

УДК 517.5

И.В. Кальчук, Р.А. Маковий, А.О. Задорожный, И.П. Приймас**4-ГАРМОНИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА
КАК РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ**

В работе рассматривается задача Дирихле для 4-гармонического уравнения $\Delta^4 u = 0$. Решение этой задачи будем называть 4-гармоническим интегралом Пуассона, который является определенным интерес в теории приближения функций. Также найдено разложение ядра 4-гармонического интеграла Пуассона в ряд Фурье.

Пусть задана функция $u = u(z) = u(re^{i\varphi})$, $0 \leq r < 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Через $K^r : K_0^r \subset R^n$ обозначим обобщенный шар с радиусом r и центром в начале координат, S^r – граница шара, Ω – внутренность шара.

Для m -гармонического оператора $\Delta^m := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right)^m$ рассмотрим задачу Дирихле: найти решение уравнения

$$\Delta^m u = 0 \quad (1)$$

в области Ω при заданных граничных условиях

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial n^k} \right|_{S^r} = g_k, \quad (k = 0, 1, \dots, m-1), \quad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – нормальная производная на границе шара.

Известно [1], если выполняется условие $g_k \in C^{m-1-k}(S^r)$, то решение $u(x)$ этой задачи Дирихле для $x \in \Omega$ представляется в виде формулы:

$$u(x) = \frac{(-1)^{m-1} (r^2 - |x|^2)^m}{(m-1)! \omega_n r^{n-1}} \int_{S^r} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \left[\frac{\partial^{m-1-k}}{\partial (r^2)^{m-1-k}} \cdot \frac{r^{n-2}}{|x-y|^n} \right] g_k(y) dO_n(y). \quad (3)$$

Положив в формуле (3) $m = 4$, $n = 2$, получим

$$u(x) = \frac{(-1)^3 (r^2 - |x|^2)^4}{3! \omega_2 r} \left[\int_{S^r} \frac{\partial^3}{\partial (r^2)^3} \left(\frac{1}{|x-y|^2} \right) g_0(y) ds + 3 \int_{S^r} \frac{\partial^2}{\partial (r^2)^2} \left(\frac{1}{|x-y|^2} \right) g_1(y) ds + \right. \\ \left. + 3 \int_{S^r} \frac{\partial}{\partial (r^2)} \left(\frac{1}{|x-y|^2} \right) g_2(y) ds + \int_{S^r} \frac{1}{|x-y|^2} g_3(y) ds \right].$$

Учитывая, что $\omega_2 = 2\pi r$, $x = |x|e^{i\varphi}$, $y = re^{it}$, $ds = rdt$, из предыдущей формулы имеем

$$u(|x|e^{i\varphi}) = -\frac{(r^2 - |x|^2)^4}{3! \cdot 2\pi r \cdot r} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial^3}{\partial (r^2)^3} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) g_0(re^{it}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +3 \frac{\partial^2}{\partial (r^2)^2} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) g_1(re^{it}) + \\
& +3 \frac{\partial}{\partial (r^2)} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) g_2(re^{it}) + \\
& + \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) g_3(re^{it}) \Big] r dt. \quad (4)
\end{aligned}$$

Найдем соответствующие производные из последнего равенства. Поскольку $\frac{\partial}{\partial r^2}(r) = \frac{1}{2r}$, $\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{2r^3}$, $\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{1}{r^4}$ и $\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{2} \frac{1}{r^5}$, то

