

УДК 517.927.21

С.А. Марзан

канд. физ.-мат. наук, доц., первый проректор
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: marzanserg2@gmail.com

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Исследована задача типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения с производными Римана – Лиувилля комплексных порядков в весовом пространстве непрерывных функций. С использованием свойств дробных интегралов и производных Римана – Лиувилля в весовом пространстве непрерывных функций доказана равносильность рассматриваемой задачи интегральному уравнению Вольтерра второго рода, а также получены условия существования и единственности решения задачи.

Пусть $I_{a+}^{\alpha}g$ и $D_{a+}^{\alpha}y$ – дробные интегралы и производные Римана – Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси:

$$(I_{a+}^{\alpha}g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (1)$$

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, \quad (2)$$

($[\operatorname{Re}(\alpha)]$ – целая часть $\operatorname{Re}(\alpha)$) [1, § 2.2, 2.4].

Краевые задачи для так называемых дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция входит под знаком дробной производной, изучались многими авторами (см. исторические сведения и обзор методов и результатов в [1, §§ 42–43] и обзорной статье [2]). Интерес к таким проблемам вызван их приложениями в задачах физики, механики и других прикладных наук [3; 4]. С точки зрения приложений одной из наиболее актуальных задач теории дифференциальных уравнений дробного порядка является построение теории их разрешимости в различных функциональных пространствах.

Обозначим через $C_{\gamma}[a, b]$ ($\gamma \in \mathbb{C}$) класс функций $g(x)$, заданных на $[a, b]$ и таких, что $(x-a)^{\gamma}g(x) \in C[a, b]$:

$$C_{\gamma}[a, b] = \left\{ g(x) : \|g\|_{C_{\gamma}} = \|(x-a)^{\gamma}g(x)\|_C < \infty \right\}, \quad C_0[a, b] = C[a, b]. \quad (3)$$

Для $\gamma \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $C_{\gamma}^n[a, b]$ банахово пространство функций $g(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ до порядка $n-1$ и имеющих производную порядка n такую, что $g^{(n)}(x) \in C_{\gamma}[a, b]$:

$$C_{\gamma}^n[a, b] = \left\{ g : \|g\|_{C_{\gamma}^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \|g^{(k)}\|_C + \|g^{(n)}\|_{C_{\gamma}} \right\}, \quad C_{\gamma}^0[a, b] = C_{\gamma}[a, b].$$

Из этого определения вытекает следующее описание пространства $C_\gamma^n[a, b]$.

Лемма 1. Пространству $C_\gamma^n[a, b]$ принадлежат те и только те функции $g(x)$, которые представимы в виде

$$g(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, \quad (4)$$

где $\varphi(t) \in C_\gamma[a, b]$, а c_k – произвольные постоянные. При этом

$$\varphi(x) = g^{(n)}(x), c_k = \frac{g^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

В частности, при $\gamma = 0$ $g(x) \in C^n[a, b]$ тогда и только тогда, когда $g(x)$ представляется в виде (4), где $\varphi(x) \in C[a, b]$.

Непосредственные оценки с учетом (3) и [1, (2.44)] дают условия ограниченности оператора I_{a+}^α в пространстве $C_\gamma[a, b]$.

Лемма 2. Пусть $\alpha \in C$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) и $\gamma \in C$ ($0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1$).

Если $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\alpha)$, то оператор I_{a+}^α ограниченно действует из $C_\gamma[a, b]$ в $C_{\gamma-\alpha}[a, b]$:

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_{C_{\gamma-\alpha}} \leq \frac{\Gamma(\operatorname{Re}(\alpha))\Gamma(1-\operatorname{Re}(\gamma))}{|\Gamma(\alpha)|\Gamma(1+\operatorname{Re}(\alpha-\gamma))} \|f\|_{C_\gamma}.$$

Если $\operatorname{Re}(\gamma) \leq \operatorname{Re}(\alpha)$, то оператор I_{a+}^α ограниченно действует из $C_\gamma[a, b]$ в $C[a, b]$:

