УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: matysikoleg@mail.ru

АПРИОРНЫЙ ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В НЕЯВНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения линейных некорректных уравнений с положительным ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Доказана сходимость метода в исходной норме гильбертова пространства. Получены априорные оценки погрешности метода при точной и приближенной правой части операторного уравнения, погрешность в счете. Найденные для предложенного метода оценки погрешности оптимизированы. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого итерационного метода и явного метода простой итерации.

Посвящается выдающемуся белорусскому математику, профессору П.П. Забрейко

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается неявный итерационный метод

$$x_{n+1} = x_n + \alpha A\left(y - Ax_{n+1}\right), \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A\left(y_\delta - Ax_{n+1,\delta}\right), \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Ниже метод (3) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{n}\left(\|x - x_{n,\delta}\|\right)\right) = 0$.

2. Сходимость метода при точной правой части уравнения

Справедлива

Теорема 1. *Итерационный метод* (2) *при условии* $\alpha \in (0, \infty)$ *сходится в исходной норме гильбертова пространства*.

Доказательство.

По индукции нетрудно показать, что

$$x_n = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha A^2\right)^{-n}\right]y. \tag{4}$$

Действительно, из (2) и из (4) $x_1 = \left(E + \alpha A^2\right)^{-1} \alpha A y$, следовательно, при $n = 1$ формула (4) верна. Предположим, что она справедлива при $n = m$, т. е. $x_m = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha A^2\right)^{-m}\right]y$ и докажем, что (4) верна при $n = m + 1$:

$$x_{m+1} = x_m + \alpha A\left(y - Ax_{m+1}\right) = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha A^2\right)^{-m}\right]y + \alpha A\left(y - Ax_{m+1}\right) = A^{-1}y + \alpha Ay -$$

$$-A^{-1}\left(E + \alpha A^2\right)^{-m} y - \alpha A^2 x_{m+1},$$

отсюда

$$x_{m+1} = A^{-1}\left(E + \alpha A^2\right)^{-1} y - A^{-1}\left(E + \alpha A^2\right)^{-(m+1)} y +$$

$$+\alpha A\left(E + \alpha A^2\right)^{-1} y = A^{-1}\left(E + \alpha A^2\right)\left(E + \alpha A^2\right)^{-1} y - A^{-1}\left(E + \alpha A^2\right)^{-(m+1)} y = A^{-1}\left[E -\right.$$

$$\left. - \left(E + \alpha A^k\right)^{-(m+1)}\right] y.$$

Следовательно, формула (4) справедлива.

Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$ ($M = \|A\|$, $E_\lambda -$ спектральная функция), имеем

$$x - x_n = A^{-1}y - A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha A^2\right)^{-n}\right]y = A^{-1}\left(E + \alpha A^2\right)^{-n} y =$$

$$= \int\limits_0^M \lambda^{-1} \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n} dE_\lambda y = \int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1} \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n} dE_\lambda y + \int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1} \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n} dE_\lambda y .$$

Потребуем, чтобы при $\lambda \in \left(0, M\right]$ выполнялось

$$\alpha \in \left(0, \infty\right). \tag{5}$$

Тогда $\frac{1}{1 + \alpha\lambda^2} \le q < 1$ и, следовательно, $\left\| \int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1} \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n} dE_\lambda y \right\| \le q^n \left\| \int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1} dE_\lambda y \right\| =$

$= q^n \left\| \int\limits_\varepsilon^M dE_\lambda x \right\| \le q^n \|x\| \to 0,\ n \to \infty$. $\left\| \int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1} \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n} dE_\lambda y \right\| \le \left\| \int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda x \right\| = \|E_\varepsilon x\| \to 0,$

так как при $\varepsilon \to 0$ E_ε сильно стремится к нулю в силу свойств спектральной функции [1].

Таким образом, доказано, что $\|x - x_n\| \to 0,\ n \to \infty$, т.е. что метод (2) при условии (5) сходится. Теорема 1 доказана.

3. Оценка скорости сходимости

Скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для ее оценки предположим, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, т.е. $x = A^s z, \ \ s > 0$. Тогда $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^s \left(1 + \alpha\lambda^2\right)^{-n} dE_\lambda z$.

Найдем максимум подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s \left(1 + \alpha\lambda^2\right)^{-n}$. Приравняв нулю производную от $f(\lambda)$, получим уравнение для нахождения стационарных точек функции $f(\lambda)$: $\lambda^{s-1}\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{-n-1}\left[s\left(1+\alpha\lambda^2\right) - 2n\alpha\lambda^2\right] = 0.$

Отсюда $\lambda_* = \left(\dfrac{s}{(2n-s)\alpha}\right)^{1/2}$ – стационарная точка функции $f(\lambda)$ при $2n > s$. Поскольку $f''(\lambda_*) < 0$, то λ_* – точка максимума для $f(\lambda)$. Найдем его:

$$f(\lambda_*) = \left[\frac{s}{(2n-s)\alpha}\right]^{s/2}\left[1 + \frac{s}{2n-s}\right]^{-n} = s^{s/2}\alpha^{-s/2}(2n-s)^{n-s/2}(2n)^{-n} =$$

$$= \left(\frac{s}{2n\alpha}\right)^{s/2}\left(1 + \frac{s}{2n-s}\right)^{\frac{-(2n-s)}{2}} < \left(\frac{s}{2n\alpha}\right)^{s/2} 2^{-s/2} = \left(\frac{s}{4n\alpha}\right)^{s/2}.$$

Нетрудно проверить, что найденный для функции $f(\lambda)$ максимум является глобальным на отрезке [0, M]. Таким образом, $\|x - x_n\| \le s^{s/2}\left(4n\alpha\right)^{-s/2}\|z\|$.

