

Т.А. Артюшеня¹, А.А. Трофимук²

¹ассистент каф. высшей математики

Брестского государственного технического университета

²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии
и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: modelmath@brsu.brest.by

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ СО СВОБОДНЫМИ ОТ N-х СТЕПЕНЕЙ ИНДЕКСАМИ P-СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В СВОИХ НОРМАЛЬНЫХ ЗАМЫКАНИЯХ

Рассматриваются конечные группы. Пусть $k_p(G) = \max_{H \in P\text{-sn } G} \{j \mid p^j \parallel |H^G : H|\}$ и $k(G) = \max_p k_p(G)$, где $P\text{-sn } G$ – обозначение P -субнормальной подгруппы в группе G . Для разрешимой группы G установлена зависимость производной длины и нильпотентной длины от значений $k(G)$. Уточнены данные оценки инвариантов для малых значений $k(G)$. В частности, для разрешимой группы G с $k(G) \leq 2$ нильпотентная длина не превышает 4, а p -длина не превышает 1 для всех $p > 3$, 2-длина не выше 2, 3-длина не выше 2.

Введение

А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева и В.Н. Тютянов в [1] предложили следующее определение: пусть P – множество простых чисел. Подгруппа H группы G называется P -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_{i+1} : H_i|$ – простое число для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$. Обозначается H – $P\text{-sn } G$.

Возникает задача изучения групп, у которых каждая подгруппа из заданной системы подгрупп является P -субнормальной.

Так, в работе [2] Л.С. Казарин описал неабелевы композиционные факторы конечных групп, у которых единичная подгруппа является P -субнормальной в группе G . Группы, у которых P -субнормальны все максимальные подгруппы, являются сверхразрешимыми. Группы с P -субнормальными 2-максимальными подгруппами, силовскими подгруппами, примарными циклическими подгруппами, подгруппами Шмидта исследованы в работах [3–6].

Мы продолжим исследование в данном направлении. Для формулировки основного результата введем следующую функцию: пусть p – простое число. Для натурального числа n запись $p^j \parallel n$ означает, что p^j делит n , но p^{j+1} не делит n . Для группы G и простого числа p мы полагаем:

$$k_p(G) = \max_{H \in P\text{-sn } G} \{j \mid p^j \parallel |H^G : H|\};$$
$$k(G) = \max_p k_p(G).$$

Теорема 1.

Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если $k_p(G)=0$, то $l_p(G) \leq 1$; если $k_p(G)=1$, то $l_p(G) \leq 2$; если $k_p(G) \geq 2$, то $l_p(G) \leq k_p(G)$.

2. Производная длина группы $G/\Phi(G)$ и нильпотентная длина группы G не превышает $4+k(G)$.

Очевидно, что теорема 1 дает неточные оценки нильпотентной и p -длины при малых значениях $k(G)$. Эти оценки уточняются в теореме 2 и следствии 2.

Если $k(G)=0$, то, по лемме 4, группа G является сверхразрешимой группой. Поэтому коммутант группы G нильпотентен, и нильпотентная длина группы G не выше 2, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 2.

Теорема 2.

Пусть G – разрешимая группа и $k(G) \leq 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $n(G) \leq 4$;
- 2) $d(G/\Phi(G)) \leq 6$;
- 3) $l_p(G) \leq 1$, если $p > 3$, и $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$.

Напомним, что группа G называется A_4 -свободной, если она не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_4 .

Следствие 1.

Если G – разрешима, A_4 -свободная группа и $k(G) \leq 2$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 5$.

Следствие 2.

Если G – разрешимая группа и $k(G) \leq 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $n(G) \leq 4$;
- 2) $d(G/\Phi(G)) \leq 5$.

Следствие 3.

Если G – разрешимая, A_4 -свободная группа и $k(G) \leq 1$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 3$ и $n(G) \leq 3$.

Пример.

При помощи компьютерной системы GAP построена группа $G = [E_{3^2}]GL(2,3)$ порядка 432 с единичной подгруппой Фраттини. Здесь E_{3^2} – элементарная абелева группа порядка 3^2 . Легко проверить, что $k(G) \leq 1$. Кроме того G имеет производную длину, равную 5, нильпотентную длину, равную 4, 2- и 3-длину, равную 2. Таким образом, оценки инвариантов, полученные в Следствии 2, являются точными.

