

УДК 539.12:530.145

П.П. Андрусевич, В.И. Стражев

ВНУТРЕННЯЯ СИММЕТРИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗМЕРНОСТИ 2+1

Продолжено начатое в предыдущих работах авторов исследование внутренней симметрии дираковских полей в пространстве размерности 2+1. В рамках вещественного описания рассмотрена система двух уравнений Дирака для случаев $m = 0$ и $m \neq 0$. Показано, что наиболее полная группа внутренней симметрии указанной системы при $m = 0$ содержит 40, а при $m \neq 0$ – 20 независимых параметров. Установленные симметрии существенно шире симметрий, которые сопоставляются в литературе 8-компонентному дираковскому полю в пространстве 2+1, и содержат последние в качестве подгрупп.

Введение

В работах [1; 2] исследовалась внутренняя симметрия уравнения Дирака для массивной и безмассовой частиц в пространстве 2+1. При этом использовался метод, основанный на приведении рассматриваемого уравнения к вещественной форме [3; 4]. Было установлено наличие более широких групп симметрии по сравнению с теми, которые обычно обсуждаются в работах других авторов на данную тему [5; 6].

Интерес к этой проблеме обусловлен возможностью описания решеточной структуры графена методами релятивистской квантовой механики [5–7]. Кристаллическая решетка графена представляет собой плоскость, состоящую из шестиугольных ячеек, то есть является двумерной гексагональной структурой. В элементарной ячейке находятся два атома, которые образуют в кристалле две независимые подрешетки. В низкоэнергетическом пределе для электронов в графене имеет место линейный закон дисперсии

$$E = \hbar v_F k, \quad (1)$$

где v_F – скорость Ферми (экспериментальное значение $v_F \approx 10^6$ м/с), k – модуль волнового вектора в двумерном пространстве. Как известно, такого рода энергией обладает фотон. Поэтому реальным электронам и дыркам в графене можно сопоставить квазичастицы с положительной и отрицательной энергией $E = \pm \hbar v_F k$ и нулевой эффективной массой. Если учесть степень свободы, связанную с принадлежностью электронов и дырок к определенной подрешетке, и не принимать во внимание спин (что обычно делается в отсутствие магнитных полей), то получается, что указанные квазичастицы должны описываться четырехкомпонентной волновой функцией. А поскольку электроны и дырки являются фермионами, естественно предположить, что данная волновая функция должна подчиняться уравнению Дирака в пространстве 2+1 с нулевой массой частиц и античастиц, чем и обусловлена постановка задачи в работах [1; 2].

Однако при наличии достаточно сильных магнитных полей необходимо учитывать спин, так что число компонент волновой функции увеличивается до восьми. С такой функцией обычно связывают систему из двух уравнений Дирака [5; 6]. В настоящей работе подход, используемый в [1–4], применяется для исследования внутренней симметрии системы из двух уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1.

Вещественная форма исходных уравнений

Рассмотрим систему двух безмассовых уравнений Дирака (уравнений для безмассового нейтрино) в пространстве 2+1

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 &= 0, \\ \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где индекс μ пробегает значения 0,1,2. Метрику пространства $g_{\mu\nu}$ и матрицы γ_μ выберем в виде:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1,1,1),\tag{2}$$

$$\gamma_0 = \sigma_3 \otimes I_2, \gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2\tag{3}$$

(σ_i – матрицы Паули). Взяв от (1) комплексное сопряжение и учитывая мнимый характер временной координаты x_0 , для сопряженных функций ψ_1^*, ψ_2^* получим уравнения:

$$\begin{aligned}(-\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2) \psi_1^* &= 0, \\ (-\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2) \psi_2^* &= 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Рассматривая системы (1) и (4) совместно, придем к 16-компонентной системе, которую можно представить в универсальной матричной форме:

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0.\tag{5}$$

При выборе волновой функции Ψ в виде

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_1^*, \psi_2^*) - \text{столбец}\tag{6}$$

для матриц Γ_μ в (5) будем иметь выражения:

$$\Gamma_0 = \gamma_0 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \gamma_0 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2.\tag{7}$$