$$\frac{\partial}{\partial (r^2)} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) = -\frac{-\frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 1}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^2}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial (r^2)^2} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial (r^2)} \left(-\frac{-\frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 1}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^2} \right) = \\
&= \frac{|x| \frac{\partial}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \right) \cos(\varphi - t) \cdot (|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3} + \\
&+ \frac{\left(-\frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 1 \right) \cdot 2 \left(-2|x| \frac{\partial}{\partial r^2}(r) \cos(\varphi - t) + 1 \right)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3} = \\
&= \frac{-\frac{|x|}{2r^3} \cos(\varphi - t) \cdot (|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2) + 2 \left(-\frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 1 \right) \cdot \left(-\frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 1 \right)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{4 - 9 \frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 6 \frac{|x|^2}{r^2} \cos^2(\varphi - t) - \frac{|x|^3}{r^3} \cos^3(\varphi - t)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3}, \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial (r^2)^3} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^2} \left(\frac{4 - 9 \frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 6 \frac{|x|^2}{r^2} \cos^2(\varphi - t) - \frac{|x|^3}{r^3} \cos^3(\varphi - t)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3} \right) = \\
&= \frac{-9|x| \frac{\partial}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \right) \cos(\varphi - t) + 6|x|^2 \frac{\partial}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2} \right) \cos^2(\varphi - t) - |x|^3 \frac{\partial}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^3} \right) \cos^3(\varphi - t)}{2(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3} - \\
&= \frac{\frac{3}{2} \left(4 - 9 \frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 6 \frac{|x|^2}{r^2} \cos^2(\varphi - t) - \frac{|x|^3}{r^3} \cos^3(\varphi - t) \right) \left(-2|x| \frac{\partial}{\partial r^2} (r) \cos(\varphi - t) + 1 \right)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^4} = \\
&= \frac{\frac{9}{2} \frac{|x|}{r^3} \cos(\varphi - t) - 6 \frac{|x|^2}{r^4} \cos^2(\varphi - t) + \frac{3}{2} \frac{|x|^3}{r^5} \cos^3(\varphi - t)}{2(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3} - \\
&= \frac{-\frac{3}{2} \left(4 - 9 \frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 6 \frac{|x|^2}{r^2} \cos^2(\varphi - t) - \frac{|x|^3}{r^3} \cos^3(\varphi - t) \right) \left(-\frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 1 \right)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^4} = \\
&= -\frac{3}{4} \left(\frac{8 - 29 \frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 40 \frac{|x|^2}{r^2} \cos^2(\varphi - t) - 6 \frac{|x|^3}{r^3} \cos^3(\varphi - t) - 20 \frac{|x|^3}{r^3} \cos^3(\varphi - t)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^4} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{8 \frac{|x|^4}{r^4} \cos^2(\varphi - t) - \frac{|x|^5}{r^5} \cos(\varphi - t)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^4} \right). \tag{7}
\end{aligned}$$

Подставляя найденные производные (5)–(7) в (4) и положив $r = 1$, $|x| = r$, получим решение задачи Дирихле для 4-гармонического уравнения $\Delta^4 u = 0$ в единичном круге при заданных граничных условиях $u|_{r=1} = g_0$, $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=1} = g_1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}|_{r=1} = g_2$, $\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}|_{r=1} = g_3$:

$$\begin{aligned}
u(re^{i\varphi}) &= \frac{(1-r^2)^4}{16\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[8 - 29r \cos(\varphi - t) + 40r^2 \cos^2(\varphi - t) - 6r^3 \cos^3(\varphi - t) - 20r^3 \cos^3(\varphi - t) + \right. \\
&\quad \left. + 8r^4 \cos^2(\varphi - t) - r^5 \cos(\varphi - t) \right] \frac{g_0(e^{it}) dt}{(r^2 - 2r \cos(\varphi - t) + 1)^4} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(1-r^2)^4}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4-9r\cos(\varphi-t)+6r^2\cos^2(\varphi-t)-r^3\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^3} g_1(e^{it}) dt + \\
& + \frac{(1-r^2)^4}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^2} g_2(e^{it}) dt - \frac{(1-r^2)^4}{12\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g_3(e^{it})}{r^2-2r\cos(\varphi-t)+1} dt.
\end{aligned}
\tag{8}$$

Замечание. Следует отметить, что если в формуле (3) положить $n=2$, то при $m=1$ получим гармонический интеграл Пуассона [2–10]), при $m=2$ – бигармонический интеграл Пуассона [11–16], и если $m=3$ – тригармонический интеграл Пуассона [17].

Поэтому величину

$$\begin{aligned}
P_4(r, \varphi) = & \frac{(1-r^2)^4}{16\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [8-29r\cos(\varphi-t)+40r^2\cos^2(\varphi-t)-6r^3\cos(\varphi-t)-20r^3\cos^3(\varphi-t)+ \\
& + 8r^4\cos^2(\varphi-t)-r^5\cos(\varphi-t)] \frac{g_0(e^{it}) dt}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^4},
\end{aligned}
\tag{9}$$

аналогично вышеупомянутому замечанию, будем называть 4-гармоническим интегралом Пуассона.