1. Вспомогательные результаты

Напомним некоторые понятия, используемые в данной работе.

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых делителей порядка группы G ; $N \triangleleft G$ – N минимальная нормальная подгруппа группы G , $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа группы G для некоторого простого числа p ; G_p – силовская p -подгруппа группы G ; $G_{p'}$ – дополнение к силовской p -подгруппе

в группе G ; т.е. холлова p' -подгруппа группы G ; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G ; $n(G)$ – нильпотентная длина группы G ; $d(G)$ – производная длина группы G , $l_p(G)$ – p -длина группы G .

Лемма 1.

Если $H \leq G$ и $N \triangleleft G$, тогда $(HN/N)^{G/N} = H^G N/N$ и $|H^G : H| = |(HN/N)^{G/N} : HN/N| |H^G \cap N : H \cap N|$. Более того, если $N \leq H$, тогда $|H^G : H| = |(H/N)^{G/N} : (H/N)|$.

Лемма 2 ([1, лемма 2.1]).

Пусть H – подгруппа группы G , $N \triangleleft G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если H P -sn G , то $(H \cap N)$ P -sn N и HN/N P -sn G/N .
2. Если $N \subseteq H$ и H/N P -sn G/N , то H P -sn G .
3. Если HN_i P -sn G , $N_i \triangleleft G$, $i = 1, 2$, то $(HN_1 \cap HN_2)$ P -sn G .
4. Если H P -sn K и K P -sn G , то H P -sn G .
5. Если H P -sn G , то H^x P -sn G для любого $x \in G$.

Лемма 3.

Пусть G группа и $N \triangleleft G$. Тогда для каждого $p \in \pi(G)$ выполняются следующие условия:

- 1) $k_p(G/N) \leq k_p(G)$ и $k(G/N) \leq k(G)$;
- 2) $k_p(N) \leq k_p(G)$ и $k(N) \leq k(G)$;
- 3) если K P -sn G , то $k_p(K) \leq k_p(G)$ и $k(K) \leq k(G)$.

Доказательство.

1. Пусть H/N P -sn G/N , для которой $p^{k_p(G/N)} \parallel |(H/N)^{G/N} : (H/N)|$. Тогда, по лемме 2 (п. 2), H P -sn G . По лемме 1, $|(H/N)^{G/N} : H/N| = |H^G : H|$, следовательно, $p^{k_p(G/N)} \parallel |H^G : H|$. Так как $p^{k_p(G/N)}$ делит $|(H/N)^{G/N} : H/N|$, то $p^{k_p(G)}$ делится на $p^{k_p(G/N)}$. Следовательно, $k_p(G/N) \leq k_p(G)$ и $k(G/N) \leq k(G)$.

2. Пусть K P -sn N , для которой $p^{k_p(N)} \parallel |K^N : K|$. В виду того, что $N \triangleleft G$, то N P -sn G . По лемме 2 (п. 4), K P -sn G . Так как $|K^G : K| = |K^G : K^N| |K^N : K|$ и $p^{k_p(N)}$ делит $|K^N : K|$, то $p^{k_p(N)}$ делит $|K^G : K|$. Следовательно, $p^{k_p(G)}$ делится на $p^{k_p(N)}$. Таким образом, $k_p(N) \leq k_p(G)$ и $k(N) \leq k(G)$.

3. Пусть H P -sn K , для которой $p^{k_p(K)} \parallel |H^K : H|$. По лемме 2 (п. 4), H P -sn G . Так как $|H^G : H| = |H^G : H^K| |H^K : H|$, то $p^{k_p(K)}$ делит $|H^G : H|$. По определению $k_p(G)$ будет следовать, что $p^{k_p(G)}$ делится на $p^{k_p(K)}$. Поэтому $k_p(G) \geq k_p(K)$. Очевидно, что $k(K) \leq k(G)$.

Лемма доказана.

Лемма 4.

Если $N \triangleleft G$ и $|N| = p^n$, тогда $n \leq 1 + k_p(G)$.

