, b_6).$$

$$4^\circ. \alpha(1, a_2, a_3, a_4, 0, a_6), b(0, 0, 0, 0, 1, b_6).$$

$$5^\circ. \alpha(1, a_2, a_3, a_4, a_5, 0), b(0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

$$6^\circ. \alpha(0, 1, 0, a_4, a_5, a_6), b(0, 0, 1, b_4, b_5, b_6).$$

$$7^\circ. \alpha(0, 1, a_3, 0, a_5, a_6), b(0, 0, 0, 1, b_5, b_6).$$

$$8^\circ. \alpha(0, 1, a_3, a_4, 0, a_6), b(0, 0, 0, 0, 1, b_6).$$

$$9^\circ. \alpha(0, 1, a_3, a_4, a_5, 0), b(0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

В случае  $2^0 - 9^0, 11^0 - 15^0$  из системы (7) получим:  $0 = -1$ . Отсюда следует противоречие:  $1 = -a_2^2$ . Система инвариантности противоречива.

$$10^\circ. \alpha(0, 0, 1, 0, a_5, a_6), b(0, 0, 0, 1, b_5, b_6).$$

Система инвариантности (7) не противоречива. Получаем инвариантное подпространство:  $\{e_3, e_4\}$ .

Результаты исследования инвариантных подпространств относительно оператора  $i_{16} + \mu i_7$  сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** Относительно группы  $\overline{G_1}$  инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства  $R_6 : \{a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6\}, \forall a_3, a_4, a_5, a_6$ . и только следующие двумерные подпространства:

$$\begin{aligned} &\{e_1, e_2\}, \{e_3 + a_5 e_5 + a_6 e_6, e_4 + b_5 e_5 + b_6 e_6\}, \{e_3 + a_4 e_4 + a_6 e_6, e_5 + b_6 e_6\}, \\ &\{e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5, e_6\}, \{e_4 + a_6 e_6, e_5 + b_6 e_6\}, \{e_4 + a_5 e_5, e_6\}, \{e_5, e_6\} \end{aligned}$$

И следующие трехмерные пространства:

$$\{e_1, e_2, e_3 + c_4 e_4 + c_5 e_5 + c_6 e_6\}, \{e_1, e_2, e_4 + c_5 e_5 + c_6 e_6\}, \{e_1 e_2 e_3 + c_6 e_6\}, \{e_1, e_2, e_6\}.$$

Рассматривая аналогично инвариантные подпространства для группы  $i_6 + \lambda i_{13}, \lambda \neq 0$ , получаем теорему:

**Теорема 2.** Относительно группы  $\overline{G_2}$  инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства  $R_6 : \{a_5 e_5 + a_6 e_6\}$ , двумерные подпространства:

$$\begin{aligned} &\{e_1 + a_5 e_5 + a_6 e_6, e_2 + b_5 e_5 + b_6 e_6\}, \{e_1 + a_2 e_2 + a_6 e_6, e_5 + b_6 e_6\}, \{e_1 + a_2 e_2 + a_5 e_5, e_6\}, \\ &\{e_2 + a_6 e_6, e_4 + b_5 e_5 + b_6 e_6\}, \{e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5, e_6\}, \{e_5, e_6\} \end{aligned}$$

и следующие трехмерные подпространства:

$$\{e_1, e_2, e_3 + c_6 e_6\}, \{e_1 + a_3 e_3 + a_4 e_4, e_2 \mp a_4 e_3 \pm a_3 e_4, e_5 + c_6 e_6\}, \{e_1 + a_5 e_5, e_2 + b_5 e_5, e_6\}, \\ \{e_1 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5, e_2 \mp a_4 e_3 \pm a_3 e_4 + b_5 e_5, e_6\}, \{e_1 + a_2 e_2 + a_5 e_5 + a_6 e_6, e_3, e_4\}, \\ \{e_1 + a_2 e_2, e_5, e_6\}, \{e_2 + a_5 e_5 + a_6 e_6, e_3, e_4\}, \{e_2, e_5, e_6\}, \{e_3, e_4, e_5 + c_6 e_6\}, \{e_3, e_4, e_6\}.$$

**Теорема 3.** Относительно группы  $\overline{G_3}$  инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства  $R_6$  :

$$\{a_5 e_5 + a_6 e_6\}, \{a_1 e_1 + a_2 e_2\}, \{a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_5 e_5 + a_6 e_6\},$$