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_C \leq (b-a)^{\operatorname{Re}(\alpha-\gamma)} \frac{\Gamma(\operatorname{Re}(\alpha))\Gamma(1-\operatorname{Re}(\gamma))}{|\Gamma(\alpha)|\Gamma(1+\operatorname{Re}(\alpha-\gamma))} \|f\|_{C_\gamma}.$$

В частности, оператор I_{a+}^α ограничен в $C_\gamma[a, b]$:

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_{C_\gamma} \leq (b-a)^{\operatorname{Re}(\alpha)} \frac{\Gamma(\operatorname{Re}(\alpha))\Gamma(1-\operatorname{Re}(\gamma))}{|\Gamma(\alpha)|\Gamma(1+\operatorname{Re}(\alpha-\gamma))} \|f\|_{C_\gamma}.$$

Следующие три утверждения для функций $g(x) \in C_\gamma[a, b]$ доказываются аналогично известным результатам для $g(x) \in L(a, b)$ [1, §§ 2.3, 2.5, теорема 2.4] с учетом леммы 1.

Лемма 3. Если $\gamma \in C$ ($0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1$), то для функций $g(x) \in C_\gamma[a, b]$ выполняется полугрупповое свойство

$$(I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta g)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} g)(x) \quad (\alpha \in C, \operatorname{Re}(\alpha) > 0; \beta \in C, \operatorname{Re}(\beta) > 0).$$

Лемма 4. Если $\alpha \in C$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) и $\gamma \in C$ ($0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1$), то для функций $g(x) \in C_\gamma[a, b]$ справедлива формула

$$\left(D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha g\right)(x) = g(x).$$

Если дополнительно $\beta \in C$ и $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > 0$, то для $g(x) \in C_\gamma[a, b]$

$$\left(D_{a+}^\beta I_{a+}^\alpha g\right)(x) = \left(I_{a+}^{\alpha-\beta} g\right)(x).$$

Лемма 5. Пусть $\alpha \in C$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) $n = -[-\operatorname{Re}(\alpha)]$, $\left(I_{a+}^{n-\alpha} g\right)(x)$ – дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка $n - \alpha$, и $\gamma \in C$ ($0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1$).

Если $g(x) \in C_\gamma[a, b]$ и $\left(I_{a+}^{n-\alpha} g\right)(x) \in C_\gamma^n[a, b]$, то имеет место формула

$$\left(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha g\right)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n \frac{g_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j}, \quad g_{n-\alpha}(x) = \left(I_{a+}^{n-\alpha} g\right)(x). \quad (5)$$

Исследуем проблему существования и единственности решения задачи типа Коши для более общего, чем в [5], нелинейного дифференциального уравнения

$$\left(D_{a+}^\alpha y\right)(x) = f\left[x, y(x), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(x), \dots, \left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y\right)(x)\right], \quad n = -[-\operatorname{Re}(\alpha)], \quad (6)$$

где $\alpha, \alpha_i \in C$ ($i = 1, \dots, n$),

$$0 = \alpha_0 < \operatorname{Re}(\alpha_1) < \dots < \operatorname{Re}(\alpha_{n-1}) < \operatorname{Re}(\alpha), \quad (7)$$

с начальными условиями

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = b_k, \quad b_k \in C \quad (k = 1, \dots, n), \quad (8)$$

в пространстве $C_{n-\alpha, \gamma}^\alpha[a, b]$:

$$C_{n-\alpha, \gamma}^\alpha[a, b] = \left\{y \in C_{n-\alpha}[a, b] : D_{a+}^\alpha y \in C_\gamma[a, b]\right\}, \quad C_\gamma^\alpha[a, b] \equiv C_{0, \gamma}^\alpha[a, b].$$

