

УДК 524.354.6-33

В.С. Секержицкий¹, Е.М. Хомич²

¹канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²магистрант каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: otf@brsu.brest.by

СВЕРХПЛОТНОЕ ЭЛЕКТРОННО-ПРОТОННОЕ ВЕЩЕСТВО В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Сформулированы оценочные критерии устойчивости твердого состояния плотного замагниченного электронно-протонного вещества. Получено уравнение состояния сверхплотного электронно-протонного вещества в присутствии магнитного поля.

Нахождение уравнений состояния вещества при плотностях, превышающих порог его полной ионизации, имеет важное значение для физики сверхплотных астрофизических объектов, в частности, для построения теоретических моделей, позволяющих не только объяснять отдельные наблюдаемые эффекты, но и обосновывать предположения и гипотезы о строении и энергетике указанных небесных тел. Теоретически обоснованная и подтвержденная наблюдательными данными (по крайней мере, косвенными) возможность существования в сверхплотных звездах весьма сильных магнитных полей делает актуальной задачу об учете их влияния на физические свойства сверхплотного вещества. В настоящей работе сформулированы оценочные критерии устойчивости твердого состояния плотного электронно-протонного вещества в сильном магнитном поле и получены его уравнения состояния.

Рассмотрим сначала вопрос о фазовом состоянии электронно-протонного вещества (водорода при плотностях, превышающих порог полной ионизации). Как отмечалось в [1], вследствие кулоновских взаимодействий ядра такого вещества могут совершать колебания относительно некоторых точек равновесия. В этом случае следует говорить о твердом состоянии. Следуя приближенным оценкам [1], полагаем, что при определенных условиях протоны образуют упорядоченную структуру, обладающую некоторыми свойствами твердого тела (не принципиально в данном случае аморфное или кристаллическое вещество рассматривается).

Оценим области значений массовой плотности, при которых твердое состояние замагниченного электронно-протонного вещества при низких и высоких температурах устойчиво (не переходит в плазменное состояние). Предположим, что в электронно-протонном замагниченном веществе имеет место фаза твердого тела. Воспользуемся для оценки ее границ приближенным методом, изложенным в [1] для немагниченного сверхплотного водорода и использованном в [2] для электронно-протонного вещества в сильном магнитном поле. Следуя [1; 2], разделим среду на нейтральные сферические ячейки с одним протоном и равномерно распределенным электронным зарядом в каждой, упакованные максимально плотно. Как отмечалось в [1], отклонения от равномерного распределения электронного заряда для предстоящих оценок несущественны. Также пренебрегаем в первом приближении взаимодействием протона с соседними

ячейками [1]. Радиус такой ячейки $R \approx \left(\frac{3m_p}{4\pi\rho} \right)^{1/3}$, где m_p – масса протона, ρ – массовая

плотность вещества. Выражение для кулоновского взаимодействия протона с электронным «облаком» своей ячейки в отсутствие магнитного поля имеет вид:

$$U(r) = -\frac{3e^2}{2R} + \frac{e^2}{2R^3} r^2. \quad (1)$$

Протон находится в электростатической трехмерной потенциальной яме, граница которой, определяемая условием $r = R$, выше дна на величину $U_0 = e^2 / (2R)$.

При оценочных расчетах для случая малых колебаний протон в ячейке можно (с определенной степенью точности) отождествить с изотропным гармоническим осциллятором, частота нулевых колебаний которого дается выражением:

$$\omega_0 = \frac{e}{m_p^{1/2} R^{3/2}} = \frac{e}{m_p} \sqrt{\frac{4}{3}} \pi \rho. \quad (2)$$

Средняя энергия рассматриваемого осциллятора при температуре T [1; 3]:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} \hbar \omega_0 \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega_0}{2kT}. \quad (3)$$

Условие малости величины $\langle \varepsilon \rangle$ по сравнению с U_0 принято в [1; 3] в качестве критерия устойчивости твердого состояния вещества. При $T = 0$ из (3) имеем энергию нулевых колебаний протона $\varepsilon_0 = 1,5 \hbar \omega_0$.

Следует заметить, что модель изотропного гармонического осциллятора некорректна при $r \sim R$ (и тем более при $r \geq R$), а электронное «облако» весьма чувствительно к движению протона. Однако даже с помощью такой грубой модели можно провести приближенные оценки границ фазы твердого тела в замагниченном электронно-протонном веществе.