двумерные подпространства:

$$\left\{ e_1 + \frac{1}{\mu} b_4 e_3 \pm \frac{1}{\mu} b_6 e_5 \mp \frac{1}{\mu} b_5 e_6, e_2 + b_4 e_4 + b_5 e_5 + b_6 e_6 \right\}, \left\{ e_1 - \frac{1}{\mu} b_3 e_4, e_2 + b_3 e_3 \right\}, \\ \{e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_6 e_6, e_5 + b_6 e_6\}, \{e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_5 e_5, e_6\}, \{e_2 + \alpha_5 e_5, e_6\} \\ \{e_3, e_4\}, \{e_3 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6, e_4\}, \{e_5, e_6\}$$

и следующие трехмерные подпространства:

$$\{e_1 + e_6 e_6, e_2 + b_6 e_6, e_5 + c_6 e_6\}, \{e_1 + a_6 e_6, e_2 + b_6 e_6, e_5\}, \{e_1, e_2, e_3 + c_6 e_6\}, \\ \{e_1 + a_5 e_5, e_2 + b_5 e_5, e_6\}, \{e_1, e_2, e_6\}, \{e_1 + a_3 e_3 + a_4 e_4, e_2 \mp a_4 e_3 \pm a e_4, e_6\} \\ \{e_1 + a_2 e_2, e_3, e_4\}, \{e_1 + a_2 e_2 + a_5 e_5 + a_6 e_6, e_3, e_4\}, \{e_1 + a_2 e_2, e_5, e_6\}, \{e_1 + c_5 e_5 + a_6 e_6, e_3, e_4\}, \\ \{e_1, e_3 + b_5 e_5 + b_6 e_6, e_4 \mp b_6 e_5 \pm b_5 e_6\}, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_2, e_5, e_6\}, \{e_3, e_4, e_5 + c_6 e_6\}, \{e_3, e_4, e_6\}.$$

**Теорема 4.** Относительно группы  $\overline{G_4}$  инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства  $R_6$  :  $\{a_5 e_5 + a_6 e_6\}$ , двумерные подпространства:  $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}, \{e_5, e_6\}$  и следующие трехмерные подпространства:  $\{e_1, e_2, e_5 + c_6 e_6\}, \{e_1, e_2, e_6\}$ .

**Теорема 5.** Относительно группы  $\overline{G_5}$  нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства:

$$\{e_1, e_2\}, \{e_2, e_4\}, \{e_5, e_6\}$$

и следующие трехмерные подпространства:

$$\{e_1 + a_2 e_2, e_3, e_4\}, \{e_1 + a_2 e_2, e_5, e_6\}, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_2, e_5, e_6\}.$$

**Теорема 6.** Относительно группы  $\overline{G_6}$  нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства:

$$\{e_4 + a_6 e_6, e_5 + b_6 e_6\}, \{e_4 + a_5 e_5, e_6\}, \{e_5, e_6\}$$

и следующие трехмерные подпространства:

$$\{e_1, e_2, e_3\}.$$

**Теорема 7.** Относительно группы  $\overline{G_7}$  инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства  $R_6$  :  $\{a_5 e_5 + a_6 e_6\}$ , двумерное подпространство:  $\{e_5, e_6\}$ , и трехмерных подпространств нет.

**Теорема 8.** Относительно группы  $\overline{G_8}$  инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства  $R_6 : \{e_6\}$ , двумерное, и трехмерных подпространств нет.

**Теорема 9.** Относительно группы  $\overline{G_9}$  нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства:  $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}, \{e_5, e_6\}$ , и трехмерных подпространств нет.

**Теорема 10.** Относительно группы  $\overline{G_{10}}$  нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства:  $\{e_4, e_5\}$  и следующие трехмерное подпространство:  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .

**Теорема 11.** Относительно группы  $\overline{G_{11}}$  нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства:  $\{e_5, e_6\}$ , и трехмерных подпространств нет.

**Теорема 12.** Относительно группы  $\overline{G_{12}}$  нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства:  $\{e_5, e_6\}$ , и трехмерных подпространств нет.