Теорема 1. Пусть $\alpha \in C$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$), $\gamma \in C$ ($0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1$), $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ ($n = -[-\operatorname{Re}(\alpha)]$) удовлетворяют условию (7), а функция $f[x, y_1, y_2, \dots, y_n] : [a, b] \times R^n \rightarrow R$ такова, что при любых $y_i \in R$ ($i = 1, \dots, n$) $f[x, y_1, y_2, \dots, y_n] \in C_\gamma[a, b]$ и

$$\max_{(x, y_1, \dots, y_n) \in [a, b] \times \bar{R}^n} \left| (x-a)^\gamma f[x, y_1, y_2, \dots, y_n] \right| = M_\gamma < \infty. \quad (9)$$

Для того чтобы функция $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ являлась решением задачи типа Коши (6), (8), необходимо и достаточно, чтобы она была решением интегрального уравнения

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y)(t)]}{(x - t)^{1 - \alpha}} dt. \quad (10)$$

Доказательство. Если $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ и выполняется условие (9), то из (6) и (3) следует, что дробная производная $(D_{a+}^{\alpha} y)(x) \in C_{\gamma}[a, b]$. В соответствии с (2)

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x), \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1,$$

и тогда согласно лемме 1 $(I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) \in C_{\gamma}^n[a, b]$. Это дает возможность воспользоваться леммой 5 с $\gamma = n - \alpha$. Применяя оператор I_{a+}^{α} к обеим частям (6), используя (5) и (8), с учетом (9) и леммы 2, согласно которой

$$(I_{a+}^{\alpha} f)[x, y(x), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(x), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y)(x)] \in C_{n-\alpha}[a, b],$$

мы приходим к интегральному уравнению (10).

Пусть теперь $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ – решение интегрального уравнения (10). Применяя оператор D_{a+}^{α} к обеим частям (10), учитывая равенства

$$(D_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\beta - 1})(x) = 0, \quad \beta = \alpha, \alpha - 1, \dots, \alpha - [\operatorname{Re}(\alpha)]$$

и лемму 4, получим уравнение (6).

Покажем, что $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям (8). Пусть $k \in N$, $1 \leq k \leq n - 1$. Применяя оператор $D_{a+}^{\alpha - k}$ к обеим частям уравнения (10) и используя равенство

$$(D_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\beta - 1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha - 1}, \quad \alpha, \beta \in C, \operatorname{Re}(\beta) > \operatorname{Re}(\alpha) > 0$$

и лемму 4, получим:

$$(D_{a+}^{\alpha - k} y)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(k - j + 1)} (x - a)^{k - j} + \frac{1}{(k - 1)!} \int_a^x f[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y)(t)] (x - t)^{k - 1} dt. \quad (11)$$

Если же $k = n$, то

$$(D_{a+}^{\alpha - n} y)(x) \equiv (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{(n - j)!} (x - a)^{n - j} +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y)(t)] (x-t)^{n-1} dt. \quad (12)$$

Переходя в (11) и (12) к пределу при $x \rightarrow a + 0$, приходим к равенствам (8). Это завершает доказательство теоремы.

Для установления условий существования и единственности решения задачи типа Коши (6), (8) к условиям теоремы 1 добавим дополнительное условие липшицевости функции f относительно n переменных:

$$|f[x, y_1, \dots, y_n] - f[x, y_1', \dots, y_n']| \leq L \sum_{i=1}^n |y_i - y_i'| \quad (13)$$

для любых $x \in [a, b]$ и $(y_1, \dots, y_n), (y_1', \dots, y_n') \in R^n$, где постоянная $L > 0$ не зависит от x .

Теорема 2. Пусть $\alpha \in C, (\operatorname{Re}(\alpha) > 0), \gamma \in C (0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1), n = -[-\operatorname{Re}(\alpha)]$. Пусть функция $f[x, y_1, y_2, \dots, y_n]: [a, b] \times R^n \rightarrow R$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и выполняется условие (13). Тогда существует единственное решение задачи типа Коши (6), (8) в пространстве $C_{n-\alpha, \gamma}^\alpha[a, b]$.