Для дальнейшего удобно перейти к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены:

$$\begin{aligned}\Psi &= (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) - \text{столбец}, \\ \psi_{1,2}^r &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2} + \psi_{1,2}^*), \quad \psi_{1,2}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2} - \psi_{1,2}^*).\end{aligned}\tag{8}$$

Указанный переход от представления (6) осуществляется с помощью унитарного преобразования базиса в пространстве состояний:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_8 & -I_8 \end{pmatrix}, \quad u^{-1} = u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_8 & -I_8 \end{pmatrix}.\tag{9}$$

Матрицы Γ_μ при этом принимают вид

$$\Gamma_0 = \gamma_5 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \gamma_5 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2,\tag{10}$$

где

$$\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad \gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_3.\tag{11}$$

Лагранжиан уравнения (5)

$$L = -\bar{\Psi} \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = -\Psi^+ \eta \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi\tag{12}$$

эквивалентен лагранжиану исходной системы (1)

$$L = -\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 - \bar{\psi}_2 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 = -\psi_1^+ \gamma_0 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 - \psi_2^+ \gamma_0 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2\tag{13}$$

при выборе матрицы билинейной формы η в (12) в виде

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_0,\tag{14}$$

который инвариантен относительно преобразования (9).

Уравнение (5) с волновой функцией (8), матрицами Γ_μ (10) и лагранжианом (12) будем называть вещественной формой исходной системы (1), поскольку соответствующая (5) система 16 уравнений, записанных в явном виде, является вещественной. Эту форму мы и будем использовать при установлении группы внутренней симметрии лагранжевой формулировки системы (1).

Внутренняя симметрия

Для решения поставленной задачи будем использовать также фермионный базис, в котором диракоподобные матрицы Γ_μ , по определению, имеют структуру:

$$\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu. \quad (15)$$

Переход от представления (8) в фермионный базис может быть осуществлен посредством унитарного преобразования:

$$A = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)],$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)]. \quad (16)$$

Матрица билинейной формы η при этом принимает вид:

$$\eta = \gamma_5 \otimes \gamma_0. \quad (17)$$

Инвариантность уравнения (5) с матрицами Γ_μ (15) относительно преобразований внутренней симметрии

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu) \quad (18)$$

обеспечивается матрицами четырех типов

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \quad Q_2 = q^{(2)} \otimes i\gamma_3\gamma_5,$$

$$Q_3 = q^{(3)} \otimes \gamma_3, \quad Q_4 = q^{(4)} \otimes \gamma_5, \quad (19)$$

где $q^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1 \div 4$) – комплексные матрицы 4x4, на которые накладываются лишь ограничения, связанные с сохранением вещественного характера уравнения (5). При этом матрицы Q_1, Q_2 удовлетворяют условиям коммутации, а матрицы Q_3, Q_4 – условиям антикоммутации с матрицами Γ_μ :

$$[Q_1, \Gamma_\mu]_- = [Q_2, \Gamma_\mu]_- = 0, \quad (20)$$

$$[Q_3, \Gamma_\mu]_+ = [Q_4, \Gamma_\mu]_+ = 0. \quad (21)$$

Параметризуя четырехмерные матрицы $q^{(\alpha)}$ посредством базисных элементов e_N ($N = 1 \div 16$)

$$e_1 = I_4, \quad e_2 = \gamma_0, \quad e_3 = \gamma_1, \quad e_4 = \gamma_2, \quad e_5 = \gamma_3, \quad e_6 = i\gamma_0\gamma_3,$$

$$e_7 = i\gamma_1\gamma_3, \quad e_8 = i\gamma_2\gamma_3, \quad e_9 = \gamma_5, \quad e_{10} = i\gamma_0\gamma_5, \quad e_{11} = i\gamma_1\gamma_5,$$

$$e_{12} = i\gamma_2\gamma_5, \quad e_{13} = i\gamma_3\gamma_5, \quad e_{14} = i\gamma_0\gamma_1, \quad e_{15} = i\gamma_1\gamma_2, \quad e_{16} = i\gamma_2\gamma_0, \quad (22)$$

получим 64 базисных оператора преобразований внутренней симметрии уравнения (5), имеющих в фермионном базисе вид:

$$J^N = e_N \otimes I_4, \quad L^N = e_N \otimes i\gamma_3\gamma_5, \quad K^N = e_N \otimes \gamma_3, \quad I^N = e_N \otimes \gamma_5 \quad (23)$$

(множитель i здесь вводится для обеспечения эрмитовости операторов (22), (23)).

