

УДК 517.927

**И.М. Конет<sup>1</sup>, К.Г. Геселева<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, проф., проректор по научной работе  
 Каменец-Подольского национального университета имени И. Огиенко,  
 заслуженный деятель науки и техники Украины  
<sup>2</sup>аспирант 3 года обучения каф. математики  
 Каменец-Подольского национального университета имени И. Огиенко  
 e-mail: [geseleva1702@gmail.com](mailto:geseleva1702@gmail.com)

## КОЛЛОКАЦИОННЫЙ И КОЛЛОКАЦИОННО-ИТЕРАТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Рассмотрены приближенные методы решения интегро-функциональных уравнений. Исследован коллокационный и коллокационно-итеративные (стационарный и нестационарный) методы нахождения приближенных решений интегро-функциональных уравнений.*

### Введение

При исследовании различных задач теоретического и прикладного характера широкое применение имеют интегральные и интегро-функциональные уравнения. Поскольку построение точных решений таких уравнений возможно только в отдельных случаях, то большое значение приобретают методы построения приближенных решений этих уравнений. Одним из эффективных методов является коллокационный метод и одно из его обобщений – коллокационно-итеративный метод.

В статье рассматриваются вопросы возможности применения этих методов к некоторым типам интегро-функциональных уравнений.

Рассмотрим некоторые классы интегро-функциональных уравнений, приближенные решения которых можно построить коллокационным и коллокационно-итеративными методами.

### Линейные интегро-функциональные уравнения

В пространстве  $L_2(a; b)$  действительных и измеримых на промежутке  $(a; b)$  функций, суммируемых с квадратом, рассмотрим интегро-функциональное уравнение вида

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x; t)y(t)dt, x \in (a; b), \quad (1)$$

$$y(x) = 0, x \notin (a; b),$$

где  $f(x)$  известная, а  $y(x)$  – искомая функции в  $L_2(a; b)$ . Относительно функций  $h(x), p(x), K(x; t)$  предполагаем, что они, соответственно, на промежутке  $[a; b]$  и в квадрате  $[a; b]^2 = [a; b] \times [a; b]$  удовлетворяют условиям:

$$|p(x)| \leq \bar{p} < \infty, \quad (2)$$

$$h(x) - \text{дифференцируема на } [a; b] \text{ и } h'(x) \geq l > 0, x - h(x) \geq \sigma > 0, \quad (3)$$

$$\iint_{a a}^{b b} K^2(x; t) dx dt = B^2 < \infty. \quad (4)$$

Покажем, что уравнение (1) при выполнении условий (2) – (4) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [3; 5]. Рядом с интегральным вполне непрерывным оператором  $K$ , который имеет вид

$$(Kv)(x) = \int_a^b K(x;t)v(t)dt, \forall v(x) \in L_2(a;b),$$

будем рассматривать оператор  $S$  такой, что

$$(Sv)(x) = \begin{cases} v(x), x \in [a, h^{-1}(a)], \\ v(x) - p(x)v(h(x)), x \in [h^{-1}(a), b], \end{cases} \quad (5)$$

где  $v(x)$  – произвольная функция из  $L_2(a;b)$ .

Отметим, что этот оператор, как и оператор  $K$ , действует с  $L_2(a;b)$  в  $L_2(a;b)$ . Легко показать, что оператор  $S$  линейный. Условия (2), (3) гарантируют его ограниченность. Действительно,

$$S = \sup \frac{(Sv)(x)}{v(x)} \leq 1 + \left| \frac{p^2(x)}{h'(x)} \right|^{1/2} \leq 1 + \frac{\bar{p}}{\sqrt{l}} < \infty,$$

где  $\sup$  берется по  $v(x) \in L_2(a;b), v(x) \neq 0$ .