Доказательство. Согласно теореме 1 достаточно доказать существование единственного решения интегрального уравнения (10), которое имеет смысл на любом отрезке $[a, x_1] \subset [a, b]$. Выберем x_1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$L \sum_{i=1}^n A_i < 1, \quad (14)$$

где $L > 0$ определяется условием (13), а

$$A_k = (x_1 - a)^{\operatorname{Re}(\alpha - \alpha_{k-1})} \frac{\Gamma[\operatorname{Re}(\alpha - \alpha_{k-1})] \Gamma[\operatorname{Re}(\alpha) - n + 1]}{|\Gamma(\alpha - \alpha_{k-1})| \Gamma[1 - \operatorname{Re}(2\alpha - \alpha_{k-1}) - n]}, \quad k = 1, \dots, n,$$

и докажем существование единственного решения интегрального уравнения (10) на отрезке $[a, x_1]$.

Для доказательства применим метод последовательных приближений. Пусть

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha - j}, \quad (15)$$

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y_{m-1}(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y_{m-1})(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_{m-1})(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad (16)$$

где $m = 1, 2, \dots$

Из (15) следует, что $y_0(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$. Согласно условиям теоремы и лемме 2, второй член в правой части (16) также принадлежит $C_{n-\alpha}[a, b]$. Действительно, если $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\alpha)$, то в силу леммы 2

$$I_{a+}^{\alpha} f \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y)(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \in C_{\gamma-\alpha}[a, b],$$

Следовательно, $y_m(x) \in C_{n-\alpha}[a, b] \cap C_{\gamma-\alpha}[a, b] = C_{n-\alpha}[a, b]$. Если же $\operatorname{Re}(\gamma) \leq \operatorname{Re}(\alpha)$, то согласно лемме 2 $I_{a+}^{\alpha} f \in C[a, b]$, а значит, $y_m(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$.

Оценим теперь разность $\|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_{m-1}\|_{C_{n-\alpha}}$ при $m \in N$ и $k = 1, \dots, n$. Для этого заметим, что в силу (16), леммы 4, леммы 2 и (9) справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} & \|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_0\|_{C_{n-\alpha}} = \\ & = \|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} (I_{a+}^{\alpha} f)[x, y_{m-1}(x), (D_{a+}^{\alpha_1} y_{m-1})(x), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_{m-1})(x)]\|_{C_{n-\alpha}} = \\ & = \|(I_{a+}^{\alpha-\alpha_{k-1}} f)[x, y_{m-1}(x), (D_{a+}^{\alpha_1} y_{m-1})(x), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_{m-1})(x)]\|_{C_{n-\alpha}} \leq \\ & \leq M_{n-\alpha} (x_1 - a)^{\operatorname{Re}(\alpha-\alpha_{k-1})} \frac{\Gamma[\operatorname{Re}(\alpha - \alpha_{k-1})] \Gamma[\operatorname{Re}(\alpha) - n + 1]}{|\Gamma(\alpha - \alpha_{k-1}) \Gamma[1 - \operatorname{Re}(2\alpha - \alpha_{k-1}) - n]|} = M_{n-\alpha} A_k, \end{aligned}$$

где $k = 1, \dots, n$. Отсюда при $m = 1$ получаем оценку

$$\sum_{i=1}^n \|D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_1 - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_0\|_{C_{n-\alpha}} \leq M_{n-\alpha} \sum_{i=1}^n A_i. \quad (16)$$

Используя лемму 2, (13) и принимая во внимание (16), имеем:

$$\begin{aligned} & \|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_1 - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_0\|_{C_{n-\alpha}} = \\ & = \|I_{a+}^{\alpha-\alpha_{k-1}} (f[x, y_1, D_{a+}^{\alpha_1} y_1, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_1] - f[x, y_0, D_{a+}^{\alpha_1} y_0, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_0])\|_{C_{n-\alpha}} \leq \\ & \leq A_k \|f[x, y_1, D_{a+}^{\alpha_1} y_1, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_1] - f[x, y_0, D_{a+}^{\alpha_1} y_0, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_0]\|_{C_{n-\alpha}} \leq \\ & \leq A_k L \left(\sum_{i=1}^n \|D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_1 - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_0\|_{C_{n-\alpha}} \right) \leq A_k L M_{n-\alpha} \sum_{i=1}^n A_i, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n \|D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_2 - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_1\|_{C_{n-\alpha}} \leq M_{n-\alpha} L \left(\sum_{i=1}^n A_i \right)^2.$$