Возвращаясь теперь обратно в базис (8), получим для операторов (23) выражения:

$$\begin{aligned}
J^1 &= I_{16}, \quad J^2 = -i\gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad J^3 = -i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad J^4 = -i\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2, \\
J^5 &= -i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad J^6 = i\gamma_0\gamma_3 \otimes I_4, \quad J^7 = i\gamma_1\gamma_3 \otimes I_4, \quad J^8 = i\gamma_2\gamma_3 \otimes I_4, \\
J^9 &= \gamma_5 \otimes I_4, \quad J^{10} = \gamma_0 \otimes \gamma_2, \quad J^{11} = \gamma_1 \otimes \gamma_2, \quad J^{12} = \gamma_2 \otimes \gamma_2,
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
J^{13} &= \gamma_3 \otimes \gamma_2, \quad J^{14} = i\gamma_0\gamma_1 \otimes I_4, \quad J^{15} = i\gamma_1\gamma_2 \otimes I_4, \quad J^{16} = i\gamma_2\gamma_0 \otimes I_4; \\
L^1 &= I_4 \otimes i\gamma_3\gamma_5, \quad L^2 = \gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^3 = \gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^4 = \gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_0, \\
L^5 &= \gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^6 = -\gamma_0\gamma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad L^7 = -\gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad L^8 = -\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5, \\
L^9 &= \gamma_5 \otimes i\gamma_3\gamma_5, \quad L^{10} = i\gamma_0 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^{11} = i\gamma_1 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^{12} = i\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_0, \\
L^{13} &= i\gamma_3 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^{14} = -\gamma_0\gamma_1 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^{15} = -\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad L^{16} = -\gamma_2\gamma_0 \otimes \gamma_3\gamma_5;
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
K^1 &= \gamma_5 \otimes \gamma_3, \quad K^2 = -i\gamma_0 \otimes \gamma_2\gamma_3, \quad K^3 = -i\gamma_1 \otimes \gamma_2\gamma_3, \quad K^4 = -i\gamma_2 \otimes \gamma_2\gamma_3, \\
K^5 &= -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_3, \quad K^6 = -i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_3, \quad K^7 = -i\gamma_2\gamma_0 \otimes \gamma_3, \quad K^8 = -i\gamma_0\gamma_1 \otimes \gamma_3, \\
K^9 &= I_4 \otimes \gamma_3, \quad K^{10} = \gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_3, \quad K^{11} = \gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_3, \quad K^{12} = \gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_3, \\
K^{13} &= \gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_3, \quad K^{14} = -i\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_3, \quad K^{15} = -i\gamma_0\gamma_3 \otimes \gamma_3, \quad K^{16} = -i\gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_3;
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
I^1 &= \gamma_5 \otimes \gamma_5, \quad I^2 = -i\gamma_0 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad I^3 = -i\gamma_1 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad I^4 = -i\gamma_2 \otimes \gamma_2\gamma_5, \\
I^5 &= -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad I^6 = -i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_5, \quad I^7 = -i\gamma_2\gamma_0 \otimes \gamma_5, \quad I^8 = -i\gamma_0\gamma_1 \otimes \gamma_5, \\
I^9 &= I_4 \otimes \gamma_5, \quad I^{10} = \gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad I^{11} = \gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad I^{12} = \gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5, \\
I^{13} &= \gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad I^{14} = -i\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_5, \quad I^{15} = -i\gamma_0\gamma_3 \otimes \gamma_5, \quad I^{16} = -i\gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_5.
\end{aligned} \tag{27}$$