4. Сходимость метода при приближенной правой части уравнения

Покажем, что при условии (5) метод (3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ приближенной правой части операторного уравнения (1).

Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$.

По доказанному в разделе 2, $x - x_n \to 0,\ n \to \infty$. Убедимся, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимся к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, имеем

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha A^2\right)^{-n}\right](y - y_\delta) = \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n}\right] dE_\lambda \left(y - y_\delta\right).$$

Оценим сверху подынтегральную функцию $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \dfrac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n}\right] \ge 0$ при условии (5).

При $n = 1$ $g_1(\lambda)=\dfrac{\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda^2}$. Ее производная равна $g_1'(\lambda)=\dfrac{\alpha\left(1-\alpha\lambda^2\right)}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^2}$, следовательно, $\lambda^*=\alpha^{-1/2}$ – стационарная точка для функции $g_1(\lambda)$. Поскольку $g_1''\left(\lambda^*\right)<0$, то λ^* – точка максимума функции $g_1(\lambda)$ и $\max\limits_{[0,M]} g_1(\lambda)=g_1\left(\lambda^*\right)\le\alpha^{1/2}$.

Покажем по индукции, что при $n\in N$

$$g_n(\lambda)=\left|g_n(\lambda)\right|\le 2n^{1/2}\alpha^{1/2}. \tag{6}$$

При $n = 1$ неравенство (6) проверено выше. В дальнейшем будем считать $n\ge 2$. Предположим, что (6) верно при $n = m$, т.е. $g_m(\lambda)\le 2m^{1/2}\alpha^{1/2}$ и рассмотрим

$$g_{m+1}(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\frac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{m+1}}\right]=\lambda^{-1}\left[1-\frac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{m}}\right]+\lambda^{-1}\left[1-\frac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{m+1}}\right]-$$

$$-\lambda^{-1}\left[1-\frac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{m}}\right]\le 2m^{1/2}\alpha^{1/2}+\frac{\alpha\lambda}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{m+1}}.$$

Покажем, что

$$2m^{1/2}\alpha^{1/2}+\frac{\alpha\lambda}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{m+1}}\le 2(m+1)^{1/2}\alpha^{1/2}, \tag{7}$$

что равносильно неравенству $\dfrac{\alpha\lambda}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{m+1}}\le 2\left(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}\right)\alpha^{1/2}$. Отсюда $\dfrac{\alpha^{1/2}\lambda}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{m+1}}\le 2\left(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}\right)$. Имеем

$$\sqrt{m+1}=\sqrt{m\left(1+\frac{1}{m}\right)}=\sqrt{m}\left\{1+\frac{1}{2m}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!m^2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!m^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!m^4}+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot m^{2p-1}}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]\cdot\left[\frac{1}{2}-(2p-1)\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot 2p\cdot m^{2p}}+\ldots\right\}.$$

Покажем, что каждый положительный член ряда больше модуля следующего за ним отрицательного члена, т.е.

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot m^{2p-1}}>\left|\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]\cdot\left[\frac{1}{2}-(2p-1)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot 2p\cdot m^{2p}}\right|,$$

что равносильно $1>\frac{\left|\frac{1}{2}-(2p-1)\right|}{2pm}$ или $\frac{2p-\frac{3}{2}}{2pm}<1$, а это уже очевидно при $m\geq 1$. Следовательно, $\sqrt{m+1}>\sqrt{m}\left(1+\frac{1}{2m}-\frac{1}{8m^2}\right)$.

Вернемся к доказательству неравенства (7). Поскольку (см. раздел 3) $\frac{\lambda}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{m+1}}\leq\left[4(m+1)\alpha\right]^{-1/2}$, то вместо (7) докажем более сильное неравенство

$$\left[4(m+1)\alpha\right]^{-1/2}\alpha^{1/2}\leq 2m^{1/2}\left(\frac{1}{2m}-\frac{1}{8m^2}\right). \tag{8}$$

Преобразуем его: $(m+1)^{-1/2}2^{-1}\leq 2m^{1/2}\frac{1}{2m}\left(1-\frac{1}{4m}\right)$.

При $m\geq 2$ $2\left(\frac{m+1}{m}\right)^{1/2}\left(1-\frac{1}{4m}\right)>1$. Значит, неравенство (8) выполняется, и тем более справедливо неравенство (7). Таким образом, для $n\geq 1$ справедлива оценка (6), т.е. $g_n(\lambda)\leq 2n^{1/2}\alpha^{1/2},\ n\geq 1$. Отсюда $\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|\leq 2n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ n\geq 1$.

