

УДК 513.82

А.А. Юдов¹, А.О. Волкова², Е.В. Арабчик³, Д.С. Арабчик⁴¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина²преподаватель-стажер каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина³магистрантка каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина⁴магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: modelmath@brsu.brest.by

**КЛАССИФИКАЦИЯ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ
ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА 2R_4 И ИХ ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

В работе классифицируются связанные подгруппы Ли группы Ли движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры – пространства 2R_4 . Найдены инвариантные плоскости и прямые для таких подгрупп Ли и их образы стационарности.

В работе изучается геометрия однородных пространств. Анализ таких пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались В.И. Ведерников, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, Л.К. Тутаев, А.С. Феденко и др., а за рубежом – эстонский геометр Ю. Лумисте и японские геометры К. Номидзу и Ш. Кобаяси. Ю. Лумисте показал применимость редуктивных однородных пространств к проблеме расширения связностей на расслоениях с редуктивными однородными слоями. К. Номидзу и Ш. Кобаяси проводили широкие исследования редуктивных однородных пространств, в частности, исследовали свойства инвариантной связности в редуктивных однородных пространствах.

1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается группа $G_0 = T_4 \cdot O(4,2)$ движений пространства 2R_4 . Ставится задача классификации всех связных подгрупп Ли группы G_0 с точностью до внутренних автоморфизмов этой группы, то есть до сопряженности. Для решения этой задачи будем применять тот же метод, который разработали И.В. Белько и А.С. Феденко для классификации связных подгрупп Ли группы движений пространства Минковского [1; 2]. Ниже кратко излагаются основы этого метода применительно к группе движений пространства 2R_4 .

Как известно [3], задача классификации связных подгрупп группы Ли с точностью до внутренних автоморфизмов эквивалентна задаче классификации подалгебр алгебры Ли этой группы с точностью до присоединённого представления этой группы. Подалгебры, переводящиеся друг в друга элементами присоединённой группы, тоже будем называть сопряжёнными.

В настоящей работе решается задача классификации подалгебр Ли алгебры $\bar{G}_0$ с точностью до присоединённого представления Ad группы G_0 . Присоединённая группа действует в $\bar{G}_0$ по формуле:

$$Ad B(C) = B^{-1}CB, \quad B \in G_0, C \in \bar{G}_0. \quad (1)$$

Следуя И. В. Белько [1], введем следующие определения:

Определение 1. Пусть $\bar{T} \oplus \hat{E}$ – полупрямая сумма идеала $\bar{T}$ и подалгебры K , $\bar{H}$ – подалгебра алгебры $\bar{T} \oplus \hat{E}$, $I_1 = \bar{I} \cap \bar{T}$, $I_2 = \partial r_2 \bar{I}$. Подалгебра $\bar{H}$ называется полупрямой, если $\bar{I} = I_1 \oplus I_2$, то есть $pr_1 \bar{I} = I_1$, $\bar{I} \cap \hat{E} = I_2$.

Определение 2. Подалгебра I алгебры $\bar{T} \oplus \hat{E}$ называется расширением полупрямой подалгебры $\bar{I} = I_1 \oplus I_2$, если $\bar{I} \cap \bar{T} = I_1$, $\partial r_2 \bar{I} = I_2$.

Имеют место следующие леммы, первые две из которых доказаны в [2]

Лемма 1. Пусть $\bar{T} \oplus K$ – полупрямая сумма идеала $\bar{T}$ и подалгебры K , $\bar{H}$ – подалгебра алгебры $\bar{T} \oplus \hat{E}$. Тогда 1) $\bar{H} \cap \bar{T} = I_1$ – подалгебра алгебры $\bar{T}$, 2) $\partial r_2 \bar{I} = I_2$ – подалгебра алгебры K , 3) если идеал $\bar{T}$ абелев, то $I_1 \oplus I_2$ – подалгебра алгебры $\bar{T} \oplus \hat{E}$.

Лемма 2. Пусть $\bar{T} \oplus \hat{E}$ – полупрямая сумма идеала $\bar{T}$ и подалгебры K , $\bar{P}$ – подалгебра алгебры $\bar{T}$, $\bar{H}$ – подалгебра алгебры K . Подпространство $\bar{P} \oplus \bar{I}$ тогда и только тогда является подалгеброй алгебры $\bar{T} \oplus \hat{E}$, когда подпространство $\bar{P}$ инвариантно относительно adX для любого $X \in \bar{I}$.