Условие сохранения вещественного характера уравнения (5) (вещественности поля) относительно матричных преобразований (18), задаваемых базисными операторами (24)–(27), накладывает на соответствующие параметры ($\omega_N \leftrightarrow J^N$, $\theta_N \leftrightarrow L^N$, $\Lambda_N \leftrightarrow K^N$, $\Omega_N \leftrightarrow I^N$) следующие ограничения:

$$\begin{aligned}
&\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_8, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \omega_{15}, \omega_{16}, \\
&\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_8, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{13}, \theta_{15}, \theta_{16}, \\
&\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_8, \Lambda_{10}, \Lambda_{11}, \Lambda_{13}, \Lambda_{15}, \Lambda_{16}, \\
&\Omega_4, \Omega_6, \Omega_7, \Omega_9, \Omega_{12}, \Omega_{14} \text{ — вещественные;} \\
&\omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{12}, \omega_{14}, \theta_4, \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{12}, \theta_{14}, \\
&\Lambda_4, \Lambda_6, \Lambda_7, \Lambda_9, \Lambda_{12}, \Lambda_{14}, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_5, \Omega_8, \\
&\Omega_{10}, \Omega_{11}, \Omega_{13}, \Omega_{15}, \Omega_{16} \text{ — мнимые.}
\end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, преобразования внутренней симметрии исследуемой системы двух безмассовых уравнений Дирака в пространстве 2+1 описываются унитарной 64-параметрической группой, задаваемой эрмитовскими базисными операторами (24)–(27), которым соответствует 36 вещественных и 28 мнимых параметров (28).

Требование инвариантности лагранжиана (12) относительно преобразований (18) накладывает на матрицу Q ограничение

$$Q^+ \eta \Gamma_\mu Q = \eta \Gamma_\mu, \tag{29}$$

которое для матриц Q_1, Q_2 (Q_3, Q_4), коммутирующих (антикоммутирующих) с Γ_μ , принимает соответственно вид:

$$Q_1^+ \eta Q_1 = \eta, \quad Q_2^+ \eta Q_2 = \eta, \tag{30}$$

$$Q_3^+ \eta Q_3 = -\eta, \quad Q_4^+ \eta Q_4 = -\eta, \quad (31)$$

Каждое из соотношений (30), (31) накладывает по 6 связей на параметры этих преобразований:

$$\begin{aligned} 1 - \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 + \omega_5^2 - \omega_6^2 - \omega_7^2 - \omega_8^2 - \omega_9^2 + \omega_{10}^2 + \omega_{11}^2 + \omega_{12}^2 + \\ + \omega_{13}^2 - \omega_{14}^2 - \omega_{15}^2 - \omega_{16}^2 = 0, \\ -\omega_3\omega_4 + \omega_5\omega_{10} + \omega_6\omega_9 - \omega_7\omega_8 - \omega_{11}\omega_{12} - \omega_2\omega_{13} - \omega_1\omega_{15} + \omega_{14}\omega_{16} = 0, \\ \omega_3\omega_5 - \omega_4\omega_{10} - \omega_6\omega_{14} - \omega_1\omega_7 - \omega_9\omega_{16} + \omega_2\omega_{12} + \omega_{11}\omega_{13} - \omega_{15}\omega_8 = 0, \\ -\omega_3\omega_9 - \omega_6\omega_4 - \omega_{10}\omega_{14} - \omega_1\omega_{11} - \omega_2\omega_8 + \omega_{13}\omega_7 + \omega_{12}\omega_{15} + \omega_{16}\omega_5 = 0, \\ \omega_6\omega_{12} - \omega_1\omega_3 - \omega_2\omega_{14} - \omega_{13}\omega_6 + \omega_4\omega_{15} + \omega_5\omega_7 + \omega_8\omega_{10} + \omega_{11}\omega_9 = 0, \\ -\omega_{16}\omega_{15} - \omega_7\omega_6 + \omega_9\omega_8 + \omega_{10}\omega_{11} - \omega_5\omega_{12} + \omega_1\omega_{14} + \omega_2\omega_3 + \omega_4\omega_{13} = 0; \end{aligned} \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} 1 - \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2 + \theta_5^2 - \theta_6^2 - \theta_7^2 - \theta_8^2 - \theta_9^2 + \theta_{10}^2 + \theta_{11}^2 + \\ + \theta_{12}^2 + \theta_{13}^2 - \theta_{14}^2 - \theta_{15}^2 - \theta_{16}^2 = 0, \\ -\theta_7\theta_8 - \theta_{11}\theta_{12} + \theta_2\theta_{13} - \theta_3\theta_4 + \theta_{14}\theta_{16} - \theta_5\theta_{10} - \theta_6\theta_9 + \theta_1\theta_{15} = 0, \\ -\theta_{14}\theta_{15} + \theta_2\theta_4 + \theta_{10}\theta_{12} + \theta_{13}\theta_3 - \theta_9\theta_7 - \theta_5\theta_{11} + \theta_6\theta_8 + \theta_{16}\theta_1 = 0, \\ \theta_5\theta_8 + \theta_{16}\theta_2 + \theta_{14}\theta_{13} - \theta_3\theta_{15} + \theta_4\theta_1 - \theta_6\theta_{11} - \theta_9\theta_{12} + \theta_{10}\theta_7 = 0, \\ \theta_1\theta_8 - \theta_{10}\theta_3 - \theta_9\theta_{14} - \theta_6\theta_{16} + \theta_5\theta_4 + \theta_{15}\theta_7 + \theta_{13}\theta_{12} + \theta_2\theta_{11} = 0, \\ \theta_1\theta_{12} - \theta_2\theta_7 + \theta_{10}\theta_{16} + \theta_9\theta_4 + \theta_6\theta_3 - \theta_5\theta_{14} - \theta_{15}\theta_{11} + \theta_8\theta_{13} = 0; \end{aligned} \quad (32б)$$

$$\begin{aligned} 1 - \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 - \Lambda_3^2 - \Lambda_4^2 + \Lambda_5^2 - \Lambda_6^2 + \Lambda_7^2 + \Lambda_8^2 - \Lambda_9^2 + \Lambda_{10}^2 - \Lambda_{11}^2 - \Lambda_{12}^2 + \\ + \Lambda_{13}^2 + \Lambda_{14}^2 - \Lambda_{15}^2 + \Lambda_{16}^2 = 0, \\ \Lambda_7\Lambda_8 - \Lambda_{14}\Lambda_{16} + \Lambda_3\Lambda_4 + \Lambda_6\Lambda_9 + \Lambda_5\Lambda_{10} - \Lambda_2\Lambda_{13} + \Lambda_{11}\Lambda_{12} - \Lambda_1\Lambda_{15} = 0, \\ -\Lambda_{10}\Lambda_{16} - \Lambda_9\Lambda_4 - \Lambda_6\Lambda_3 + \Lambda_{15}\Lambda_4 + \Lambda_{11}\Lambda_{15} - \Lambda_{13}\Lambda_8 + \Lambda_2\Lambda_7 - \Lambda_1\Lambda_{12} = 0, \\ \Lambda_{10}\Lambda_3 + \Lambda_9\Lambda_{14} + \Lambda_6\Lambda_{16} - \Lambda_5\Lambda_4 - \Lambda_7\Lambda_{15} - \Lambda_{13}\Lambda_{12} - \Lambda_2\Lambda_{11} - \Lambda_1\Lambda_8 = 0, \\ -\Lambda_6\Lambda_8 + \Lambda_{14}\Lambda_{15} - \Lambda_{10}\Lambda_{12} - \Lambda_3\Lambda_{13} + \Lambda_5\Lambda_{11} - \Lambda_{16}\Lambda_1 - \Lambda_4\Lambda_2 + \Lambda_9\Lambda_7 = 0, \\ \Lambda_9\Lambda_{12} - \Lambda_{10}\Lambda_7 + \Lambda_6\Lambda_{11} - \Lambda_5\Lambda_8 - \Lambda_{16}\Lambda_2 - \Lambda_{14}\Lambda_{13} + \Lambda_3\Lambda_{15} - \Lambda_4\Lambda_1 = 0; \end{aligned} \quad (32в)$$