Поскольку $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|\leq\left\|x-x_n\right\|+\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|\leq\left\|x-x_n\right\|+2n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta$ и $\left\|x-x_n\right\|\to 0$, $n\to\infty$, то для сходимости метода (3) достаточно выбрать $n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/2}\delta\to 0,\quad n\to\infty,\quad \delta\to 0$. Итак, доказана

Теорема 2. *При условии* (5) *итерационный метод* (3) *сходится, если число итераций n выбирать из условия* $n^{1/2}\delta\to 0,\quad n\to\infty,\quad \delta\to 0$.

5. Оценка погрешности метода и ее оптимизация

Запишем теперь общую оценку погрешности метода (3)

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|\leq\left\|x-x_n\right\|+\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|\leq s^{s/2}\left(4n\alpha\right)^{-s/2}\left\|z\right\|+2\left(n\alpha\right)^{1/2}\delta,\ n\geq 1. \tag{9}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Если решение x уравнения* (1) *истокообразно представимо, то при условии* (5) *для метода* (3) *справедлива оценка погрешности* (9).

Для минимизации полученной оценки погрешности вычислим правую часть оценки (9) в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим априорный момент останова (параметр регуляризации)

$$n_{\text{опт}}=2^{-2}s^{(s+2)/(s+1)}\alpha^{-1}\left\|z\right\|^{2/(s+1)}\delta^{-2/(s+1)}. \tag{10}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (9), имеем

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_{\text{опт}} \le (1+s) \cdot s^{-s/(2(s+1))} \delta^{s/(s+1)} \left\| z \right\|^{1/(s+1)} . \qquad (11)$$

Итак, доказана

Теорема 4. *Оптимальная оценка погрешности для метода* (3) *имеет вид* (11) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (10).

Замечание 1. *Оценка погрешности (11) имеет порядок* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из [2], он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$.

Замечание 2. *Оптимальная оценка (11) не зависит от* α, *но от параметра* α *зависит* $n_{опт}$, *поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать* α, *удовлетворяющую условию (5) и так, чтобы* $n_{опт} = 1$. *Для этого достаточно выбрать* $\alpha_{\text{опт}} = 2^{-2} s^{(s+2)/(s+1)} \left\| z \right\|^{2/(s+1)} \delta^{-2/(s+1)}$.

Сравнение неявного метода (3) с широко известным явным методом простой итерации (методом Ландвебера) [2–8]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right),\ x_{0,\delta} = 0 \qquad (12)$$

показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод (12) предпочтительнее неявного метода (3). Однако неявный метод (3) обладает следующим важным достоинством. В явном методе (12) на параметр α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\left\| A \right\|}$, что может привести на практике к необходимости большого числа вычислений. В неявном методе (3) ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\left\| A \right\|$). В связи с чем оптимальную оценку для метода (3) можно получить уже на первом шаге итераций.

Рассмотрим погрешность неявного метода (3) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (3), которую можно преобразовать к виду: $x_{n+1,\delta} = \left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left[x_{n,\delta} + \alpha A y_\delta\right],\ \ x_{0,\delta} = 0$. Тогда z_n – значение с учетом вычислительной погрешности, т.е.

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left[z_n + \alpha A y_\delta\right] + \alpha\gamma_n,\ \ z_0 = 0 . \qquad (13)$$

Здесь γ_n – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (13) равенство (3). Имеем $\varepsilon_{n+1} = \left(E + \alpha A^2\right)^{-1} \varepsilon_n + \alpha\gamma_n,\ \ \varepsilon_0 = 0$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$.

По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(E + \alpha A^2\right)^{-(n-1-i)} \alpha\gamma_i .$$

В силу (5) и потому, что $0 \in Sp\, A$ справедливо $\left\| \left(E + \alpha A^2\right)^{-1} \right\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma, \quad \gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$.

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности неявного метода итераций (3) запишется в виде

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le \left(\frac{s}{4n\alpha}\right)^{s/2} \|z\| + 2\left(n\alpha\right)^{1/2} \delta + n\alpha\gamma, \ n \ge 1 .$$

Предложенный метод может быть применен для решения прикладных некорректных задач, которые встречаются в динамике и кинетике, математической экономике, сейсмике, спектроскопии, системах полной автоматической обработки и интерпретации экспериментов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.

2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

3. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.

4. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

5. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.

6. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.

7. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.

8. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.03.2019

O.V. Matysik. **The a Priori Choice of Parameter of Regularization in the Non-Evident Iteration Method of the Decision of the Linear Non-Correct Equations**

In the Hilbert space to solve of the linear non-correct equations with limited affirmated self-adjoned operator we investigate the application of the non-evident iteration method. Convergence of the method in its initial norm of Gilbert space is proved. The a priori estimations of this method error, having a precise and approximate right-side part of the operator equation, the error in calculation have been received. For the offered method the found estimations of the error are optimised. The comparison of the error estimations of the given iteration method and the evident method of simple iteration has been done.