Лемма 3. Пусть $\bar{I} = I_1 \oplus I_2$ – полупрямая подалгебра алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathcal{A}(4,2)$, $\bar{I}$ – произвольное расширение подалгебры $\bar{H}$, Adh – элемент присоединённой группы $Ad(O(4,2))$. Тогда $Adh(\bar{H})$ – полупрямая подалгебра, $Adh(\bar{I})$ – расширение полупрямой подалгебры $Adh(\bar{H})$.

Доказательство. Пусть $h \in O(4,2)$. Из определения действия присоединённой группы AdG_0 (1) получаем, что выполняются равенства:

$$\partial r_1 \circ Adh = Adh \circ \partial r_1, \quad \partial r_2 \circ Adh = Adh \circ \partial r_2, \quad (2)$$

где ∂r_i – проекция на i -е слагаемое в сумме $\bar{T}_4 \oplus \mathcal{A}(4,2)$. Так как $\bar{H}$ – полупрямая подалгебра, то $\partial r_1 \bar{I} = \bar{I} \cap \bar{T}_4$, $\partial r_2 \bar{I} = \bar{I} \cap \mathcal{A}(4,2)$. Рассмотрим $Adh(\bar{I}) = Adh(I_1 \oplus I_2)$. Из (2) следует, что $\partial r_1(Adh(\bar{I})) = Adh \circ \partial r_1(\bar{I}) = Adh(I_1)$. С другой стороны, поскольку $\bar{T}_4$ инвариантно относительно Adh , то $Adh(\bar{I}) \cap \bar{T}_4 = Adh(I_1)$. Таким образом, $\partial r_1(Adh(\bar{I})) = Adh(\bar{I}) \cap \bar{T}_4 = Adh(I_1)$.

Аналогично доказывается равенство $\partial r_2(Adh(\bar{I})) = Adh(\bar{I}) \cap \mathcal{A}(4,2) = Adh(I_2)$. Таким образом, алгебра $Adh(\bar{I}) = Adh(I_1) \oplus Adh(I_2)$ – полупрямая.

Подалгебра $\bar{I}$ – расширение полупрямой подалгебры $\bar{H}$, значит, $\bar{I} \cap \bar{T}_4 = I_1$, $\partial r_2 \bar{I} = I_2$. Рассмотрим соотношения: $Adh(\bar{I}) \cap \bar{T}_4 = Adh(\bar{I}) \cap Adh(\bar{T}_4) = Adh(\bar{I} \cap \bar{T}_4) = Adh(I_1)$, $\partial r_2 \circ Adh(\bar{I}) = Adh \circ \partial r_2(\bar{I}) = Adh(I_2)$. Значит, $Adh(\bar{I})$ – расширение полупрямой подалгебры $Adh(\bar{I})$. Лемма доказана.

Имеет место следующая основная теорема:

Теорема. Всякая подалгебра алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathcal{A}(4,2)$ с помощью Adh , $h \in O(4,2)$ сопряжена некоторому расширению подалгебры $\bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2$, где – один из представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\mathcal{A}(4,2)$, I_1 – подпространство пространства $\bar{T}_4$, инвариантное относительно adI_2 .

Доказательство. Пусть $\bar{I}$ – произвольная подалгебра алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathcal{A}(4,2)$, $\bar{I}_1 = \bar{I} \cap \bar{T}_4$, $\bar{I}_2 = \partial r_2 \bar{I}$.

В силу леммы 1, $\bar{I}_2$ – подалгебра алгебры $\mathcal{A}(4,2)$. Значит, существует элемент $h \in O(4,2)$, такой, что $Adh(\bar{I}_2)I_2$, где $\bar{I}_2$ – один из представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\mathcal{A}(4,2)$. В силу определения 2, $\bar{I}$ является расширением полупрямой подалгебры $\bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2$. В силу леммы 3, $Adh(\bar{I})$ является расширением полупрямой подалгебры $\bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2$. В силу леммы 3, $Adh(\bar{I})$ является расширением полупрямой подалгебры $Adh(\bar{I}_1) \oplus Adh(\bar{I}_2) = Adh(\bar{I}_1) \oplus I_2$. В силу леммы 2, подпространство $Adh(\bar{I}_1)$ инвариантно относительно AdX для любого $X \in I_2$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что классификация подалгебр алгебры $\bar{G}_0$ должна проводиться с использованием классификации подалгебр алгебры $\mathcal{A}(4,2)$. В настоящей работе используется классификация с точностью до сопряжённости подалгебр алгебры Ли $\mathcal{A}(4,2)$, приведённая Р.Н. Хабибуллиной и А.П. Широковым [4].