В сверхсильном магнитном поле с индукцией B глубина потенциальной ямы изменяется на величину

$$\Delta U_0 = \frac{e^2 B^2 R^2}{8m_p c^2} \sin^2 \varphi, \quad (4)$$

где φ – угол между направлениями вектора индукции и движения протона. При этом разность высот границы потенциальной ямы и ее дна равна

$$U_0(B) = U_0 + \Delta U_0 \approx U_0 \left(1 + \frac{3B^2}{16\pi\rho c^2} \sin^2 \varphi \right) = U_0 \left(1 + \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2} \sin^2 \varphi \right), \quad \omega_B = \frac{eB}{2m_p c}. \quad (5)$$

Энергетический спектр протона, совершающего колебания около положения равновесия в присутствии постоянного и однородного магнитного поля с индукцией B , определяется выражением [4]:

$$\varepsilon = \hbar \sqrt{\omega_B^2 + \omega_0^2} (2l + |m| + 1) + \hbar \omega_B m + \hbar \omega_0 \left(g + \frac{1}{2} \right), \quad (6)$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $g = 0, 1, 2, \dots$ – квантовые числа. При нулевой температуре $l = m = g = 0$ и энергия нулевых колебаний протона в магнитном поле

$$\varepsilon_0(B) = \hbar \sqrt{\omega_B^2 + \omega_0^2} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \approx \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \left(1 + 2 \sqrt{1 + \frac{3B^2}{16\pi\rho c^2}} \right). \quad (7)$$

При $B = 0$ имеем $\varepsilon_0(B) = \varepsilon_0$. Из (4) и (7) следует, что при значениях $\sin^2 \varphi \neq 0$ увеличение $U_0(B)$ с ростом индукции магнитного поля превалирует над увеличением $\varepsilon_0(B)$.

Средняя энергия колеблющегося при температуре T в магнитном поле с индукцией B протона может быть представлена в виде [2]:

$$\langle \varepsilon(B) \rangle = \hbar \omega \cdot \text{cth} \alpha + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \cdot \text{cth} \alpha_0. \quad (8)$$

Здесь $\alpha = \frac{\hbar \omega}{2kT}$, $\alpha_0 = \frac{\hbar \omega_0}{2kT}$. При $B = 0$ имеем $\omega = \omega_0$, и (8) переходит в (3). Для низких температур (если ω_B не превышает значительно ω_0) $\text{cth} \alpha \approx 1$, $\text{cth} \alpha_0 \approx 1$ и $\langle \varepsilon(B) \rangle \approx \varepsilon_0(B)$. Для высоких температур $\text{cth} \alpha \approx 1/\alpha$, $\text{cth} \alpha_0 \approx 1/\alpha_0$ и $\langle \varepsilon(B) \rangle \approx 3kT \approx \langle \varepsilon \rangle$.

Твердое состояние замагниченного электронно-протонного вещества является устойчивым и не переходит в плазменное при $\langle \varepsilon(B) \rangle \ll U_0(B)$. Если $\omega_B = u\omega_0$, то условию $\varepsilon_0(B) = 3kT$ соответствует массовая плотность

$$\rho = \rho_0 \approx 1,79 \cdot 10^{-6} \left(\frac{T}{2\sqrt{1+u^2} + 1} \right)^2 (\text{г/см}^3). \quad (9)$$

Критерии устойчивости твердого состояния замагниченного вещества при низких ($\rho \gg \rho_0$) и высоких ($\rho \ll \rho_0$) температурах имеют соответственно вид:

$$\rho^{1/6} \ll 50,5 \frac{1+u^2 \sin^2 \varphi}{2\sqrt{1+u^2} + 1}, \quad (10)$$

$$\rho^{1/3} \gg 2,65 \cdot 10^{-5} \frac{T}{1+u^2 \sin^2 \varphi}. \quad (11)$$

При $B = 0$ из (9)–(11) получаем: $\rho_0 \approx 1,98 \cdot 10^{-7} T^2 (\text{г/см}^3)$, $\rho^{1/6} \ll 16,8$ при $\rho \gg \rho_0$, $\rho^{1/3} \gg 2,65 \cdot 10^{-5} T$ при $\rho \ll \rho_0$.