Доказательство.

Пусть K – подгруппа простого порядка группы N . Так как N – p -группа, то N – нильпотентная группа. По теореме 3.13 п. 5 [7], всякая подгруппа из N будет субнормальной, а следовательно, P -субнормальной в N .

Таким образом, K P -сн N . Так как $N \triangleleft G$, то N P -сн G . По лемме 2 (п. 4), K P -сн G и $K^G = N$. Тогда $p^{1+k_p(G)}$ не делит $|K^G : K| = p^{n-1}$; таким образом, $n-1 < 1 + k_p(G)$. Отсюда следует, что $n \leq 1 + k_p(G)$.

Лемма доказана.

Лемма 5 ([7, лемма 4.21, теорема 4.24]).

1. $\Phi(G) \leq F(G)$; если G разрешима и $G \neq 1$, то $\Phi(G) \neq F(G)$.
2. $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$.
3. Если $N \triangleleft G$, то $F(G) \leq G_G(N)$; если, кроме того, N абелева, то $N \leq Z(F(G))$.
4. Фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ есть прямое произведение абелевых минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$.
5. В разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп.

Лемма 6 ([8, лемма 12]).

Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$. Тогда:

- 1) если $n = 2$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$;
- 2) если $n = 3$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^5$;
- 3) если $n \in \{2, 3\}$, $p > 3$ и $O_p(H) = 1$, то H – p' -группа.

Лемма 7 ([8, лемма 7]).

Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^{k-1}$.

Лемма 8 ([7, теорема 2.8]).

Пусть G – группа и H – ее подгруппа. Тогда фактор-группа $N_G(H)/C_G(G)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut } H$.

Лемма 9 ([9, теорема VI.6.4]).

Пусть G – p -разрешимая группа такая, что $l_p(G/K) \leq k$ для всех неединичных нормальных подгрупп K группы G , но $l_p(G) > k$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;
- 2) в группе G максимальная p -нильпотентная нормальная подгруппа $F_p(G)$ является элементарной абелевой p -группой;
- 3) $F_p(G)$ – единственная минимальная подгруппа группы G , имеющая добавление, т.е. $G = [F_p(G)]M$;
- 4) $C_G(F_p(G)) = F_p(G)$.

Лемма 10 ([9, теорема VI.6.4]).

Пусть G p -разрешимая группа. Тогда:

- 1) если N – нормальная подгруппа группы G , то $l_p(G/N) \leq l_p(G)$;
- 2) если H – подгруппа группы G , то $l_p(H) \leq l_p(G)$;
- 3) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы группы G , то $l_p(N_1 \cdot N_2) = \max\{l_p(N_1), l_p(N_2)\}$; в частности, $l_p(N_1 \times N_2) = \max\{l_p(N_1), l_p(N_2)\}$;
- 4) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы группы G , то $l_p(G/(N_1 \cap N_2)) = \max\{l_p(G/N_1), l_p(G/N_2)\}$;
- 5) $l_p(G/\Phi(G)) = l_p(G)$.

Лемма 11 ([8, лемма 13]).

1. Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, то H метабелева. Если H – разрешимая A_4 -свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3, p)$, то $H \in \mathcal{U}^4$.

2. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.

1. Пусть $K/N \triangleleft G/N$ такая, что $|K/N| = p^{r_p(G)}$. По лемме 4, $r_p(G) \leq 1 + k_p(G/N) \leq 1 + k_p(G)$. Если $k_p(G) = 0$, то $r_p(G) \leq 1$ и G p -сверхразрешима. Поэтому $l_p(G) \leq 1$. Если $k_p(G) = 1$, то $r_p(G) \leq 2$ и, по теореме 4 [8], $l_p(G) \leq 2$. Если $k_p(G) \geq 2$, то $r_p(G) \leq 2$ или $r_p(G) \geq 3$. В первом случае, по теореме 4 [8], $l_p(G) \leq 2$, а во втором, по следствию 1 [8], $l_p(G) \leq r_p(G) - 1$. Таким образом, $l_p(G) \leq k_p(G)$.

2. Покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathcal{U}^{3+k(G)}$. По лемме 3 п. 1, условие теоремы наследуют все фактор-группы. Тогда по индукции в группе G подгруппа Фраттини единичная и существует минимальная нормальная подгруппа N , совпадающая с подгруппой Фиттинга.

Пусть $|N| = p^\alpha$. Тогда фактор-группа G/N изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(\alpha, p)$. Тогда, по определению функции $\rho(n)$, фактор-группа $G/N \in \mathcal{U}^{\rho(\alpha)}$. Так как $\rho(n) \leq n + 2$, то $G/N \in \mathcal{U}^{\alpha+2}$. По лемме 4, $\alpha \leq 1 + k_p(G)$. Тогда $G/N \in \mathcal{U}^{k_p(G)+3}$.

В общем случае $G/N \in \mathcal{U}^{k(G)+3}$ и $G \in \mathfrak{N}\mathcal{U}^{3+k(G)}$. По лемме 7, $G/\Phi(G) \in \mathcal{U}^{4+k(G)}$. Тогда $d(G/\Phi(G)) \leq 4 + k(G)$. Так как $G \in \mathfrak{N}\mathcal{U}^{3+k(G)}$, то $n(G) \leq 4 + k(G)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.

1–2. Индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathcal{U}^5 \cap \mathcal{U}^4$.

По лемме 3 п. 1, условие теоремы наследуются всеми фактор-группами группы G .

Пусть $\Phi(G) \neq 1$, тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Ввиду того, что $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией, $G \in \mathfrak{F}$. В дальнейшем считаем, что $\Phi(G) = 1$.

Покажем, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Предположим противное. Пусть $N_1 \triangleleft G$ и $N_2 \triangleleft G$, тогда $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$. По лемме 2.33 [7], $G/(N_1 \cap N_2)$ изоморфна подгруппе прямого произведения $G/N_1 \times G/N_2$. Так как N_1 и N_2 – минимальные нормальные подгруппы, то $N_1 \cap N_2 = 1$. Таким образом, G изоморфна подгруппе группы $G/N_1 \times G/N_2$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то $\mathfrak{F}$ замкнуто относительно подпрямых произведений. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$. Значит, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N .

По лемме 5 п. 5, подгруппа Фиттинга совпадает с подгруппой N , т.е. $F(G) = N$. По следствию [7, с. 86], N является элементарной абелевой p -группой для некоторого простого p . Пусть $|F(G)| = |N| = p^n$. По лемме 4, $n \leq 1 + k_p(G)$. Так как по условию $k_p(G) \leq 2$, то $n \leq 3$.

Так как N – абелева группа, то, по п. 3 леммы 5, $F(G) = C_G F(G)$. Так как $F(G) \triangleleft G$, то $N_G(F(G)) = G$. Поэтому $G/F(G)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut } F(G)$ по лемме 8.

Если $n = 1$, то $G/F(G)$ циклическая группа порядка $p - 1$. Поэтому $G \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$.

Если $n = 2$, то, по лемме 6 (п. 1), $G/F(G) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$. Значит, $G \in \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N} \mathfrak{U}^4 \subseteq \mathfrak{F}$.

Если $n = 3$, то, по лемме 6 (п. 2), $G/F(G) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^5$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$.

Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то $n(G) \leq 4$. Т.к. $G \in \mathfrak{N} \mathfrak{U}^5$, то, по лемме 7, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}^6$. Значит, $d(G/\Phi(G)) \leq 6$.

3. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$ и всякая метанильпотентная группа имеет p -длину, не превосходящую 1, то $l_p(G) \leq 2$ для любого простого $p \in \pi(G)$.

Предположим, что G – группа наименьшего порядка, для которой условие $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$ не выполняется. Так как условие теоремы наследуют все фактор группы, то, по лемме 9, можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, а, по лемме 10, подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная p -подгруппа и $|F| \leq p^3$ по лемме 4.

Если $|F| \leq p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $\text{Aut } F$ группы F , порядок которой равен $p - 1$. Отсюда, силовская p – подгруппа группы G совпадает с подгруппой Фиттинга. Значит, $l_p(G) \leq 1$. Противоречие.