Доказанная теорема сводит задачу классификации подалгебр алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathcal{A}(4,2)$ к трём следующим задачам:

1) нахождение всех полупрямых подалгебр вида $I_1 \oplus I_2$, где I_2 прибегает множество представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\mathcal{A}(4,2)$;

2) нахождение всех расширений полученных полупрямых подалгебр;

3) классификация полученных расширений с точностью до сопряжённости.

Покажем, как для подалгебры $I_2 \in \mathcal{A}(4,2)$ находятся подпространства пространства $\bar{T}_4$, инвариантные относительно AdH_2 .

Пусть $A \in \bar{T}_4$, $B \in \mathcal{A}(4,2)$. Тогда

$$ad B(A) = AB - BA = AB. \quad (3)$$

Таким образом, для нахождения инвариантных одномерных подпространств, необходимо решить следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in R$ – произвольное число, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ – произвольный элемент из I_2 . Аналогично

для нахождения инвариантных двумерных подпространств необходимо решить систему:

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$

где $\lambda, \mu, \nu, \delta$ – произвольные числа, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ – произвольный элемент из I_2 .

Для нахождения инвариантных трёхмерных подпространств воспользуемся следующим

утверждением, доказательство которого опускаем. Пусть I_2 – алгебра Ли связной группы Ли I_2 .

Тогда из $AdH_2(K) \subset K$ следует $adH_2(K) \subset K$ и обратно, где K – подпространство алгебры Ли G_0 . Из формулы (1.8) и (1) заключаем, что присоединённая группа $AdO(4,2)$ сохраняет метрику в пространстве $\bar{T}_4$ (изоморфном V_4). Таким образом, если $Adh(\bar{P}) \subset \bar{P}$, то $Adh(\bar{P}_0) \subset \bar{P}_0$, где $h \in O(4,2)$, $\bar{P}_0$ – ортогональное дополнение пространства $\bar{P}$. Значит, из $adK(\bar{P}) \subset \bar{P}$ следует, что $adK(\bar{P}_0) \subset \bar{P}_0$. Таким образом, инвариантные трёхмерные пространства находим как ортогональные дополнения к инвариантным одномерным подпространствам.

Чтобы найти расширения полупрямой подалгебры $I_1 \oplus I_2$, необходимо из множества $\{\bar{I}\}$ всех векторных подпространств алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathcal{G}(4,2)$, удовлетворяющих условию $\bar{I} \cap \bar{T} = I_1$, $\partial r_2 \bar{I} = I_2$, выбрать подалгебры, для чего надо потребовать замкнутость операции коммутирования.

Замечание. Для нахождения полупрямых подалгебр, соответствующих подалгебре $I_2 \subset \mathcal{G}(4,2)$, подпространства I_1 пространства $\bar{T}_4$, инвариантные относительно adI_2 , нужно искать с точностью до преобразований $Adh, h \in O(4,2)$, таких, что $Adh(I_2) = I_2$.

Для приведения найденных инвариантных подпространств к минимальному числу, согласно замечанию, будем использовать следующие элементы группы $O(4,2)$:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 h_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ch \varphi & 0 & sh \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & sh \varphi & 0 & ch \varphi \end{pmatrix}, \quad h_5 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 - \lambda^2/2 & 0 & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & -\lambda^2/2 & 0 & 1 + \lambda^2/2 \end{pmatrix}, \\
 h_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda^2/2 & -\lambda & -\lambda^2/2 \\ 0 & -\lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda^2/2 & -\lambda & 1 - \lambda^2/2 \end{pmatrix}, \quad h_7 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda/2 & -\lambda/2 & 0 \\ \lambda/2 & 1 & 0 & -\lambda/2 \\ -\lambda/2 & 0 & 1 & \lambda/2 \\ 0 & -\lambda/2 & -\lambda/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 h_9 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_{10} = \begin{pmatrix} ch \varphi & 0 & sh \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sh \varphi & 0 & ch \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 h_{13} &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2/2 & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 1 + \lambda^2/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad h_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

2. Полупрямые подалгебры алгебры $\bar{G}_0 = \bar{T}_4 \oplus \mathcal{G}(4,2)$

Приведём некоторые сведения о k -плоскостях пространства 2R_4 . В зависимости от метрики, которая индуцируется на k -плоскостях, все k -плоскости пространства 2R_4 разделяются на действительные (евклидовы), «мнимые» (мнимоевклидовы), полуевклидовы и изотропные.