**Теорема 13.** Относительно группы  $\overline{G_{13}}$  нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства:  $\{e_4 - e_5, e_6\}$ , и трехмерных подпространств нет.

**Теорема 14.** Относительно группы  $\overline{G_{14}}$  инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства  $R_6 : \{a_5 e_5 + a_6 e_6\}$  и только следующие двумерные подпространства:  $\{e_5, e_6\}$ , и трехмерных подпространств нет.

**Теорема 15.** Относительно группы  $\overline{G_{15}}$  нет инвариантных одномерных, двумерных подпространств, инвариантно только трехмерное пространство:  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .

**Теорема 16.** Относительно группы  $\overline{G_{16}}$  нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства:  $\{e_4, e_5\}$ , и трехмерных подпространств нет.

**Теорема 17.** Относительно группы  $\overline{G_{17}}$  нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства:  $\{e_5, e_6\}$ , и трехмерных подпространств нет.

**Теорема 18.** Относительно группы  $\overline{G_{18}}$  нет инвариантных одномерных, двумерных, трехмерных подпространств.

**Теорема 19.** Относительно группы  $\overline{G_{19}}$  нет инвариантных одномерных, двумерных, трехмерных подпространств.

**Теорема 20.** Относительно группы  $\overline{G_{20}}$  нет инвариантных одномерных, двумерных, трехмерных подпространств.

Используя геометрические характеристики подгрупп Ли, мы получаем цепочки по включению подгрупп Ли группы Ли вращений пространства  $R_6$ .

Цепочки:

$$G_{20} \supset G_7$$

$$G_{20} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{20} \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{20} \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{19} \supset G_{18} \supset G_{13} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{19} \supset G_{14} \supset G_7$$

$$G_{19} \supset G_{14} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{19} \supset G_{14} \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{19} \supset G_{14} \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{19} \supset G_{13} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{19} \supset G_8$$

$$G_{19} \supset G_7$$

$$G_{18} \supset G_{13} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{17} \supset G_{14} \supset G_7$$

$$G_{17} \supset G_{14} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{17} \supset G_{14} \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{17} \supset G_{14} \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{17} \supset G_{12} \supset G_{11} \supset G_7$$

$$G_{17} \supset G_{12} \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{17} \supset G_{12} \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{17} \supset G_9 \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{17} \supset G_9 \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{17} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{16} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{15} \supset G_{10} \supset G_1$$

$$G_{15} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{14} \supset G_7$$

$$G_{14} \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{14} \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{13} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{12} \supset G_{11} \supset G_7$$

$$G_{12} \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{12} \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{11} \supset G_7$$

$$G_{10} \supset G_1$$

$$G_9 \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_9 \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_6 \supset G_1$$

$$G_5 \supset G_2$$

$$G_4 \supset G_2$$

$$G_4 \supset G_1.$$

Пусть  $G$  группа Ли  $H_1, H_2$  ее подгруппы Ли, причем  $H_1 \subset H_2$ .

**Определение 1.** Каноническим морфизмом однородного пространства  $G/H_1$  в однородное пространство  $G/H_2$  называется морфизм  $f$  вида:

$$f : G/H_1 \rightarrow G/H_2 : aH_1 \rightarrow aH_2$$

для любого  $a \in G$ .

Таким образом, полученная выше классификация цепочек подгрупп Ли группы вращений пространства  $R_6$  приводит к классификации всех канонических морфизмов однородных пространств со структурной группой  $H$  – группой всех вращений пространства  $R_6$ .

**Определение 2.** Однородное пространство  $H/G_1$  называется редуktivным, если алгебра Ли  $\overline{H}$  группы Ли  $H$  распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G}_i, \tag{9}$$

причем подпространство  $m$  инвариантно относительно  $ad\overline{G}_i$ , где  $ad\overline{G}_i$  – присоединенное представление алгебры Ли  $\overline{G}_i$ .

