

М.Л. Гугнюк¹, В.А. Плетюхов²

¹магистрант каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²д-р физ.-мат. наук, проф. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: otf@brsu.brest.by

ОПИСАНИЕ ПОКОЛЕНИЙ НЕЙТРИНО В ПОДХОДЕ ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Твердо установленный в настоящее время факт наличия массы у всех трех известных сортов нейтрино указывает на ограниченный характер Стандартной модели, в рамках которой нейтрино – безмассовая частица. Очевидно, что и описание нейтрино посредством безмассового уравнения Дирака также не является правильным. В настоящей работе предлагается релятивистское волновое уравнение для микрообъекта со спином 1/2 и тремя различными значениями массы. Данное уравнение может рассматриваться как основа для описания поколений нейтрино в рамках классической теории поля.

Введение

В настоящее время установлено существование трех различных сортов (флейворов) нейтрино: электронное, мюонное и τ -лептонное. Удивительным свойством флейворных нейтрино является их способность смешиваться и осциллировать, то есть самопроизвольно превращаться друг в друга. Для данного явления принципиально важно, чтобы нейтрино обладали массой, так как осцилляции невозможны для строго безмассовых частиц. Открытие осцилляций нейтрино и наличие трех различных массовых состояний указывает на ограниченный характер Стандартной модели, в рамках которой нейтрино – безмассовая частица и осцилляции между различными типами нейтрино отсутствуют. Очевидно, что и описание нейтрино в классической теории поля посредством безмассового уравнения Дирака также не является правомерным.

Как известно, одним из основных направлений в классической теории поля является теория релятивистских волновых уравнений (РВУ) первого порядка. Последняя базируется на стандартной матричной форме уравнений

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0, \quad (1)$$

описывающих элементарные частицы с ненулевой массой. В (1) $\psi(x)$ – многокомпонентная волновая функция, Γ_μ – квадратные числовые матрицы, m – массовый параметр. С точки зрения теории РВУ все три типа нейтрино в свободном состоянии могут рассматриваться как единый микрообъект, который способен находиться в трех различных массовых состояниях. Другими словами, масса нейтрино, как и спин, выступает в роли внутреннего квантового числа.

Возможность построения РВУ для микрообъектов с переменной массой была известна давно (см., напр., [1]), однако до открытия явления осцилляций нейтрино физический смысл таких уравнений был неясен. Теперь же ситуация изменилась. Из вышеуказанного вытекает, что в подходе теории РВУ свободное нейтрино должно описываться уравнением (1) для частицы со спином 1/2 и тремя различными значениями массы. Построение и исследование такого уравнения и является целью настоящей работы.

Некоторые сведения из теории РВУ

Основные положения теории РВУ подробно изложены в классической работе [2] (см. также [3]). Поэтому мы ограничимся лишь кратким напоминанием некоторых из них. Основную роль в уравнении (1) играет матрица Γ_4 , которая в каноническом базисе имеет структуру

$$\Gamma_4 = \oplus \sum_s C^s \otimes I_{2s+1}. \quad (2)$$

Здесь C^s – спиновый блок, соответствующий спину s в том смысле, что если собственные значения (хотя бы одно) блока C^s отличны от нуля, то частица обладает спином s . Возможные значения массы частицы $m_k^{(s)}$ выражаются через параметр m и корни $\pm \lambda_k^{(s)}$ блока C^s по формуле

$$m_k^{(s)} = \frac{m}{|\lambda_k^{(s)}|}. \quad (3)$$

Многокомпонентная волновая функция $\psi(x)$ в (1) преобразуется по некоторому приводимому представлению T группы Лоренца, состоящему из зацепляющихся неприводимых компонент τ . Под зацепляющимися понимаются неприводимые представления $\tau \sim (l_1, l_2)$ и $\tau' \sim (l'_1, l'_2)$, для которых выполняются условия

$$l'_1 = l_1 \pm \frac{1}{2}, \quad l'_2 = l_2 \pm \frac{1}{2}, \quad (4)$$

причем знаки «+» и «–» в (4) могут не коррелировать. Кроме того, в представлении T наряду с каждым неприводимым представлением $\tau \sim (l_1, l_2)$ должно присутствовать сопряженное представление $\dot{\tau} \sim (l_2, l_1)$. В формировании спина s участвуют представления, удовлетворяющие условию

$$|l_1 - l_2| \leq s \leq l_1 + l_2. \quad (5)$$

Наглядное изображение представления T осуществляется с помощью так называемой схемы зацеплений, в которой зацепляющиеся неприводимые компоненты соединены чертой. При этом спиновый блок C^s состоит из элементов $c_{\tau\tau'}^s$, отличных от нуля только для зацепляющихся представлений $\tau — \tau'$.