Выражение в правой части неравенства (10) при $B = \text{const}$ имеет наименьшее значение, если $\varphi = 0$. Тогда при оценочных расчетах в качестве критерия устойчивости твердого состояния холодного замагниченного электронно-протонного вещества можно принять условие:

$$\rho^{1/6} \leq 0,1 \frac{50,5}{2\sqrt{1+u^2} + 1}, \text{ или } \rho \leq \frac{1,56 \cdot 10^4}{(2\sqrt{1+u^2} + 1)^6} (\text{г/см}^3). \quad (12)$$

Таким образом, сильное магнитное поле уменьшает диапазон значений массовой плотности, при которых твердое состояние является устойчивым: локализуя движение протона в плоскости, перпендикулярной вектору индукции, магнитное поле одновременно облегчает выход протона из электростатической потенциальной ямы вдоль линий индукции.

Аналогічна для гарачага замагнічанага электронна-протоннага рэчыва из (11) находим:

$$\rho^{1/3} \geq 2,65 \cdot 10^{-4} T, \text{ или } \rho \geq 1,86 \cdot 10^{-11} T^3 \text{ (г/см}^3\text{)}, \quad (13)$$

что совпадает с условием устойчивости твердого состояния в отсутствие магнитного поля.

Отметим, что в веществе сверхплотных сильно замагніченых астрофизических объектов индукция магнитного поля вряд ли может превышать значение $B_{\max} = 2c\sqrt{2\pi\rho}$, поскольку при $B > B_{\max}$ плотность энергии магнитного поля будет больше плотности энергии покоя вещества. Это означает, что в приведенных выше соотношениях допустимы значения $u^2 < 1,5$.

При термодинамическом описании сверхплотного замагніченнаго водорода необходимо учитывать возможность реализации как твердого, так и плазменного состояний электронно-протонного вещества. Мы рассмотрим здесь уравнения состояния ионизованного замагніченнаго водорода при различных значениях массовой плотности для модели «неподвижных» протонов и ферми-газов остальных компонентов (приближенное описание фазы твердого тела). Частично этот вопрос обсуждался в [5; 6].

При плотности вещества $\rho \leq 10^6 \text{ г/см}^3$ (концентрация протонов $n_p \leq 10^{30} \text{ см}^{-3}$) электроны нерелятивистские. В этом случае давление и плотность энергии вещества связаны с соответствующими характеристиками его электронного и протонного компонентов соотношениями:

$$P = P_e; \quad w = w_p + w_e, \quad (14)$$

где

$$P_e(B) = P_e(0) \frac{R_{5/2}(x_e)}{R_{3/2}^{5/3}(x_e)}, \quad w_e(B) = m_e c^2 n_e + P_e(0) \frac{2,5x_e R_{3/2}(x_e) - R_{5/2}(x_e)}{R_{3/2}^{5/3}(x_e)}, \quad (15)$$

$$P_e(0) = \frac{2}{5} n_e \zeta_e(0), \quad \zeta_e(0) = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_e} n_e^{2/3}, \quad x_e = \frac{\zeta_e(B)}{\mu_B B}, \quad \zeta_e(B) = \zeta_e(0) \frac{x_e}{R_{3/2}^{2/3}(x_e)}, \quad (16)$$

$$R_a(x_e) = a \sum_{n=0}^l \left((x_q - 2n - 2)^{a-1} + (x_e - 2n)^{a-1} \right), \quad (17)$$

$a = 3/2, 5/2$, B – индукция магнитного поля, n_e – концентрация электронов, m_e – масса электрона, $\zeta_e = \chi_e - m_e c^2$, χ_e – химический потенциал, μ_B – магнетон Бора, n – номер квантового уровня Ландау, $w_p = m_p c^2 n_p$ (энергией колебательного движения протонов пренебрегаем). В силу свойств функции распределения Ферми – Дирака суммирование в (17) ведется до тех пор, пока выражение под знаком соответствующего радикала неотрицательно. При вычислениях полагаем среднюю электронейтральную ($n_p = n_e$).