Пусть, далее, $g_0(e^{it}) = f(t)$. В результате замены переменной в (9) будем иметь:

$$\begin{aligned}
P_4(r, f, x) = & \frac{(1-r^2)^4}{16\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) [8-29r\cos t + 40r^2\cos^2 t - 6r^3\cos t - 20r^3\cos^3 t + \\
& + 8r^4\cos^2 t - r^5\cos t] \frac{dt}{(r^2-2r\cos t+1)^4}
\end{aligned}$$

или

$$P_4(r, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_4(r, t) dt,$$

где $K_4(r, t)$ – ядро 4-гармонического интеграла Пуассона, имеющее вид

$$K_4(r, t) = \frac{(1-r^2)^4}{16} \frac{8-29r\cos t + 40r^2\cos^2 t - 6r^3\cos t - 20r^3\cos^3 t + 8r^4\cos^2 t - r^5\cos t}{(1-2r\cos t+r^2)^4}. \tag{10}$$

Для ядра $K_4(r, t)$ справедливо представление:

$$K_4(r, t) = \frac{(1-r^2)^2}{4} \left(\frac{5(1-r^2)}{8} p(r, t) + \frac{5-11r^2}{8} p^2(r, t) + \frac{1-2r^2}{2} p^3(r, t) + \frac{1-r^2}{4} p^4(r, t) \right), \tag{11}$$

где

$$p(r, t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}. \tag{12}$$

Действительно,

$$8-29r\cos t + 40r^2\cos^2 t - 6r^3\cos t - 20r^3\cos^3 t + 8r^4\cos^2 t - r^5\cos t =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{2} (1 + 3r^2 + 3r^4 + r^6 - 6r \cos t - 12r^3 \cos t - 6r^5 \cos t + 12r^2 \cos^2 t + 12r^4 \cos^2 t - 8r^3 \cos^3 t) + \\
&+ \frac{1}{2} (11 - 15r^2 - 15r^4 - 5r^6 - 28r \cos t - 48r^3 \cos t + 28r^5 \cos t + 20r^2 \cos^2 t - 44r^4 \cos^2 t) = \\
&= \frac{5}{2} (1 - 2r \cos t + r^2)^3 + \frac{1}{2} ((5 - 11r^2)(1 + 2r^2 + r^4 - 4r \cos t - 4r^3 \cos t + 4r^2 \cos^2 t) + \\
&\quad + 2(3 - 7r^2 + r^4 + 3r^6 - 4r \cos t + 12r^3 \cos t - 8r^5 \cos t)) = \frac{5}{2} (1 - 2r \cos t + r^2)^3 + \\
&+ \frac{1}{2} (5 - 11r^2)(1 - 2r \cos t + r^2)^2 + 2(1 - 3r^2 + 2r^4)(1 - 2r \cos t + r^2) + (1 - r^2)^3. \quad (13)
\end{aligned}$$

Подставляя (13) в (10), будем иметь

$$\begin{aligned}
K_4(r, t) &= \frac{(1-r^2)^4}{16} \left(\frac{5}{2(1-2r \cos t + r^2)} + \frac{5-11r^2}{2(1-2r \cos t + r^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(1-r^2)(1-2r^2)}{(1-2r \cos t + r^2)^3} + \frac{(1-r^2)^3}{(1-2r \cos t + r^2)^4} \right) = \\
&= \frac{(1-r^2)^2}{4} \left(\frac{5(1-r^2)}{8} \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} + \frac{5-11r^2}{8} \frac{(1-r^2)^2}{(1-2r \cos t + r^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-2r^2}{2} \frac{(1-r^2)^3}{(1-2r \cos t + r^2)^3} + \frac{1-r^2}{4} \frac{(1-r^2)^4}{(1-2r \cos t + r^2)^4} \right).
\end{aligned}$$

Откуда учитывая (12), получим формулу (11).

Разложив в ряд Фурье величины $p(r, t)$, $p^2(r, t)$, $p^3(r, t)$, $p^4(r, t)$, можно получить ряд Фурье для ядра $K_4(r, t)$.

Для нахождения коэффициентов a_k воспользуемся формулой (3.616.7) из [18]:

$$\int_0^\pi \frac{\cos kt}{(1-2r \cos t + r^2)^m} dt = \frac{r^{2m+k-2} \pi}{(1-r^2)^{2m-1}} \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m+k-1}{n} \binom{2m-n-2}{m-1} \left(\frac{1-r^2}{r^2} \right)^n, \quad [r^2 < 1].$$

Поскольку $p(r, t) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2}$, $p^2(r, t)$, $p^3(r, t)$, $p^4(r, t)$ – четные функции относительно t , то $b_k = 0$ для $\forall k \in N$.