Обязательными требованиями, предъявляемыми к РВУ (1), помимо релятивистской инвариантности являются инвариантность относительно операции пространственного отражения и возможность лагранжевой формулировки. При построении лагранжиана теории

$$L = -\bar{\psi} (\Gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi \quad (6)$$

используется лоренц-инвариантная билинейная форма

$$\bar{\psi} \psi = \psi^+ \eta \psi, \quad (7)$$

где η – матрица билинейной формы, имеющая в каноническом базисе аналогичную (2) структуру

$$\eta = \oplus \sum_s \eta^s \otimes I_{2s+1}. \quad (8)$$

В блоках η^s отличными от нуля являются лишь элементы $\eta_{\tau\dot{\tau}}^s$, причем

$$\eta_{\tau\dot{\tau}}^s = \eta_{\dot{\tau}\tau}^s = -\eta_{\tau\tau}^{s+1}. \quad (9)$$

Матрицу η можно нормировать так, что в блоках η^s будут встречаться только числа ± 1 .

Конкретные ограничения, накладываемые на числа $c_{\tau\tau'}^s$ и $\eta_{\tau\tau'}^s$ требованиями P -инвариантности и лагранжевой формулировки РВУ (1), можно найти, например, в [3].

РВУ для частицы со спином $s = 1/2$ и тремя массами

Для построения заявленного РВУ рассмотрим схему зацеплений

$$\begin{array}{ccc} \left(0, \frac{1}{2}\right)' & \text{---} & \left(\frac{1}{2}, 0\right)' \\ | & & | \\ \left(\frac{1}{2}, 1\right) & \text{---} & \left(1, \frac{1}{2}\right) \\ | & & | \\ \left(0, \frac{1}{2}\right) & \text{---} & \left(\frac{1}{2}, 0\right), \end{array} \quad (10)$$

где знак «штрих» введен для различения кратных представлений $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Матрица Γ_4 , соответствующая схеме (10), содержит спиновые блоки $C^{1/2}$, $C^{3/2}$:

$$\Gamma_4 = (C^{1/2} \otimes I_2) \oplus (C^{3/2} \otimes I_4). \quad (11)$$

Для удобства записи общих выражений блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ используем следующую нумерацию неприводимых компонент, содержащихся в (10):

$$\begin{aligned} \left(0, \frac{1}{2}\right) &\sim 1, \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) \sim 2, \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)' \sim 3, \\ \left(\frac{1}{2}, 0\right)' &\sim 4, \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right) \sim 5, \quad \left(1, \frac{1}{2}\right) \sim 6. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда блоки $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ в каноническом базисе принимают вид

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^{1/2} & 0 & 0 & c_{15}^{1/2} & 0 \\ c_{21}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{26}^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & c_{34}^{1/2} & c_{35}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{43}^{1/2} & 0 & 0 & c_{46}^{1/2} \\ c_{51}^{1/2} & 0 & c_{53}^{1/2} & 0 & 0 & c_{56}^{1/2} \\ 0 & c_{62}^{1/2} & 0 & c_{64}^{1/2} & c_{65}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{56}^{3/2} \\ c_{65}^{3/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Матрица η будет иметь в данном случае вид

$$\eta = (\eta^{1/2} \otimes I_2) \oplus (\eta^{3/2} \otimes I_4), \quad (14)$$

где

$$\eta^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{12}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_{12}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{34}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{34}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{56}^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{56}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_{56}^{1/2} \\ -\eta_{56}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Требование инвариантности теории относительно преобразований полной группы Лоренца приводит к соотношениям [3]

$$\begin{aligned} c_{12}^{1/2} = c_{21}^{1/2}, \quad c_{34}^{1/2} = c_{43}^{1/2}, \quad c_{15}^{1/2} = c_{26}^{1/2} \\ c_{35}^{1/2} = c_{46}^{1/2}, \quad c_{62}^{1/2} = c_{51}^{1/2}, \quad c_{64}^{1/2} = c_{53}^{1/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку нас интересует только спин $1/2$, необходимо положить