Тогда уравнение состояния крайне вырожденного замагніченнаго электронно-протонного вещества можно представить в виде:

$$w = K_{11} P + K_{12} P^{3/5}. \quad (18)$$

Здесь

$$K_{11} = \frac{5}{2} \frac{x_e R_{3/2}(x_e)}{R_{5/2}(x_e)} - 1, \quad K_{12} = \frac{5^{3/5} R_{3/2}(x_e) \cdot (m_p + m_e) c^2}{(3\pi^2 \hbar^3)^{2/5}} \left(\frac{m_e}{R_{5/2}(x_e)} \right)^{3/5}. \quad (19)$$

Для описания термодинамических свойств нерелятивистской водородной плазмы целесообразно вести отсчет энергии от величины энергии покоя фермиона и рассматривать лишь первое слагаемое уравнения (18). Тогда уравнение состояния

$$P = D_{11} w, \quad D_{11} = 1 / K_{11}. \quad (20)$$

Для астрофизических расчетов, связанных с оценками интегральных параметров плотных магнитных звезд, в (18) можно пренебречь первым слагаемым, учитывая, что энергия покоя нерелятивистского фермиона много больше его кинетической энергии. Тогда уравнение состояния

$$P = D_{12} w^{5/3}, \quad D_{12} = K_{12}^{-5/3}. \quad (21)$$

Уравнение состояния (21) записано в виде, удобном для непосредственной подстановки в формулы теории тяготения, с помощью которых можно установить, в частности, оценочную зависимость между массой и радиусом астрофизической конфигурации с магнитным полем.

При плотности вещества ($10^6 \leq \rho \leq 10^7$) г/см³ электроны релятивистские. Уравнение состояния определяется в этом случае следующим выражением:

$$w = K_{51} P + K_{52} P^{3/4}, \quad (22)$$

где

$$K_{51} = 2\sqrt{X_e^2 + Y_e} \frac{R_2}{R_1} - 1, \quad K_{52} = \frac{2^{3/4} m_p c^2 R_2}{(3\pi^2 \hbar^3 c^3)^{1/4} R_1^{3/4}}. \quad (23)$$

$$X_e^2 = \frac{\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4}{2m_e c^2 \mu_B B}; \quad Y_e = \frac{m_e c^2}{2\mu_B B}, \quad (24)$$

$$\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4 \equiv \xi_e(B) = \xi_e(0) \frac{X_e}{R_2^{1/3}(X_e)} = (3\pi^2)^{1/3} c \hbar n_e^{1/3} \frac{X_e}{R_2^{1/3}(X_e)}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} R_2(X_e) &= \frac{3}{2} \left(X_e + 2 \sum_{n=1}^l \sqrt{X_e^2 - 2n} \right), \\ R_1(X_e, Y_e) &= \frac{3}{2} \left(X_e \sqrt{X_e^2 + Y_e} - \frac{Y_e}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{X_e^2 + Y_e} + X_e}{\sqrt{X_e^2 + Y_e} - X_e} \right| + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=1}^l \left(\sqrt{X_e^2 + Y_e} \sqrt{X_e^2 - 2n} - \frac{Y_e + 2n}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{X_e^2 + Y_e} + \sqrt{X_e^2 - 2n}}{\sqrt{X_e^2 + Y_e} - \sqrt{X_e^2 - 2n}} \right| \right) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

При этом суммирование в (26) ведется до тех пор, пока выражения под соответствующими радикалами неотрицательные.

Как показано в [7], с ростом индукции сверхсильного магнитного поля порог нейтронизации водорода смещается в сторону более высоких плотностей. При плотностях, незначительно превышающих этот порог, необходимо учитывать парциальное давление и плотность энергии нейтронного компонента вещества:

$$P = P_e + P_n; \quad w = w_p + w_e + w_n; \quad (27)$$

нуклонные газы нерелятивистские. Записать уравнение состояния в форме, аналогичной (18) или (22), не представляется возможным: оно определяется системой параметрических уравнений.

При плотностях, существенно превышающих порог нейтронизации, основной вклад в концентрацию нуклонов среды вносят нейтроны, и уравнение состояния вещества (нейтронного газа) в магнитном поле можно записать следующим образом:

$$w = K_{31}P + K_{32}P^{3/5}, \quad (28)$$

где

$$K_{31} = \frac{5}{2} \frac{x_n R_{3/2}(x_n)}{R_{5/2}(x_n)} - 1, \quad K_{32} = \frac{5^{3/5} m_n c^2 R_{3/2}(x_n)}{(3\pi^2 \hbar^3)^{2/5}} \left(\frac{m_n}{R_{5/2}(x_n)} \right)^{3/5}, \quad (29)$$

$$P_n(0) = \frac{2}{5} n_n \zeta_n(0), \quad \zeta_n(0) = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_n} n_n^{2/3}, \quad x_n = \frac{\zeta_n(B)}{\mu_y B}, \quad \zeta_n(B) = \zeta_n(0) \frac{x_n}{R_{3/2}^{2/3}(x_n)}, \quad (30)$$

$$R_a(x_n) = \frac{1}{2} \left((x_n - \sigma_n)^a + (x_n + \sigma_n)^a \right), \quad (31)$$