Пусть дана плоскость $\beta = \{0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\}$, где $O \in {}^2R_4$, $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ – попарно ортогональные векторы из V_4 , определяющие k -плоскость β . Произвольный вектор $\vec{a} = \lambda^\alpha \vec{a}_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, k$ имеет длину $|\vec{a}|$, определяемую по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\lambda^1)^2 \vec{a}_1^2 + (\lambda^2)^2 \vec{a}_2^2 + \dots + (\lambda^k)^2 \vec{a}_k^2}.$$

Если $\vec{a}_1^2 > 0, \vec{a}_2^2 > 0, \dots, \vec{a}_k^2 > 0$, то k -плоскость β называется евклидовой, если $\vec{a}_1^2 > 0, \vec{a}_2^2 > 0, \dots, \vec{a}_k^2 > 0$, – мнимоевклидовой. Если $\vec{a}_1^2 > 0, \dots, \vec{a}_e^2 > 0, \vec{a}_{e+1}^2 < 0, \dots, \vec{a}_{e+p}^2 < 0, \vec{a}_{e+p+1}^2 = 0, \dots, \vec{a}_k^2 = 0$, то k -плоскость β называется полуевклидовой k -плоскостью индекса l дефекта $k - (l + p)$. Если все $\vec{a}_i^2 = 0$ $i = 1, 2, \dots, k$, то k -плоскость β называется изотропной k -плоскостью.

Евклидову k -плоскость будем обозначать R_k , мнимоевклидову k -плоскость будем обозначать kR_k , полуевклидову k -плоскость индекса l дефекта r будем обозначать ${}^eR_k^r$, изотропную k -плоскость будем обозначать R_k^k .

В пространстве 2R_4 существуют все возможные виды 1-плоскостей (т.е. прямых): $R_1 = \{0, \vec{e}_1\}$, ${}^1R_1 = \{0, \vec{e}_3\}$, $R_1^1 = \{0, \vec{e}_1 + \vec{e}_3\}$ – и все возможные виды 2-плоскостей: $R_2 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, ${}^1R_2 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_3\}$, ${}^2R_2 = \{0, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$, $R_2^1 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$, ${}^1R_2^1 = \{0, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4\}$, $R_2^2 = \{0, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4\}$.

В пространстве 2R_4 существует только три типа 3-плоскостей: ${}^1R_3 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, ${}^2R_3 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$, ${}^1R_3^1 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4\}$.

3-плоскостей $R_3^1, {}^2R_3^1, R_3, {}^3R_3, {}^1R_3^2, R_3^2, R_3^3$ в пространстве 2R_4 не существует.

Это следует из того, что существует только три типа прямых, а 3-плоскости являются ортогональными дополнениями соответствующих прямых. Если при движениях пространства 2R_4 прямые переходят друг в друга, то и их ортогональные дополнения также переходят друг в друга. Значит, они несут на себе метрику одного типа.

Перечислим теперь подалгебры алгебры $O(4,2)$ [4], обозначая каждую подалгебру буквой. Это обозначение будет применяться во всей работе.