$$c_{56}^{3/2} = c_{65}^{3/2} = 0, \quad (17)$$

откуда следует также, что

$$c_{56}^{1/2} = c_{65}^{1/2} = 0. \quad (18)$$

Равенства (17) и (18) означают, что схема зацеплений (10) трансформируется к виду

$$\begin{array}{ccc} \left(0, \frac{1}{2}\right)' & \text{---} & \left(\frac{1}{2}, 0\right)' \\ | & & | \\ \left(\frac{1}{2}, 1\right) & & \left(1, \frac{1}{2}\right) \\ | & & | \\ \left(0, \frac{1}{2}\right) & \text{---} & \left(\frac{1}{2}, 0\right). \end{array} \quad (19)$$

Возможность получения РВУ (1) из лагранжиана (6) предполагает в рассматриваемом случае выполнение условий:

$$c_{12}^{1/2}, c_{34}^{1/2} \text{ — вещественные}; \quad (20)$$

$$c_{62}^{1/2} = (\eta_{56}^{1/2} / \eta_{12}^{1/2}) (\eta_{15}^{1/2})^*, \quad c_{64}^{1/2} = (\eta_{56}^{1/2} / \eta_{34}^{1/2}) (\eta_{35}^{1/2})^*. \quad (21)$$

Вводя для упрощения записи обозначения

$$c_{12}^{1/2} = c_1, \quad c_{34}^{1/2} = c_2, \quad c_{15}^{1/2} = c_3, \quad c_{35}^{1/2} = c_4, \quad (22)$$

$$\eta_{56}^{1/2} / \eta_{12}^{1/2} = f, \quad \eta_{56}^{1/2} / \eta_{34}^{1/2} = g \quad (f = \pm 1, g = \pm 1), \quad (23)$$

с учетом (16) – (21), получим для спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ матрицы Γ_4 выражения

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_4 \\ fc_3^* & 0 & gc_4^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & fc_3^* & 0 & gc_4^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Характеристическое уравнение матрицы $C^{1/2}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda^6 - \lambda^4 (c_1^2 + c_2^2 + 2f|c_3|^2 + 2g|c_4|^2) + \\ + \lambda^2 (c_1^2 c_2^2 + |c_3|^4 + |c_4|^4 + 2fc_2^2|c_3|^2 + 2gc_1^2|c_4|^2 + 2fg|c_3|^2|c_4|^2) - \\ - c_1^2|c_4|^4 - c_2^2|c_3|^4 - 2fgc_1c_2|c_3|^2|c_4|^2 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнение (25) имеет в общем случае корни $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \pm\lambda_3$. Квадраты этих корней $\mu_1 = \lambda_1^2, \mu_2 = \lambda_2^2, \mu_3 = \lambda_3^2$ являются решениями кубического уравнения

$$\mu^3 - a\mu^2 + b\mu - c = 0, \quad (26)$$

где для удобства использованы обозначения

$$a = c_1^2 + c_2^2 + 2f|c_3|^2 + 2g|c_4|^2, \quad (27)$$

$$b = c_1^2 c_2^2 + |c_3|^4 + |c_4|^4 + 2fc_2^2|c_3|^2 + 2gc_1^2|c_4|^2 + 2fg|c_3|^2|c_4|^2, \quad (28)$$

$$c = c_1^2|c_4|^4 + c_2^2|c_3|^4 + 2fgc_1c_2|c_3|^2|c_4|^2. \quad (29)$$

Корни μ_1, μ_2, μ_3 связаны с коэффициентами a, b, c соотношения

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = a, \quad (30)$$

$$\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 = b, \quad (31)$$

$$\mu_1\mu_2\mu_3 = c. \quad (32)$$

Не уменьшая общности, один из корней, например, μ_3 , можно положить равным 1:

$$\mu_3 = 1. \quad (33)$$

Тогда соотношения (30) – (32) принимают вид

$$\mu_1 + \mu_2 = a - 1, \quad (34)$$

$$\mu_1\mu_2 + \mu_1 + \mu_2 = b, \quad (35)$$

$$\mu_1\mu_2 = c. \quad (36)$$

Из системы (34) вытекают квадратные уравнения

$$\mu_1^2 - (a-1)\mu_1 + c = 0, \quad (37)$$

$$\mu_2^2 - (a-1)\mu_2 + c = 0,$$

из которых находим

$$\mu_1 = \frac{a-1}{2} + \sqrt{\frac{(a-1)^2}{4} - c}, \quad \mu_2 = \frac{a-1}{2} - \sqrt{\frac{(a-1)^2}{4} - c}. \quad (38)$$