$a = 3/2, 5/2$, $\sigma_n = 1,913$, n_n – концентрация нейтронов, m_n – масса нейтрона, μ_y – ядерный магнетон, $\zeta_n = \chi_n - m_n c^2$, χ_n – химический потенциал нейтронов.

Наличие внешнего магнитного поля вносит коррективы в критерий устойчивости фазы твердого тела для холодного электронно-протонного вещества и практически не оказывает влияния на соответствующий критерий для горячего вещества.

Поскольку некоторые энергетические характеристики невырожденных ферми-газов зависят от индукции магнитного поля, целесообразно все же рассмотреть влияние последнего на уравнения состояния горячего электронно-протонного вещества. Здесь мы ограничимся случаем нерелятивистских электронов.

Расчеты показывают, что фаза твердого тела в горячем нерелятивистском электронно-протонном веществе может быть реализована при $T \ll 10^6$ К, если при этом массовая плотность $\rho \geq 1,86 \cdot 10^{-11} T^3$ г/см³. Давление в этом случае определяется электронным газом и при заданной концентрации от индукции магнитного поля не зависит:

$$P = P_e = n_e kT, \quad (32)$$

а кинетическая энергия колебательного движения протона значительно меньше энергии покоя:

$$w(B) = n_p (m_p + m_e) c^2 + n_p kT \left(\frac{1}{2} + \alpha_e \operatorname{cth} \alpha_e - \alpha_e \operatorname{th} \alpha_e \right) \approx n_p m_p c^2 + n_p kT \left(\frac{1}{2} + \frac{2\alpha_e}{\operatorname{sh}(2\alpha_e)} \right). \quad (33)$$

Если $B \neq 0$, то $\operatorname{sh}(2\alpha_e) > 2\alpha_e$. При $T < 10^6$ К $\frac{3}{2} kT < 2 \cdot 10^{-10}$ эрг $\ll m_p c^2 \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$ эрг

и

$$w(B) \approx w(0) \approx n_p m_p c^2. \quad (34)$$

Уравнение состояния замагниченного электронно-протонного вещества в этом случае такое же, как и в отсутствие магнитного поля:

$$P = \frac{kT}{m_p c^2} w. \quad (35)$$

Для любых значений массовой плотности, соответствующих электронно-протонному веществу, при $T > 10^6$ К имеет место плазменная фаза.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киржниц, Д. А. О внутреннем строении сверхплотных звезд / Д. А. Киржниц // Журн. эксперим. и теор. физ. – 1960. – Т. 38, № 2. – С. 503–508.
2. Секержицкий, В. С. О критериях устойчивости твердого состояния электронно-протонного вещества в магнитном поле / В. С. Секержицкий, Е. А. Саванчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 2. – С. 44–47.
3. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
4. Дубнер, В. М. Заряженный осциллятор в магнитном поле / В. М. Дубнер // Изв. вузов. Физика. – 1966. – № 4. – С. 167–168.
5. Секержицкий, В. С. Об уравнении состояния сверхплотного водорода в сильном магнитном поле / В. С. Секержицкий // Вучон. зап. Брэсц. дзярж. ун-та. – 2010. – Вып. 6, ч. 2. – С. 47–56.
6. Секержицкий, В. С. К вопросу об уравнении состояния холодного нерелятивистского электронно-протонного вещества в сверхсильном магнитном поле / В. С. Секержицкий, В. В. Климович, Е. А. Саванчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 2. – С. 29–32.
7. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях / В. С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.03.2017

Sekerzhitsky V.S., Khomich E.M. Superdense Electron-Proton Matter in Strong Magnetic Field

An appreciation of criterions of stability solid state of magnetized electron-proton matter is formulated. The states equation of superdense electron-proton matter in presence magnetic field is receive.