$$\begin{aligned} \bar{G}_1 &= \{i_{10}\}, \bar{G}_2 = \{i_5\}, \bar{G}_3 = \{i_6\}, \bar{G}_4 = \{i_8 - i_{10}\}, \bar{G}_5 = \{i_5 - i_7\}, \bar{G}_6 = \{i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\} \\ \bar{G}_7 &= \{i_5 + i_{10}\}, \bar{G}_8 = \{i_6 - i_9\}, \bar{G}_9 = \{i_5 + \lambda i_{10}\}, \lambda \neq 0, \pm 1, \bar{G}_{10} = \{i_6 + \lambda i_9\}, \lambda \neq 0, \pm 1, \\ \bar{G}_{11} &= \{i_5 - i_7 + i_8 - i_{10} + 2i_6 - 2i_9\}, \bar{G}_{12} = \{i_6 - i_9 + \lambda(i_5 - i_7)\}, \lambda \neq 0, \bar{G}_{13} = \{i_5 + i_7 + i_8 - 3i_{10}\}, \\ \bar{G}_{14} &= \{3i_5 - i_7 - i_8 - i_{10}\}, \bar{G}_{15} = \{i_5, i_{10}\}, \bar{G}_{16} = \{i_6, i_9\}, \bar{G}_{17} = \{i_9, i_8 - i_{10}\}, \bar{G}_{18} = \{i_9, i_5 - i_7\}, \\ \bar{G}_{19} &= \{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}, \bar{G}_{20} = \{i_6, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}, \bar{G}_{21} = \{i_6 - i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}, \\ \bar{G}_{22} &= \{i_6 - i_9, i_5 - i_7 + i_{10}\}, \bar{G}_{23} = \{i_6 + \lambda i_9, i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}\}, \lambda \neq 0, \pm 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{24} &= \{i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, i_8 - i_{10} \pm i_6 \pm i_9\}, \quad \bar{G}_{25} = \{i_5 - i_{10}, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}, \\
\bar{G}_{26} &= \{i_6 - i_9 + \lambda(i_5 - i_{10}), i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\} \quad \lambda \neq 0, \pm 1, \quad \bar{G}_{27} = \{i_5 - i_{10}, i_6 - i_9\}, \quad \bar{G}_{28} = \{i_8, i_9, i_{10}\}, \\
\bar{G}_{29} &= \{i_5, i_7, i_9\}, \quad \bar{G}_{30} = \{i_6, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}, \quad \bar{G}_{31} = \{i_6, i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}, \\
\bar{G}_{32} &= \{i_5 + i_{10}, i_6 - i_9, i_7 + i_8\}, \quad \bar{G}_{33} = \{i_5 - i_7, i_6 - i_9, i_8 - i_{10}\}, \quad \bar{G}_{34} = \{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, i_6 + \lambda i_9\} \\
\lambda &\neq 0, \pm 1, \quad \bar{G}_{35} = \{i_5 - i_{10}, i_6 - i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}, \quad \bar{G}_{36} = \{i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}, \\
\bar{G}_{37} &= \{i_6, i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}, \quad \bar{G}_{38} = \{i_6, i_9, i_5 - i_{10}, i_7 - i_8\}, \\
\bar{G}_{39} &= \{i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8\}, \quad \bar{G}_{40} = \{i_5, i_{10}, i_6 + i_9, i_7 + i_8\}, \\
\bar{G}_{41} &= \{i_6, i_9, i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_8 - i_{10}\}, \quad \bar{G}_{42} = \{i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}.
\end{aligned}$$

Перечислим теперь полупрямые подалгебры. Для этого будем находить подпространства пространства $\bar{T}_4$, инвариантные относительно присоединенного представления подалгебр алгебры $O(4, 2)$. Элементы пространства $\bar{T}_4 = V_4$ будем записывать в виде: $a = (0, a^1, a^2, a^3, a^4)$. Инвариантность подпространства $K \subset \bar{T}_4$ относительно присоединенного представления некоторой алгебры $\bar{G}_i, i = 1, \dots, 42$ эквивалентна инвариантности этого пространства относительно присоединенного представления базиса этой алгебры. Заметим, что присоединенное представление $adi, i \in J$ в нашем случае определяется формулой

$$adi(a) = ai. \quad (I)$$

Подпространства $\bar{K}$, инвариантные относительно adG_i , достаточно искать с точностью до Adh , где $Adh(G_i), h \subset O(4, 2)$.

Для приведения подпространств, инвариантных относительно подалгебры adG_i , будем пользоваться матрицами $h_1 - h_{16}$. Чтобы каждый раз не проверять инвариантность базиса данной алгебры относительно Adh , выпишем формулы действия Adh_i на базисы данных алгебр.

Имеют место формулы:

$$\begin{aligned}
Adh_1(i_{10}) &= i_{10}, \quad Adh_1(i_5 + i_{10}) = i_5 + i_{10}, \quad Adh_2(i_5) = i_5, \quad Adh_3(i_6) = -i_6, \quad Adh_3(i_6 - i_9) = \\
&= i_9 - i_6, \quad Adh_3(i_6 + \lambda i_9) = -i_6 - \lambda i_9, \quad Adh_3(i_9) = -i_9, \quad Adh_3(i_5 - i_{10}) = i_5 - i_{10}, \quad Adh_3(i_7 - i_8) = \\
&= i_8 - i_7, \quad Adh_4(i_6) = i_6, \quad Adh_4(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}) = (chJ + shJ)(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}), \quad Adh_4(i_6 - i_9) = \\
&= i_6 - i_9, \quad Adh_5(i_8 - i_{10}) = i_8 - i_{10}, \quad Adh_6(i_5 - i_7) = i_5 - i_7, \quad Adh_7(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}) = i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, \\
&Adh_7(i_6 - i_9) = i_6 - i_9, \quad Adh_8(i_6) = -i_9, \quad Adh_8(i_9) = -i_6, \quad Adh_8(i_5 + i_{10}) = i_5 + i_{10}, \quad Adh_8(i_6 + i_8) = \\
&= i_7 + i_8, \quad Adh_9(i_6) = i_9, \quad Adh_9(i_9) = i_6, \quad Adh_9(i_6 - i_9) = i_6 - i_9, \quad Adh_9(i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}) = \\
&= i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}, \quad Adh_{10}(i_5 - i_7) = chJ(i_5 - i_7) + shJ(i_8 - i_{10}), \quad Adh_{10}(i_8 - i_{10}) = shJ(i_5 - i_7) + \\
&+ chJ(i_8 - i_{10}), \quad Adh_{11}(i_5 + i_{10}) = i_5 + i_{10}, \quad Adh_{11}(i_7 + i_8) = i_9 - i_6, \quad Adh_{11}(i_6 - i_9) = i_7 + i_8, \quad Adh_{12}(i_6) = \\
&= -i_6, \quad Adh_{12}(i_9) = i_9, \quad Adh_{12}(i_8 - i_{10}) = -i_8 + i_{10}, \quad Adh_{12}(i_5 - i_7) = i_5 - i_7, \quad Adh_{13}(i_6 - i_9) = i_6 - i_9, \\
&Adh_{13}(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}) = i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, \quad Adh_{14}(i_5 - i_7 + i_8 - i_{10} + 2i_6 - 2i_9) = -i_5 + i_7 - i_8 + i_{10} - \\
&- 2i_6 + 2i_9, \quad Adh_{15}(i_6) = i_6, \quad Adh_{15}(i_9) = -i_9, \quad Adh_{16}(i_6 + \lambda i_9) = i_6 + \lambda i_9, \quad Adh_{16}(i_6 - i_9) = i_6 - i_9, \\
&Adh_{16}(i_5 - i_7) = chJ(i_5 - i_7) + shJ(i_8 - i_{10}), \quad Adh_{16}(i_8 - i_{10}) = shJ(i_5 - i_7) + chJ(i_8 - i_{10}), \\
&Adh_{16}(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}) = -i_5 + i_7 + i_8 - i_{10}, \quad Adh_{16}(i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}) = -i_5 + i_7 - i_8 + i_{10}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим подалгебру $\bar{G}_{14}$. Относительно adG_{14} инвариантны подпространства: $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим двумерную подалгебру $\overline{G}_{15} = \{i_5, i_{10}\}$. Подпространства, инвариантные относительно adG_{15} , находятся как такие подпространства, которые инвариантны одновременно относительно adi_5 и относительно adi_{10} . Получаем, что таковыми будут только подпространства $\{i_1, i_2\}$, $\{i_3, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{16}$. Поступая, как в предыдущем случае, получим, что инвариантными относительно adG_{16} будут подпространства: $\{i_1 \pm i_3\}$, $\{i_2 \pm i_4\}$, $\{i_1 \pm i_3, i_2 \pm i_4\}$, $\{i_1 \pm i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_3\}$, $\{i_2, i_4\}$, $\{i_1 \pm i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_2 \pm i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

При помощи Adh_9 подпространства $\{i_1 + i_3\}$ и $\{i_2 + i_4\}$, $\{i_1, i_3\}$ и $\{i_2, i_4\}$ сопряжены. При помощи Adh_3 подпространства $\{i_1 + i_3\}$ и $\{i_1 - i_3\}$, $\{i_2 + i_4\}$ и $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1 - i_3, i_2 + i_4\}$ и $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены. При помощи Adh_{15} подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$ и $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены. При этом $\overline{G}_{16}$ инвариантна относительно Adh_3 , Adh_9 , Adh_{15} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 + i_3\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$, $\{i_1, i_3\}$, $\{i_1 - i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{17}$. Относительно adG_{17} инвариантны подпространства $\{i_1\}$, $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{18}$. Относительно adG_{18} инвариантны подпространства $\{i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}^\perp$, $\{i_1, i_2, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{19}$. Относительно adG_{19} инвариантны подпространства $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_{10} пространство $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\}$ переводится в пространство $\{i_2 - i_4, i_1\}$, $\{i_2 - i_4, i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_3\}$ или $\{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}$. При помощи Adh_{12} пространства $\{i_2 - i_4, i_1 + i_3\}$ и $\{i_2 - i_4, i_1 - i_3\}$ сопряжены. При этом подалгебра $\overline{G}_{19}$ инвариантна относительно Adh_{10} , Adh_{12} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_2 - i_4\}$, $\{i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4\}^\perp$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{20}$. Относительно adG_{20} инвариантны подпространства $\{i_1 + i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