Рассмотрим однородное пространство  $H/G_6$ ,  $G_6 = \{i_7, i_8, i_{12}\}$ ,  $a = \{i_7\}$ ,  $\overline{H} = \{i_7 \dots i_{21}\}$  и базис, соответствующий частному случаю  $416^0$ :

$$416^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= i_9 + \lambda i_{12} + \mu i_7, \\ x_2 &= i_{10} + \sigma i_{12} + s i_7, \\ x_3 &= i_{11} + p i_{12} + q i_7, \\ x_4 &= i_{13} + \varepsilon i_7, \\ x_5 &= i_{14} + b i_7, \\ x_6 &= i_{15} + e i_7, \\ x_7 &= i_{21}, \\ x_8 &= i_{20}, \\ x_9 &= i_{19}, \\ x_{10} &= i_{18}, \\ x_{11} &= i_{17}, \\ x_{12} &= i_{16}. \end{aligned} \tag{10}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_7$ , получим:

$$\begin{aligned}
 [a, X_1] &= -i_{13} + \lambda i_8, \\
 [a, X_2] &= -i_{14} + \sigma i_8, \\
 [a, X_3] &= -i_{15} + p i_8, \\
 [a, X_4] &= i_9, \\
 [a, X_5] &= i_{10}, \\
 [a, X_6] &= i_{11}, \\
 [a, X_7] &= 0, \\
 [a, X_8] &= 0, \\
 [a, X_9] &= 0, \\
 [a, X_{10}] &= 0, \\
 [a, X_{11}] &= 0, \\
 [a, X_{12}] &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Запишем линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_{12}$ :

$$\begin{aligned}
 &\alpha_1(i_9 + \lambda i_{12} + \mu i_7) + \beta_1(i_{10} + \sigma i_{12} + s i_7) + \gamma_1(i_{11} + p i_{12} + q i_7) + \delta_1(i_{13} + \varepsilon i_7) + \omega_1(i_{14} + b i_7) + \\
 &+ \varepsilon_1(i_{15} + e i_7) + g_1 i_{21} + t_1 i_{20} + p_1 i_{19} + q_1 i_{18} + s_1 i_{17} + h_1 i_{16} = \\
 &= i_7(\alpha_1 \mu + \beta_1 s + \gamma_1 q + \delta_1 \varepsilon + \omega_1 b + \varepsilon_1 e) + i_9 \alpha_1 + i_{10} \beta_1 + i_{11} \gamma_1 + i_{12}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 \sigma + \gamma_1 p) + i_{13} \delta_1 + \\
 &+ i_{14} \omega_1 + i_{15} \varepsilon_1 + i_{16} h_1 + i_{17} s_1 + i_{18} q_1 + i_{19} p_1 + i_{20} t_1 + i_{21} g_1.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Приравнявая эту линейную комбинацию к правой части первой формулы (11) и затем аналогично соответствующие линейные комбинации к правым частям остальных формул (11) и проводя соответствующие вычисления, получим:

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= -1, \quad \lambda = 0, \quad \varepsilon = 0, \\
 \omega_2 &= -1, \quad \sigma = 0, \quad b = 0, \\
 \varepsilon_3 &= -1, \quad p = 0, \quad e = 0 \\
 \alpha_4 &= 1, \quad \mu = 0, \quad \lambda = 0 \\
 \beta_5 &= 1, \quad s = 0, \quad \sigma = 0, \\
 \gamma_6 &= 1, \quad q = 0, \quad p = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, относительно оператора  $i_7$  инвариантны следующие двенадцатимерные подпространства:  $\{i_9, i_{10}, i_{11}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$ .

Всех случаев, которые необходимо рассмотреть для нахождения инвариантных двенадцатимерных подпространств для оператора  $i_7$ , будет 455, причем в случаях 1–415, 417–455 решения систем инвариантности не дают редутивных дополнений. Это же подпространство  $\{i_9, i_{10}, i_{11}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$ , как показывают вычисления, будет инвариантно и относительно операторов  $i_8, i_{12}$ . Таким образом, получаем теорему.

**Теорема 21.** Однородное пространство  $H / G_6$  является редутивным, редутивным дополнением для него является пространство:

$$m = \{i_9, i_{10}, i_{11}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.
2. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
3. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.02.2019

***Yudov A.A, Sirisko E.A. Classification of Homogeneous Reductive Spaces with a Structural Group – the Lie Group of Motions of the Six-Dimensional Euclidean Space  $R_6$***

*The aim of the study is to find invariant subspaces, lines and planes for Lie subgroups of the Lie group  $H$  of rotations of six-dimensional Euclidean spaces, classify homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group  $G$  of space motions, and study the properties of Lie subgroups of the  $G$ .*