Если $|F| = p^2$ или $|F| = p^3$, то $\text{Aut } F = GL(2, p)$ или $\text{Aut } F = GL(3, p)$ и G/F – неприводимая подгруппа группы $GL(n, p)$, $n = \{2, 3\}$ и $O_p(G/F) = 1$. Тогда, по лемме 6, G/F – p' -группа. Отсюда следует, что $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$. Противоречие с предположением.

Теорема доказана.

Доказательство следствия 1.

Индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$. Повторяя большую часть доказательства теоремы 2, получим, что $|F| \leq p^3$.

Если $n=1$, то $G/F(G) \in \mathfrak{U}$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$.

Если $n=2$, то, по лемме 11 (п. 1), $G/F(G)$ изоморфна A_4 -свободной подгруппе группы $GL(2, p)$ и $G/F(G) \in \mathfrak{U}^2$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2 \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$.

Если $n=3$, то, по лемме 11 (п. 2), $G/F(G)$ изоморфна A_4 -свободной подгруппе группы $GL(3, p)$ и $G/F(G) \in \mathfrak{U}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$.

Так как $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$, то, по лемме 7, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}^5$. Поэтому $d(G/\Phi(G)) \leq 5$.

Доказательство следствия 2.

Индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4 \cap \mathfrak{N}^4$. Повторяя большую часть доказательства теоремы 2, получим, что $|F(G)| = |N| = p^n$. По лемме 4, $n \leq 1 + k_p(G)$. Так как по условию $k_p(G) \leq 1$, то $n \leq 2$.

Если $n=1$, то $G/F(G)$ циклическая группа порядка $p-1$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4 \cap \mathfrak{N}^4$.

Если $n=2$, то, по лемме 6 (п. 1), $G/F(G) \in \mathfrak{U}^3 \cap \mathfrak{U}^4$. Значит, $G \in \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$.

Отсюда следует, что нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Доказательство следствия 3.

Индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2$. Повторяя большую часть доказательства следствия 1, получим, что $|F(G)| = |N| = p^n$. По лемме 4, $n \leq 1 + k_p(G)$. Так как по условию $k_p(G) \leq 1$, то $n \leq 2$.

Если $n=1$, то $G/F(G)$ циклическая группа порядка $p-1$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2$.

Если $n=2$, то, по лемме 11 (п. 1), $G/F(G) \in \mathfrak{U}^2$. Значит, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2$.

Отсюда следует, что нильпотентная длина группы G не превышает 3, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, А. Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // ПФМТ. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.
2. Казарин, Л. С. О группах с факторизацией / Л. С. Казарин // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 256, № 1. – С. 26–29.
3. Kniagina, V. N. Finite groups with P-subnormal 2-maximal subgroups / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // arxiv.org e-Print archive, arxiv.org/pdf/1105.3663.pdf, 18 May 2011.

4. Kniagina, V. N. Finite groups with P-subnormal primary cyclic subgroups / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // arxiv.org e-Print archive, arxiv.org/pdf/1110.4720, 18 Nov. 2011.
5. Vasilyev, A. F. On the finite groups of supersoluble type / A. F. Vasilyev, T. I. Vasilyeva, V. N. Tyutyanov // Sib. Math. J. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1004–1012.
6. Kniagina, V. N. On supersolvability of finite groups with P-subnormal subgroups / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // International Journal of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.
7. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
8. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.
9. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.02.2017

Artiushenia T.A., Trofimuk A.A. Solvable Group with N-Free Degrees of Indexes of P-Subnormal Subgroups in its Normal Closures

We consider only finite groups. Let $k_p(G) = \max_{H \text{ P-sn } G} \left\{ j \mid p^j \parallel |H^G : H| \right\}$ and $k(G) = \max_p k_p(G)$, where

P-sn G is the designation of P-subnormal subgroups in the group G. For solvable group G, the dependence of the derived length and the nilpotent length of values of k(G) is obtained. The estimations of this invariants for small values of k(G) are refined. In particular, the nilpotent length of group G with $k(G) \leq 2$ does not exceed 4 and the p-length is at most 1 for all $p > 3$, 2-length is at most 2, 3-length is at most 2.