При помощи Adh_4 подпространство $\{i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4\}$ переводится в одно из подпространств $\{i_1 + i_3, i_2\}$, $\{i_1 + i_3, i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$. Подалгебра $\overline{G}_{20}$ инвариантна относительно Adh_4 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 + i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2\}$, $\{i_1 + i_3, i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 \pm i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{21}$. Относительно adG_{21} инвариантны подпространства: $\{\lambda(i_1 + i_3) + \mu(i_2 - i_4)\}$, $\{i_1 \pm i_4, i_2 \pm i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$, $\{\lambda(i_1 + i_3) + \mu(i_2 - i_4)\}^\perp$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_7 подпространство $\{\lambda(i_1 + i_3) + \mu(i_2 - i_4)\}$ переводится в $\{i_1 + i_3\}$ или $\{i_1 + i_2 + i_3 - i_4\}$. При помощи Adh_{13} пространства $\{i_1 + i_3\}$ и $\{i_1 + i_2 + i_3 - i_4\}$ сопряжены. При помощи Adh_8 подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены, а при помощи Adh_{16} сопряжены пространства $\{i_1 + i_4, i_2 - i_3\}$ и $\{i_1 - i_4, i_2 + i_3\}$. Подалгебра

$\overline{G}_{21}$ інварыянтна адносна $Adh_7, Adh_8, Adh_{13}, Adh_{16}$ (2). Такім образом, інварыянтныя падпрасторствы прыводзяцца да выгляду: $\{i_1 + i_3\}, \{i_1 + i_4, i_2 - i_3\}, \{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}, \{i_1 + i_3, i_2, i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{22}$. Относительно adG_{22} инвариантны подпространства: $\{i_1 - i_3\}, \{i_2 - i_4\}, \{i_1 \pm i_3, i_2 \mp i_4\}, \{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}, \{i_1 - i_3\}^\perp, \{i_2 - i_4\}^\perp, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_9 подпространства $\{i_1 - i_3\}$ и $\{i_2 - i_4\}, \{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 + i_4\}$ сопряжены. Подалгебра $\overline{G}_{22}$ инвариантна относительно Adh_9 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 - i_3\}, \{i_1 - i_3, i_2 \pm i_4\}, \{i_1 - i_3, i_2, i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{23}$. Относительно adG_{23} инвариантны подпространства $\{i_1 - i_3\}, \{i_2 - i_4\}, \{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}, \{i_1 \pm i_3, i_2 \mp i_4\}, \{i_1 - i_3, i_2, i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1, i_3\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_{16} подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 + i_4\}$ сопряжены. Подалгебра $\overline{G}_{23}$ инвариантна относительно Adh_{16} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 - i_3\}, \{i_2 - i_4\}, \{i_1 - i_3, i_2 \pm i_4\}, \{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}^\perp, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $\overline{G}_{24}$ инварианты подпространства: $\{i_2 - i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}, \{i_2 - i_4, i_1, i_3\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $\overline{G}_{25}$ инварианты подпространства: $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $\overline{G}_{26}$ инварианты подпространства: $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $\overline{G}_{27}$ инвариантно только одно подпространство: $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{28} = \{i_8, i_9, i_{10}\}$. Относительно $ad\overline{G}_{28}$ инвариантны те и только те подпространства, которые инвариантны относительно adi_8, adi_9 и adi_{10} . Таковыми являются только подпространства $\{i_1\}, \{i_2, i_3, i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{29}$ и, как в предыдущем случае, устанавливаем, что относительно $\overline{G}_{29}$ инвариантны подпространства $\{i_3\}, \{i_1, i_2, i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{30}$. Относительно $ad\overline{G}_{30}$ инвариантны подпространства $\{i_2 - i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}, \{i_2 - i_4, i_1, i_3\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_{12} подпространства $\{i_2 - i_4, i_1 + i_3\}$ и $\{i_2 - i_4, i_1 - i_3\}$ сопряжены. Подалгебра $\overline{G}_{30}$ инвариантна относительно Adh_{12} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_2 - i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1 + i_3\}, \{i_2 - i_4\}^\perp, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{31}$. Относительно $ad\overline{G}_{31}$ инвариантны подпространства $\{i_1 + i_3\}, \{i_2 - i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}, \{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}, \{i_1 + i_3, i_2, i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1, i_3\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_8 подпространства $\{i_1 + i_3\}, \{i_2 - i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1 - i_3\}, \{i_2 + i_4, i_1 + i_3\}$ сопряжены. Подалгебра $\overline{G}_{31}$ инвариантна относительно Adh_8 (2).

Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 + i_3\}, \{i_1 + i_3, i_2 \pm i_4\}, \{i_1 + i_3, i_2, i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{32}$. Относительно $ad\overline{G}_{32}$ инвариантны подпространства: $\{i_1 + i_3, i_2 \pm i_4\}$, $\{i_1 \pm i_4, i_2 \mp i_3\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_8 подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$, $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_4, i_2 - i_3\}$, $\{i_1 - i_4, i_2 - i_3\}$ сопряжены.

При помощи Adh_{11} подпространства $\{i_1 + i_4, i_2 - i_3\}$, $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены. Подалгебра $\overline{G}_{32}$ инвариантна относительно Adh_8 и Adh_{11} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{33}$. Относительно $ad\overline{G}_{33}$ инвариантны подпространства: $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}^\perp$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{34}$ инвариантны подпространства: $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{35}$ инвариантны подпространства: $\{i_2 - i_4, i_1 + i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{36}$ инвариантны подпространства: $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_2\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{37}$. Относительно $ad\overline{G}_{37}$ инвариантны подпространства: $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}^\perp$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_{12} подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены. Подалгебра $\overline{G}_{36}$ инвариантна относительно Adh_{12} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{38}$. Относительно $ad\overline{G}_{38}$ инвариантны подпространства: $\{i_1 \pm i_3, i_2 \mp i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_3 подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены. Подалгебра $\overline{G}_{38}$ инвариантна относительно Adh_3 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{39}$ инвариантны подпространства: $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{40}$ инвариантны подпространства: $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{41}$ инвариантны подпространства: $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{42}$ инвариантны подпространства: $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Предположим теперь, что мы хотим выписать все полупрямые подалгебры $H_1 \oplus H_2$ алгебры $G_0 = \tau_4 \oplus \mathcal{G}(4, 2)$. Рассмотрим некоторую подалгебру $G_i, i \in \overline{1, 42}$. Выпишем все (с точностью до сопряжённости) такие полупрямые подалгебры H , что $\partial r_2 H = G_i$. Пусть $i = 1$. Инвариантные подпространства τ_4 относительно $ad\overline{G}_1$ приводятся (п. 4) к виду: $\{i_1\}$, $\{i_1, i_2\}$, $\{i_3, i_4\}$, $\{i_2, i_3, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. Тогда все полупрямые подалгебры H со свойством $\partial r_2 H = G_i$ с точностью до сопряжённости запишутся в виде $\{i_{10}, i_1\}$, $\{i_{10}, i_1, i_2\}$, $\{i_{10}, i_3, i_4\}$, $\{i_{10}, i_2, i_3, i_4\}$, $\{i_{10}, i_1, i_2, i_3, i_4\}$. Аналогично выписываются полупрямые подалгебры для любой подалгебры $G_i, i \in \overline{1, 42}$. Таким образом, нами классифицированы с точностью до сопряжённости все полупрямые подалгебры алгебры G_0 .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белько, И. В. Подгруппы группы Лоренца / И. В. Белько, А. С. Феденко // Докл. АН БССР. – 1970. – Т. XIV, № 5. – С. 393–395.
2. Белько, И. В. Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре / И. В. Белько // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.
3. Понтрягин, Л. С. Непрерывные группы / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1973. – 519 с.
4. Хабибулина, Р. Н. Классификация групп движений биаксиального пространства гиперболического типа / Р. Н. Хабибулина, А. П. Широков // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1968. – Т. 128, кн. 3, вып. 3. – С. 154–163.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.03.2017

Yudov A.A., Volkova A.O., Arabchik E.V., Arabchik D.S. Classification of Lie Subgroup of a Group of Movements Spaces 2R_4 and their Invariant Characteristics

In this paper, the related Lie subgroups of the Lie group of motions of the four-dimensional pseudo-Euclidean space of the zero signature-space 2R_4 . Invariant planes and lines for such Lie subgroups and their images of stationarity are found.