Величины μ_1, μ_2 должны быть вещественными и положительными, причем

$$\mu_1 \neq \mu_2 \neq 1. \quad (39)$$

Из (37) вытекают условия, которым должны удовлетворять коэффициенты a, c :

$$c > 0, \quad (40)$$

$$\frac{(a-1)^2}{4} > c. \quad (41)$$

Кроме того, в силу (35) имеем

$$a + c - b = 1. \quad (42)$$

Таким образом, РВУ (1), основанное на схеме зацеплений (19), с матрицей Γ_4 (11), (24), где произвол в выборе параметров c_1, c_2, c_3, c_4 ограничен условиями (40) – (42), описывает микрообъект со спином $s = 1/2$ и тремя различными значениями массы

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{\mu_1}}, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{\mu_2}}, \quad m_3 = m. \quad (43)$$

Обсудим выбор знаков величин f и g (23). Поскольку все корни $C^{1/2}$ по условию вещественны, матрица $C^{1/2}$ должна быть эрмитовской. Отсюда следует, что

$$f = g = 1. \quad (44)$$

Значения величин μ_1 , μ_2 в (43), определяемые по формуле (38), зависят от значений коэффициентов a , b , c , которые, в свою очередь, выражаются через элементы c_1 , c_2 , c_3 , c_4 спинного блока $C^{1/2}$ (24). Остающийся после наложения условий (39) – (42) произвол в выборе этих параметров позволяет получить различные (с точки зрения спектра масс) варианты теории.

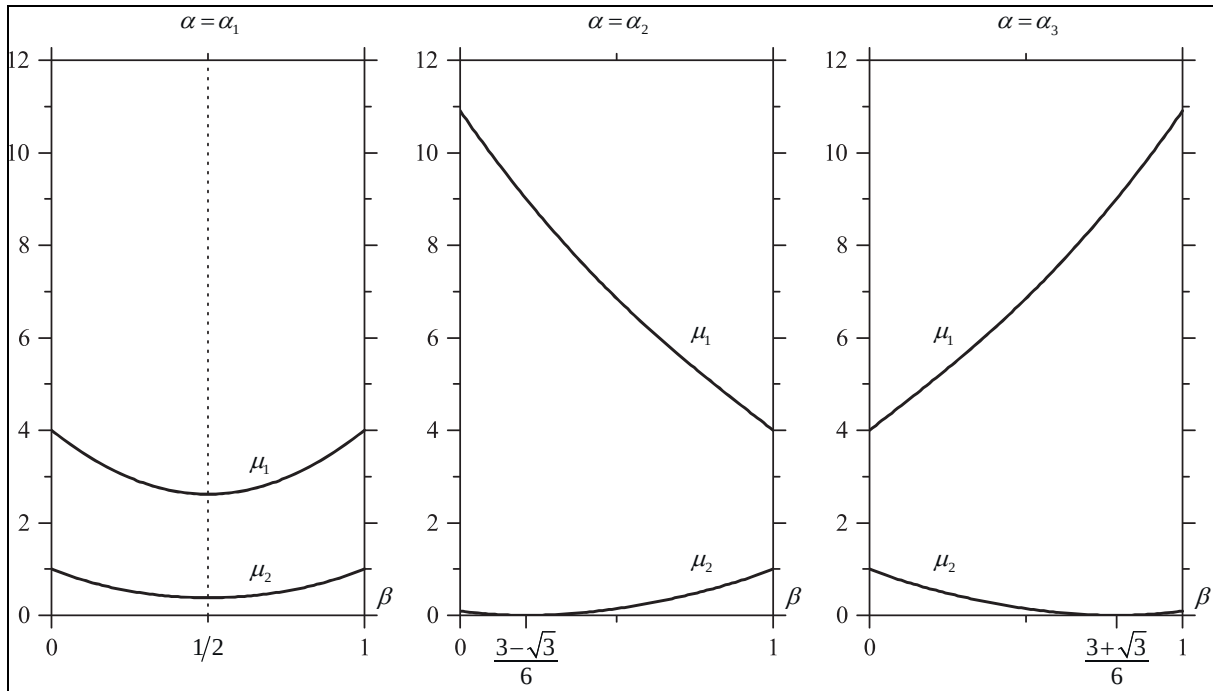


Рисунок. – Графики зависимости величин μ_1, μ_2 от параметра β

Рассмотрим более подробно имеющиеся возможности. Для этого вместо c_1 , c_2 , c_3 , c_4 введем параметры α, β согласно определению

$$c_1 = 1 + \alpha, \quad c_2 = 1 - \alpha, \quad |c_3| = \sqrt{\beta}, \quad |c_4| = \sqrt{1 - \beta} \quad (0 < \beta < 1). \quad (45)$$