Тогда

$$S[p(r, t)] = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt,$$

$$S[p^2(r, t)] = \frac{1+r^2}{1-r^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} + k \right) r^k \cos kt,$$

$$S[p^3(r, t)] = \frac{1 + 4r^2 + r^4}{(1 - r^2)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2(1 + 4r^2 + r^4)}{(1 - r^2)^2} + \frac{3 + 3r^2}{1 - r^2} k + k^2 \right] r^k \cos kt,$$

$$S[p^4(r, t)] = \frac{1 + 9r^2 + 9r^4 + r^6}{(1 - r^2)^3} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2(1 + 9r^2 + 9r^4 + r^6)}{(1 - r^2)^3} + \frac{11 + 38r^2 + 11r^4}{3(1 - r^2)^2} k + \frac{2 + 2r^2}{1 - r^2} k^2 + \frac{k^3}{3} \right] r^k \cos kt.$$

Подставляя найденные разложения в (11), окончательно получим:

$$S[K_4(r, t)] = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(1 - r^2)(6 + 3(1 - r^2) + 2(1 - r^2)^2)}{12} k + \right.$$

$$\left. + \frac{(2 - r^2)(1 - r^2)^2}{8} k^2 + \frac{(1 - r^2)^3}{48} k^3 \right) r^k \cos kt -$$

ряд Фурье для ядра 4-гармонического интеграла Пуассона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gonzales, L. Über das Randverhalten des Poisson-Integrals der polyharmonischen Gleichung / L. Gonzales, E. Keller, G. Wildenhain // *Mathematische Nachrichten*. – 1980. – 95. – S. 157–164.
2. Натансон, В.П. О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / В.П. Натансон // *Докл. АН СССР*. – 1950. – 72, № 1 – С. 11–14.
3. Тимман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тиман // *Докл. АН СССР*. – 1950. – 74, № 1 – С. 17–20.
4. Штарк, Э.Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip 1$ от их сингулярного интеграла Абеля-Пуассона / Э.Л. Штарк // *Мат. заметки*. – 1973. – 13, № 1. – С. 21–28.
5. Фалалеев, Л.П. О приближении функций обобщенными операторами Абеля-Пуассона / Л.П. Фалалеев // *Сибирский матем. журнал*. – 2001. – 42, № 4. – С. 926–936.
6. Zhyhallo, K.M. Complete Asymptotics of the Deviation of a Class of Differentiable Functions from the Set of Their Harmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // *Ukr. Math. Journal*. – 2002. – 54, № 1. – P. 51–63.
7. Kharkevych, Yu.I. Approximation of (ψ, β) -differentiable Functions Defined on the Real Axis by Abel-Poisson Operators / Yu.I. Kharkevych, T.V. Zhyhallo // *Ukr. Math. Journal*. – 2005. – 57, № 8. – P. 1297–1315.
8. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // *Ukr. Math. Journal*. – 2009. – 61, № 1. – P. 86–98.
9. Zhyhallo, T.V. Approximation of (ψ, β) -differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric / T.V. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // *Ukr. Math. Journal*. – 2009. – 61, № 11. – P. 1757–1779.

10. Zhyhallo, T.V. Approximation of functions from the class C_{ψ}^{β} by Poisson integrals in the uniform metric / T.V. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, № 12. – P. 1893–1914.
11. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Докл. АН СССР. – 1963. – 153, № 5. – С. 995–998.
12. Фалалеев, Л.П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонений функций из Lip_1 от одного сингулярного интеграла / Л.П. Фалалеев // Теоремы вложения и их приложения (Материалы всесоюз. симп.). – Алма-Ата : Наука КазССР, 1976. – С. 163–167.
13. Zhyhallo, K.M. Approximation of Differentiable Periodic Functions by Their Biharmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, 9. – P. 1462–1470.
14. Kharkevych, Yu.I. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals / Yu.I. Kharkevych, I.V. Kal'chuk // Ukr. Math. Journal. – 2007. – 59, № 8. – P. 1224–1237.
15. Kharkevych, Yu.I. Approximation of functions from the class by Poisson biharmonic operators in the uniform metric / Yu.I. Kharkevych, T.V. Zhyhallo // Ukr. Math. Journal. – 2008. – 60, № 5. – P. 769–798.
16. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, № 3. – P. 399–413.
17. Zhyhallo, K.M. On the Approximation of Functions of the Hölder Class by Triharmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2001. – 53, № 6. – P. 1012–1018.
18. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик – М. : Физматиз, 1963. – 1100 с.

I.V. Kalchuk, R.O. Makovij, A.O. Zadorozhnyi, I.P. Priymas. 4-harmonic Poisson Integral as the Solution of Boundary-Value Problem

In the work we consider the Dirichlet problem for 4-harmonic equation $\Delta^4 u = 0$. We will call the solution of this problem 4-harmonic Poisson Integral, which is of certain interest in the theory of approximation of function. The decomposition of the core of 4-harmonic Poisson Integral in Fourier series was found.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 10.05.2011 г.