Эти же условия говорят о том, что оператор  $S$  обратимый. Обратный к нему оператор имеет вид

$$(S^{-1}v)(x) = \begin{cases} v(x), x \in [a, h^{-1}(a)], \\ v(x) + \sum_{i=1}^s v(h^i(x)) \prod_{k=0}^{i-1} p(h^k(x)), \\ x \in \Delta s, s = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь, как и в дальнейшем,

$$\Delta s = [c_{s-1}, c_s], c_0 = a, c_s = h^{-1}(c_{s-1}), c_m = b, h^k(x) = h(h^{k-1}(x)), s = \overline{1, m}.$$

Иными словами, выражение (6) – это решение функционального уравнения

$$\begin{aligned} y(x) - p(x)y(h(x)) &= u(x), x \in [a; b], \\ y(x) &= 0, x \notin [a; b], \end{aligned}$$

где  $u(x)$  – известная,  $y(x)$  – искомая функции, с помощью пошагового метода. Условие (3)

гарантирует тот факт, что количество шагов  $m$  конечно и  $m \leq \frac{b-a}{\sigma}$ .

Нетрудно убедиться в том, что оператор  $S^{-1}$ , как и оператор  $S$ , линейный и ограниченный. Таким образом, учитывая вышесказанное, мы можем рассматривать уравнение (1) как операторное уравнение

$$(Sy)(x) = f(x) + (Ky)(x), \quad (7)$$

где  $f(x)$  – известная,  $y(x)$  – искомая функции в  $L_2(a;b)$ .

Пусть  $(Sy)(x) = u(x)$ , тогда  $y(x) = (S^{-1}u)(x)$ , и мы от уравнения (7) приходим к уравнению

$$u(x) = f(x) + (Tu)(x). \quad (8)$$

Оператор  $T = KS^{-1}$  Фредгольмов как суперпозиция Фредгольмова и линейного ограниченного операторов. Иными словами, применив упомянутую выше замену, мы превращаем интегро-функциональное уравнение (1) в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)u(t)dt \quad (9)$$

с вполне непрерывным интегральным оператором  $T$ , ядро которого

$$T(x;t) = \begin{cases} K(x;t) + \sum_{i=1}^{m-s} K(x;(h^{-1})^k(t)) \prod_{k=1}^i p[(h^{-1})^k(t)], & t \in \Delta s, \\ K(x;t), & t \in (c_{m-1}; b), s = \overline{1, m-1}, x \in (a; b), \end{cases}$$

где  $(h^{-1})^k(t) = h^{-1}((h^{-1})^{k-1}(t))$ .

### Метод коллокации решения интегро-функционального уравнения

Рассмотрим уравнения

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt, x \in (a; b); y(x) = 0, x \notin (a; b). \quad (10)$$

Идея метода относительно уравнения (10) заключается в том, что приближенное решение  $y_m(x)$  ищем в виде

$$y_m(x) = \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(x)$$

и определяем из функционального уравнения

$$\begin{aligned} y_m(x) - p(x)y_m(h(x)) &= f(x) + \int_a^b K(x;t)y_m(t)dt, \\ y_m(x) &= 0, x \notin [a; b], \end{aligned} \quad (11)$$

$\{\varphi_j(x)\}$  – система линейно независимых на  $[a; b]$  функций  $j = \overline{1, m}$ , а неизвестные параметры  $a_j = a_j(n)$  находим из условия

$$\gamma_m(x_i) = 0, x_i = a + i \frac{b-a}{n}, i = \overline{0, n}, \quad (12)$$

$$\gamma_m(x) = y_m(x) - p(x)y_m(h(x)) - f(x) - \int_a^b K(x;t)y_m(t)dt. \quad (13)$$

Для нахождения параметров  $a_j$  получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_j = b_i, i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

в которой  $\beta_{ij}$  вычисляются по формуле

$$\beta_{ij} = \varphi_j(x_i) - T_j(x_i), b_i = f(x_i), i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Систему уравнений (14) целесообразно записать в векторном виде  $\Lambda a_k = b_k$ .