Тогда имеем

$$a = 2\alpha^2 + 4, \quad b = \alpha^4 - 8\alpha\beta + 4\alpha + 4, \quad (46)$$

$$c = 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta + \alpha^2 - 4\alpha\beta + 2\alpha + 1. \quad (47)$$

Из условия (42) вытекает уравнение

$$\alpha \left[\alpha^3 - \alpha(4\beta^2 - 4\beta + 3) - 4\beta + 2 \right] = 0. \quad (48)$$

Одно решение уравнения (48) вытекает сразу:

$$\alpha = 0, \quad \beta \in (0, 1). \quad (49)$$

Остальные решения находятся из уравнения

$$\alpha^3 - \alpha(4\beta^2 - 4\beta + 3) - 4\beta + 2 = 0. \quad (50)$$

Рассматривая (50) как кубическое уравнение относительно α с параметром β , получим

$$\alpha_1 = -2\beta + 1, \quad \beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right); \quad (51)$$

$$\alpha_2 = \frac{2\beta - 1 - \sqrt{4\beta^2 - 4\beta + 9}}{2}, \quad \beta \in \left(0, \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6}, 1\right); \quad (52)$$

$$\alpha_3 = \frac{2\beta - 1 + \sqrt{4\beta^2 - 4\beta + 9}}{2}, \quad \beta \in \left(0, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, 1\right); \quad (53)$$

Величины μ_1 , μ_2 (38), соответствующие классам решений (49), (51), (52), (53) и определяющие спектр масс (43), принимают вид

$$\mu_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (\alpha = 0); \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 4\beta^2 - 4\beta + \frac{5 + \sqrt{16\beta^2 - 16\beta + 9}}{2} \\ \mu_2 &= 4\beta^2 - 4\beta + \frac{5 - \sqrt{16\beta^2 - 16\beta + 9}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\alpha = \alpha_1), \quad (55)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 2\beta^2 - 2\beta - S\beta + \frac{S}{2} + 4 + \frac{3}{2}\sqrt{8\beta^2 - 8\beta - 4S\beta + 2S + 7} \\ \mu_2 &= 2\beta^2 - 2\beta - S\beta + \frac{S}{2} + 4 - \frac{3}{2}\sqrt{8\beta^2 - 8\beta - 4S\beta + 2S + 7} \end{aligned} \right\} \quad (\alpha = \alpha_2), \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 2\beta^2 - 2\beta + S\beta - \frac{S}{2} + 4 + \frac{3}{2}\sqrt{8\beta^2 - 8\beta + 4S\beta - 2S + 7} \\ \mu_2 &= 2\beta^2 - 2\beta + S\beta - \frac{S}{2} + 4 - \frac{3}{2}\sqrt{8\beta^2 - 8\beta + 4S\beta - 2S + 7} \end{aligned} \right\} \quad (\alpha = \alpha_3), \quad (57)$$

где для упрощения записи введено обозначение

$$S = \sqrt{4\beta^2 - 4\beta + 9}. \quad (58)$$

Графики зависимостей (55) – (57) показаны на рисунке.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feshbach, H. A wave equation for a particle of maximum spin one / H. Feshbach, W. Nichols // *Annals of Physics*. – 1958. – Vol. 4. – P. 448–458.
2. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М. : Наука, 1958. – 368 с.
3. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.03.2017

Huhniuk M.L., Pletyukhov V.A. Description of Neutrino Generations in Approach of the Relativistic Wave Equations Theory

To date it is firmly established that all three known sorts of neutrinos possess finite masses. This fact points to a limited character of the Standard Model, in the context of which a neutrino is treated as a massless particle. Obviously, a description of a neutrino by means of the massless Dirac equation is either no longer adequate. In the present paper we propose a relativistic wave equation for a micro-object with spin 1/2 and three different mass values. In our opinion, this equation can be used for describing neutrino generations in frames of the classical field theory.