Повторяя m раз такие же оценки, приходим к соотношению

$$\|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_{m-1}\|_{C_{n-\alpha}} \leq A_k L^{m-1} M_{n-\alpha} \left(\sum_{i=1}^n A_i \right)^{m-1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

В частности, при $k = 1$:

$$\|y_m - y_{m-1}\|_{C_{n-\alpha}} \leq A_1 L^{m-1} M_{n-\alpha} \left(\sum_{i=1}^n A_i \right)^{m-1}.$$

Из условия (14) следует, что последовательность $y_m(x)$ сходится к некоторой предельной функции $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m(t) - y(t)\|_{C_{n-\alpha}} = 0, \quad (17)$$

и более того,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y\|_{C_{n-\alpha}} = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (18)$$

Согласно лемме 2 и условию (13)

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y_m, D_{a+}^{\alpha_1} y_m, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_m] - f[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right\|_{C_{n-\alpha}} \leq \\ & \leq A_1 L \sum_{i=1}^n \|D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y\|_{C_{n-\alpha}}, \end{aligned}$$

и, следовательно, в силу (18)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y_m, D_{a+}^{\alpha_1} y_m, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_m] - f[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right\|_{C_{n-\alpha}} = 0.$$

Отсюда вытекает, что $y(t)$ есть решение уравнения (10) на отрезке $[a, x_1]$.

Покажем, что это решение единственно. Предположим, что существуют два решения $y(t)$ и $Y(t)$ интегрального уравнения (10). В силу леммы 2 эти решения удовлетворяют уравнениям

$$D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y = D_{a+}^{\alpha_{k-1}} \left(\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha - j} \right) + \left(I_{a+}^{\alpha - \alpha_{k-1}} f \right) [t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y], \quad (19)$$

где $k = 1, \dots, n$. Подставляя $y(t)$ и $Y(t)$ в (19), вычитая одно из другого и применяя лемму 4 и условие (13), получим:

$$\begin{aligned} & \|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} Y\|_{C_{n-\alpha}} = \\ & \left\| I_{a+}^{\alpha - \alpha_{k-1}} \left(f[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y] - [t, Y, D_{a+}^{\alpha_1} Y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} Y] \right) \right\|_{C_{n-\alpha}} \leq \\ & \leq A_k L \sum_{i=1}^n \|D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} Y\|_{C_{n-\alpha}}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^n \left\| D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} Y \right\|_{C_{n-\alpha}} \leq L \sum_{k=1}^n A_k \sum_{i=1}^n \left\| D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} Y \right\|_{C_{n-\alpha}}.$$

Следовательно, $L \sum_{k=1}^n A_k \geq 1$, что противоречит условию (14).

Таким образом, существует единственное решение $y(x)$ уравнения (10) на отрезке $[a, x_1]$.

Рассмотрим далее отрезок $[x_1, x_2]$, где $x_2 = x_1 + h$, $h > 0$, $x_2 \leq b$. Уравнение (10) перепишем в виде

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^x \frac{f[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \frac{f[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y)(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad (20)$$

$x \in [x_1, x_2]$.

Так как на отрезке $[a, x_1]$ функция $y(x)$ однозначно определена, последний интеграл можно считать известной функцией и уравнение (20) равносильно уравнению

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^x \frac{f[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,$$

где

$$y_1(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \frac{f[t, y(t), D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

есть известная функция. Повторяем те же рассуждения на отрезке $[x_1, x_2]$ и получаем единственное решение на этом отрезке. Затем берем следующий отрезок и т.д., пока не получим единственное решение на всем отрезке $[a, b]$.

Таким образом, существует единственное решение $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ уравнения (10), а значит, и задачи типа Коши (6), (8) такое, что равенства (17), (18) выполняются на всем отрезке $[a, b]$.