**Коллокационно-итеративный метод решения интегро-функционального уравнения**

Применим коллокационно-итеративный метод к уравнению (10). Приближенное решение  $y_k(x)$  определяем согласно формул

$$y_k(x) - p(x)y_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt, x \in (a;b), \quad (16)$$

$$y_k(x) = 0, x \notin [a;b],$$

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + \omega_k(x), \quad (17)$$

$$\omega_k(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k \eta_j(x),$$

$$\eta_j(x) = (S^{-1}\varphi_j)(x).$$

Неизвестные параметры  $a_j^k = a_j^k(n)$  находим из условия  $\gamma_k(x_i) = 0$ , где  $x_i \in [a;b]$ ,  $i = \overline{1, n}$  узлы коллокации и

$$\gamma_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt - y_k(x) + p(x)y_k(h(x)), x \in (a;b). \quad (18)$$

Введя обозначения  $\mathcal{E}_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)dt - y_{k-1}(x) + p(x)y_{k-1}(h(x))$  и подставляя функцию  $z_k(x)$ , определенную формулой (17), в выражение (18) для поиска параметров  $a_j^k$ , получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij}^k a_j^k = b_i^k, i = \overline{1, n}, \quad (19)$$

где

$$\beta_{ij}^k = \varphi_j(x_i) - K_j(x_i), b_i^k = \mathcal{E}_k(x_i),$$

$$K_j(x) = \int_a^b K(x;t)\eta_j(t)dt, j = \overline{1, n},$$

$$\eta_j(x) = (S^{-1}\varphi_j)(x),$$

$$b_i^k = \mathcal{E}_k(x_i).$$

Систему уравнений (19) можно записать в виде  $\Lambda a_k = b_k$ , где  $b_k, a_k$  записаны в векторном виде и  $\Lambda$  – матрица, составленная из элементов  $\beta_{ij}$ .

Заметим, что в качестве приближения к искомому решению можно взять как функцию  $y_k(x)$ , так и функцию  $z_k(x)$ . Следует обратить внимание на то, что на основе анализа формул (16) – (18) при  $\omega_k(x) = 0, k = 1, 2, 3, \dots$  приближения  $y_k(x)$  находятся методом последовательных приближений.

Алгоритмы (11) – (13) и (16) – (18) сводят рассматриваемую задачу к коллокационному и коллокационно-итеративному методу решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, для которых получены условия сходимости [2]. В частности, имеет место теорема.

**Теорема 1.** Пусть соблюдается условие

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b |T(x, t) - T(x_0, t)| dt = 0, \forall x_0 \in [a, b]$$

и единица – регулярное значение интегрального уравнения (9). Пусть система функций  $\{\varphi_i(x)\}$  и узлы  $\{x_i\}, i = \overline{1, n}$  выбраны таким образом, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |T(x, t) - H_n(x, t)| dt = 0,$$

где функция  $H_n$  выражается формулой  $H_n(x, t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(x) T(x_i, t)$ .

Тогда  $q_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. существует такой номер  $n_0$ , что для всех фиксированных  $n \geq n_0$  последовательность  $\{y_k(x)\}$  согласно методу (17) – (19) строится однозначно и равномерно сходится к решению  $y^*(x)$  уравнения (9).

### Нестационарный коллокационно-итеративный метод

Пусть, как и раньше,  $\{\varphi_i(x)\}$  – заданная ортогональная и полная в  $L_2(a; b)$  система, а  $\{P_k\}$  – последовательность проектирующих операторов, определяемых посредством формулы

$$(P_k v)(x) = \int_a^b P_k(x, t) v(t) dt, \forall v(x) \in L_2(a, b), \quad (20)$$

в которой

$$P_k(x, t) = \sum_{i=1}^{n_k} \mu_i \varphi_i(x) \varphi_i(t), \mu_i^{-1} = \int_a^b \varphi_i^2(x) dx, \quad (21)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots, n_k > n_0 = n \geq 1, n_{k_1} \leq n_{k_2}$  при  $k_1 < k_2$ .