$$\begin{aligned} 1 - \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2 + \Omega_5^2 - \Omega_6^2 - \Omega_7^2 - \Omega_8^2 - \Omega_9^2 + \Omega_{10}^2 + \Omega_{11}^2 + \Omega_{12}^2 + \\ + \Omega_{13}^2 - \Omega_{14}^2 - \Omega_{15}^2 - \Omega_{16}^2 = 0, \\ \Omega_{11}\Omega_{12} + \Omega_7\Omega_8 - \Omega_{14}\Omega_{16} + \Omega_5\Omega_{10} + \Omega_9\Omega_6 + \Omega_3\Omega_4 - \Omega_2\Omega_{13} - \Omega_1\Omega_{15} = 0, \\ \Omega_6\Omega_7 - \Omega_{10}\Omega_{11} - \Omega_3\Omega_2 + \Omega_9\Omega_8 + \Omega_{13}\Omega_4 - \Omega_5\Omega_{12} + \Omega_{16}\Omega_{15} + \Omega_1\Omega_{14} = 0, \\ \Omega_6\Omega_{12} - \Omega_{13}\Omega_{16} - \Omega_{15}\Omega_4 - \Omega_1\Omega_3 + \Omega_8\Omega_{10} - \Omega_9\Omega_{11} + \Omega_2\Omega_{14} - \Omega_5\Omega_7 = 0, \\ -\Omega_{10}\Omega_4 + \Omega_6\Omega_{14} - \Omega_9\Omega_{16} - \Omega_1\Omega_7 + \Omega_2\Omega_{12} - \Omega_5\Omega_3 + \Omega_8\Omega_{15} - \Omega_{11}\Omega_{13} = 0, \\ \Omega_{14}\Omega_{10} + \Omega_9\Omega_3 - \Omega_6\Omega_4 - \Omega_{12}\Omega_{15} - \Omega_1\Omega_{11} - \Omega_2\Omega_8 - \Omega_7\Omega_{13} + \Omega_5\Omega_{16} = 0. \end{aligned} \quad (32г)$$

В результате получаем 40-параметрическую группу матричных преобразований, задаваемую 64 базисными операторами (24)–(27), на параметры которых (28) накладывается 24 условия (32).

Для того чтобы выделить из указанных преобразований те, которые представимы в форме Ли, надо записать соотношения (29) для бесконечно малых преобразований. В результате получим условия

$$(\omega_N J^N)^+ \eta = -\omega_N \eta J^N, (\theta_N L^N)^+ \eta = -\theta_N \eta L^N, \quad (33)$$

$$(\Lambda_N K^N)^+ \eta = \Lambda_N \eta K^N, (\Omega_N I^N)^+ \eta = \Omega_N \eta I^N, \quad (34)$$

в которых базисные операторы J^N, L^N, K^N, I^N выступают в качестве генераторов. Непосредственная проверка показывает, что условия (33), (34) выполняются для 36 однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами

$$\begin{aligned} J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{13}, J^{14}, L^2, L^3, L^5, L^6, \\ L^7, L^9, L^{10}, L^{11}, L^{13}, L^{14}, K^2, K^3, K^5, K^6, K^7, K^9, K^{10}, K^{11}, \\ K^{13}, K^{14}, I^1, I^4, I^8, I^{12}, I^{15}, I^{16}, \end{aligned} \quad (35)$$

которым соответствуют 20 вещественных ($\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{13}, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_{10}, \Lambda_{11}, \Lambda_{13}, \Omega_4, \Omega_{12}$) и 16 мнимых ($\omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{14}, \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{14}, \Lambda_6, \Lambda_7, \Lambda_9, \Lambda_{14}, \Omega_1, \Omega_8, \Omega_{15}, \Omega_{16}$) параметров. Указанные преобразования образуют группу Ли, изоморфную группе $SO(5,4)$.