Теперь покажем, что это решение принадлежит пространству $C_{n-\alpha, \gamma}^\alpha[a, b]$.

Для этого достаточно показать, что $D_{a+}^\alpha y \in C_\gamma[a, b]$.

Если $0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) \leq \operatorname{Re}(n-\alpha)$, то используя (6) и (13), имеем:

$$\left\| D_{a+}^\alpha y_m - D_{a+}^\alpha y \right\|_{C_\gamma} \leq (b-a)^{\operatorname{Re}(n-\alpha-\gamma)} \left\| D_{a+}^\alpha y_m - D_{a+}^\alpha y \right\|_{C_{n-\alpha}} = (b-a)^{\operatorname{Re}(n-\alpha-\gamma)} \cdot \left\| f[x, y_m, D_{a+}^{\alpha_1} y_m, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_m] - f[x, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y] \right\|_{C_{n-\alpha}} \leq$$

$$(b-a)^{\operatorname{Re}(n-\alpha-\gamma)} L \sum_{i=0}^{n-1} \|D_{a+}^{\alpha_i} y_m - D_{a+}^{\alpha_i} y\|_{C_{n-\alpha}} \quad (D_{a+}^{\alpha_0} y = y).$$

Если $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(n-\alpha)$, то учитывая (6) и (13), находим:

$$\begin{aligned} & \|D_{a+}^{\alpha} y_m - D_{a+}^{\alpha} y\|_{C_{\gamma}} = \\ & = \|f[x, y_m, D_{a+}^{\alpha_1} y_m, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_m] - f[x, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y]\|_{C_{\gamma}} \leq \\ & \leq L \sum_{i=0}^{n-1} \|D_{a+}^{\alpha_i} y_m - D_{a+}^{\alpha_i} y\|_{C_{\gamma}} \leq L(b-a)^{\operatorname{Re}(\gamma-n+\alpha)} \sum_{i=0}^{n-1} \|D_{a+}^{\alpha_i} y_m - D_{a+}^{\alpha_i} y\|_{C_{n-\alpha}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|D_{a+}^{\alpha} y_m - D_{a+}^{\alpha} y\|_{C_{\gamma}} \leq L_1 \sum_{i=0}^{n-1} \|D_{a+}^{\alpha_i} y_m - D_{a+}^{\alpha_i} y\|_{C_{n-\alpha}},$$

где $L_1 > 0$ – некоторая постоянная, и тогда в силу (17) – (18)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|D_{a+}^{\alpha} y_m - D_{a+}^{\alpha} y\|_{C_{\gamma}} = 0.$$

Это означает, что $D_{a+}^{\alpha} y \in C_{\gamma}[a, b]$, что завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Kilbas, A. A. Differential equations of fractional order: methods, results and problems / A. A. Kilbas, J. J. Trujillo // *Applicable Analysis*. – 2001. – Vol. 78, № 1. – P. 153–192.
3. Gorenflo, R. Fractional calculus: integral and differential equation of fractional order. *Fractals and Fractional calculus in continuum mechanics* / R. Gorenflo, F. Mainardi. – Wien ; New York : Springer. – 1997. – P. 223–276.
4. Oldham, K. B. The fractional calculus / K. B. Oldham, J. Spanier. – London : Acad. Press, 1974. – 234 p.
5. Килбас, А. А. Дробные интегралы и производные, дифференциальные уравнения дробного порядка в весовых пространствах непрерывных функций / А. А. Килбас, Б. Бонилла, Х. Трухилло // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 6. – С. 18–22.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.03.2019

Marzan S.A. The Existence and Uniqueness of the Cauchy-Type Problem Solution for a Differential Equation of Complex Order in the Weighted Spaces of N-Time Differentiable Functions

The article examines the Cauchy-type problem for a nonlinear differentiable equation with Riemann – Liouville derivatives of complex orders in the weighted spaces of n-time functions. Using the properties of fractional integrals and Riemann – Liouville derivatives in the weighted spaces of continuous functions, the equivalence of the problem in question is proved by the second-kind Volterra integral equation, and the conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem are obtained.