Очевидно, проекционные операторы (20) ортогонально проектируют пространство  $L_2(a; b)$  на его подпространство  $L_2^k(a; b)$ , причем  $L_2^{k-1}(a; b) \subset L_2^k(a; b), k = 1, 2, 3, \dots$ .

Суть предлагаемого метода применительно к уравнению (10) состоит в следующем. Пусть, исходя из начального приближения  $y_0(x) \in L_2(a, b)$  и функции  $s_0(x)$  такой, что

$$\begin{aligned} y_0(x) - p(x)y_0(h(x)) &= s_0(x), x \in (a, b), \\ y_0(x) &= 0, x \notin (a, b), \end{aligned} \quad (22)$$

мы нашли приближение  $y_{k-1}(x)$  и функцию  $s_{k-1}(x)$ .

Вычисляем функцию

$$\tilde{s}_{k-1}(x) = \int_a^b P_{k-1}(x, t)s_{k-1}(t)dt,$$

где  $P_{k-1}(x, t)$  имеет вид (21). Решаем уравнения:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{k-1}(x) - p(x)\tilde{y}_{k-1}(h(x)) &= s_{k-1}(x), x \in (a, b), \\ \tilde{y}_{k-1}(x) &= 0, x \notin (a, b). \end{aligned} \quad (23)$$

Приближение  $y_k(x)$  определяем как решение уравнения

$$\begin{aligned} y_k(x) - p(x)y_k(h(x)) &= f(x) + \int_a^b K(x; t)\tilde{z}_k(t)dt, x \in (a, b), \\ y_k(x) &= 0, x \notin (a, b), \end{aligned} \quad (24)$$

в котором

$$\tilde{z}_k(x) = \tilde{y}_{k-1}(x) + \omega_k(x), \omega_k(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k \eta_j(x), x \notin (a, b). \quad (25)$$

Неизвестные параметры  $a_j^k$  находим из условия

$$\tilde{r}_k(x_i) = 0, i = \overline{1, n}, \quad (26)$$

где

$$\tilde{r}_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x; t)\tilde{z}_k(t)dt - \tilde{z}_k(x) + p(x)\tilde{z}_k(h(x)), \quad (27)$$

система функций  $\{\eta_i(x)\}$  в выражениях (25), (26) определяются из уравнений, которые в нашем случае принимают вид

$$\begin{aligned} \eta_i(x) - p(x)\eta_i(h(x)) &= \varphi_i(x), x \in (a, b), \\ \eta_i(x) &= 0, x \notin (a, b); \end{aligned} \quad (28)$$

где система функций  $\{\varphi_i(x)\}$ , как уже отмечалось, ортогональная и полная в пространстве  $L_2(a; b)$ .

Вводя обозначение

$$\varepsilon_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x; t) \tilde{y}_k(t) dt - \tilde{y}_{k-1}(x) + p(x) \tilde{y}_{k-1}(h(x))$$

и подставляя функцию  $\tilde{z}_k(x)$ , определяемую формулой (25), в выражение (27), а затем полученный результат – в условие (26) для нахождения параметров  $a_j^k$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_j^k = b_i^k, i = \overline{1, n}, \quad (29)$$

в которой  $\beta_{ij}$  вычисляются по формуле

$$\beta_{ij} = \int_a^b \{\varphi_j(x) - K_j(x)\} \psi_i(x) dx, i, j = \overline{1, n}, \quad (30)$$

и

$$b_i^k = \varepsilon_k(x), i = \overline{1, n}. \quad (31)$$

Как и раньше, систему уравнений (29) будем записывать в векторном виде  $\Lambda a_k = b_k$ .

Заметим, что в качестве приближения к искомому решению можно брать любую из функций  $y_k(x), \tilde{y}_k(x), \tilde{z}_k(x)$ .