При переходе в пространство размерности 3+1 из рассматриваемых преобразований надо исключить те, что связаны с базисными операторами L^N, K^N . Тогда получим 20-параметрическую группу матричных преобразований внутренней симметрии системы двух безмассовых уравнений Дирака, определяемую базисными операторами (24), (27) при наложении на соответствующие параметры 12 условий. Преобразования, представимые в форме Ли, задаются 16 генераторами:

$$J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{13}, J^{14}, I^1, I^4, I^8, I^{12}, I^{15}, I^{16}. \quad (36)$$

При этом генератор I^1 коммутирует со всеми остальными в наборе (36), которые образуют 15-параметрическую унитарную группу с 8 вещественными ($\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \Omega_4, \Omega_{12}$) и 7 мнимыми ($\omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{14}, \Omega_8, \Omega_{15}, \Omega_{16}$) параметрами, изоморфную группе $SO(4,2)$.

Полную группу внутренней симметрии лагранжиана системы двух уравнений Дирака с $m \neq 0$ в пространстве 2+1 можно получить из вышеустановленной 40-параметрической группы симметрии для безмассовых уравнений путем исключения преобразований, связанных с генераторами K^N, I^N , которые антикоммутируют с матрицами Γ_μ . В результате получим 20-параметрическую группу преобразований, представимых в форме Ли и задаваемых генераторами

$$J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{13}, J^{14}, L^2, L^3, L^5, L^6, L^7, L^9, L^{10}, L^{11}, L^{13}, L^{14} \quad (37)$$

с 12 вещественными ($\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{13}$) и 8 мнимыми ($\omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{14}, \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{14}$) параметрами.

Заключение

Итак, наиболее полная группа матричных преобразований внутренней симметрии системы двух безмассовых уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1 содержит 40 независимых параметров. При этом непрерывные преобразования, представимые в форме Ли, описываются 36-параметрической группой, изоморфной группе $SO(5,4)$. Симметрия системы двух уравнений Дирака с $m \neq 0$ описывается 20-параметрической группой. Установленные симметрии значительно шире $U(4)$ –

$U(2) \times U(2)$ -симметрий, которые обычно сопоставляются указанным системам уравнений в работах других авторов на данную тему [5 – 7].

Полученные результаты являются новыми и могут оказаться полезными при описании методами релятивистской квантовой механики свойств графена, таких, например, как парадокс Клейна, квантовый эффект Холла и других эффектов, характерных для двумерного электронного газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В.А. Внутренняя симметрия уравнения Дирака в пространстве $2+1$ / В.А. Плетюхов // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2011. – № 1. – С. 30–34.
2. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака в графене / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2. – С. 11–14.
3. Плетюхов, В.А. Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ, сер. 1. 2009. № 2. С. 3–7.
4. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии дираковских полей (ч. 1) / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2010. – № 1. – С. 5–10.
5. Gorbar, E.V. Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems / E.V. Gorbar [et al.] // arXiv: cond-mat/0202422v3 26 Aug 2002.
6. Gusynin, V.P. AC Conductivity of grapheme: from tight-binding model to $2+1$ -dimensional quantum electrodynamics / V.P. Gusynin, S.G. Sharapov, J.P. Carbotte // arXiv: 0706.3016v2 [cond-mat. mess-hall] 27 Nov 2007.
7. Bashir, A. Fermions in odd space-time dimensions: back to basics / A. Bashir, Ma. De J.A. Galicia // arXiv: hep-ph/0502089v1 9 Feb 2005.

P.P. Andrusevich, V.I. Strazhev. Internal Symmetry of Two Dirac Equations in the Space of Dimension $2+1$

In the present paper we continue our investigation of the internal symmetry of the Dirac fields in $2+1$ dimensional space. In the framework of the real description, a system of two Dirac equations for cases of masses $m=0$ and $m \neq 0$ is considered. It is shown that the most complete group of the internal symmetry of such a system contains forty and twenty independent parameters for $m=0$ and $m \neq 0$, respectively. These symmetries are more complete than ones usually discussed in the literature.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 30.09.2011 г.