Следует обратить внимание на то, что на основе анализа формул (22) – (27) при  $s_0(x) = 0$  приближение  $\tilde{z}_1(x)$  совпадает с приближением, построенным по колокационному методу, приближение  $y_1(x)$  – с приближением, построенным по улучшенному колокационному методу, а при  $\omega_k(x) = 0, k = 1, 2, 3, \dots$  приближение  $y_k(x)$  находится по нестационарному методу последовательных приближений.

Алгоритм (22) – (27) можно свести к нестационарному колокационно-итеративному методу решения интегро-функционального уравнения (1). В самом деле, формулы (22) – (24) и (27) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (S\tilde{y}_{k-1})(x) &= (P_{k-1}S_{k-1})(x), \\ (Sy_k)(x) &= f(x) + (K\tilde{y}_{k-1})(x) + (K\omega_k)(x), \\ \tilde{r}_k &= f(x) + (K\tilde{y}_{k-1})(x) + (K\omega_k)(x) - (S\tilde{y}_{k-1})(x) - (S\omega_k)(x). \end{aligned}$$

С помощью этих формул условие (26) легко преобразуется к виду:

$$(Sy_k - S\tilde{y}_{k-1} - S\omega_k)(x_i) = 0, i = \overline{1, n}.$$

Теперь положим

$$u_k(x) = s_k(x) = (Sy_k)(x), \alpha_k(x) = (S\omega_k)(x), \quad (32)$$

откуда следует

$$y_k(x) = (S^{-1}u_k)(x), \omega_k(x) = (S^{-1}\alpha_k)(x). \quad (33)$$

На основании формул (32), (33) и соотношения (28) получаем:

$$u_k(x) = f(x) + (TP_{k-1}u_{k-1})(x) + (T\alpha_k)(x), \quad (34)$$

$$\alpha_k(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k \varphi_j(x), k = 1, 2, 3, \dots, \quad (35)$$

$$\int_a^b \{u_k(x) - (P_{k-1}u_{k-1})(x) - \alpha_k(x)\} \varphi_i(x) dx = 0, i = \overline{1, n}. \quad (36)$$

Теперь видно, что соотношения (34) – (36) – это нестационарный колокационно-итеративный метод решения интегро-функционального уравнения (1). В работах [1; 3] установлены различные достаточные условия сходимости и оценки погрешности этого метода для интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Из изложенных там результатов, в частности, следует утверждение.

**Теорема 2.** Если единица не является точкой спектра интегрального оператора  $T$ , при  $k \rightarrow \infty$ , и система функций  $\{\varphi_i(x)\}$  полна в пространстве  $L_2^k(a; b)$ , то существует такой номер  $n$ , при котором нестационарный колокационно-итеративный метод (22) – (27) сходится, причем быстрота сходимости увеличивается с ростом  $n$ .

### Заключение

Рассмотрены приближенные методы решения интегро-функциональных уравнений. Исследован колокационный и колокационно-итеративные (стационарный и нестационарный) методы нахождения приближенных решений интегро-функциональных уравнений.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайникко, Г. М. О сходимости и устойчивости метода колокации / Г. М. Вайникко // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 2. – С. 244–254.
2. Лучка, А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений / А. Ю. Лучка. – Киев : Наук. думка, 1980. – 264 с.
3. Лучка, А. Ю. Быстрота сходимости одного проекционно-итеративного метода, основанного на тригонометрической колокации, для линейных интегральных уравнений / А. Ю. Лучка, Е. М. Луцев // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 3. – С. 10–13.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.10.2017

**Konet I., Geseleva K. Collocation and Collocation-Iterative Methods of Solving Integrally-Functional Equations**

*Approximate methods for solving integral-functional equations are considered in the article. Collocation and collocation-iterative (stationary and non-stationary) methods for finding approximate solutions of integral-functional equations are investigated.*