

УДК 512.542

Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, М.В. Селькин

О ВЛИЯНИИ ИНДЕКСОВ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП НА ИХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

В работе исследуются пересечения $\mathfrak{Z}$ -абнормальных максимальных подгрупп с ограничениями на их индексы, выделяемые подгрупповым функтором.

Введение

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Одно из классических направлений в исследовании конечных групп связано с исследованием свойств пересечений заданных максимальных подгрупп и влиянием этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы. Важную роль здесь занимает подгруппа Фраттини, введенная в работе [1]. Теорема Фраттини получила развитие в работах многих авторов: В. Гашюца [2] (пересечение $\Delta(G)$ всех ненормальных максимальных подгрупп группы G), В. Дескинса [3] (пересечение $\Phi_p(G)$ всех максимальных подгрупп группы G , индексы которых не делятся на p) и других [4; 5].

Развитие теории пересечений в 1960-х годах в значительной степени стимулировалось результатами, связанными с теорией формаций. Применение идей и методов теории формаций позволило систематизировать накопившийся богатый фактический материал о максимальных подгруппах. Этому способствовало введенное в работах Р. Картера, Т. Хоукса [6] и Л.А. Шеметкова [7] понятие $\mathfrak{Z}$ -абнормальной максимальной подгруппы.

Данная работа посвящена развитию указанных направлений в группах с операторами.

1. Определения и обозначения

Подгруппа H группы G называется:

1) пронормальной, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$;

2) абнормальной, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G .

Класс групп называют нормально наследственным (S_n -замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G .

Класс групп $\mathfrak{Z}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{Z}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{Z}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{Z}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{Z}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{Z}$.

Отображение f класса G всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ – формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^\varphi) \cap f(\text{Ker} \varphi)$ для любого гомоморфизма φ группы G ;

3) $f(1) = G$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p -группах и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы G .

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$ -нормальной ($\mathfrak{F}$ -абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (не содержится) в M .

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Пусть даны группа G , множество A и отображение $f: A \mapsto \text{End}(G)$, где $\text{End}(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G . Подгруппа M называется A -допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A , т. е. $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A -допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Phi(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных A -допустимых подгрупп. Если таких подгрупп в группе G нет, то положим $\Phi(G, A) = G$.

Заметим, что максимальная A -допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно, так как произведение A -допустимых подгрупп A -допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A -допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и группа G имеет группу операторов A . Через $D^{\mathfrak{F}}(G, A)$ обозначим пересечение ядер всех максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G . Если в группе G все максимальные A -допустимые подгруппы содержат $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , то, положим, $D^{\mathfrak{F}}(G, A) = G$.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией всех нильпотентных групп, то подгруппу $D^{\mathfrak{F}}(G, A)$ будем обозначать $D^{\mathfrak{N}}(G, A)$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ – непустая формация и группа G имеет группу операторов A . Через $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ обозначим пересечение ядер всех $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , индексы которых не делятся на простые числа из π . Если в G таких подгрупп нет, то положим $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) = G$.

Отметим, если $A = 1$, то подгруппы $D^{\mathfrak{F}}(G, A)$ и $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ совпадают соответственно с подгруппами $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$, равной пересечению всех $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных подгрупп группы G и $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных подгрупп группы G , индексы которых не делятся на простые числа из π , строение

которых рассматривалось в [5].

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A -допустимой относительно некоторой группы операторов A , а так же не всякая максимальная A -допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе.

Пример 2.1. Пусть Q – группа кватернионов 8-го порядка. Рассмотрим $G = [Q]Z_3$, Z_3 – группа операторов для Q . В группе Q подгруппа K порядка 2 является максимальной допустимой относительно группы операторов Z_3 , но не является максимальной подгруппой группы Q .

Пример 2.2. Рассмотрим группу

$$G^* = \langle a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^3 = 1, bc = cb, b^a = c \rangle.$$

Тогда $G^* = [G]A$, где $G = \langle b \rangle \times \langle c \rangle$ и $A = \langle a \rangle$ – группа операторов группы G . Простая проверка показывает, что в группе G есть максимальная A -допустимая подгруппа $H = \langle bc \rangle$ порядка 3, но не все подгруппы порядка 3, например, b , являются A -допустимыми. Отмеченный класс групп становится достаточно широким, если образовать группу $R = G^* \times Q$, где Q – сверхразрешимая группа и $(|G|, |Q|) = 1$.

3. Вспомогательные результаты

Лемма 3.1. [С. 24, 8]. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда в группе G существует A -допустимая силовская p -подгруппа, для любого простого числа $p \in \pi(G)$ и все такие подгруппы сопряжены между собой в G .

Теорема 3.2. [С. 96, 4] Для любой группы G и любой ступенчатой формации $\mathfrak{F}$ имеет место равенство $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) / \Phi(G) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi(G))$.

Лемма 3.3. [С. 96, 4] Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация. Тогда каждая $\mathfrak{F}$ -гиперцентральная нормальная подгруппа любой группы принадлежит $\mathfrak{F}$.

Лемма 3.4. [С. 86, 8] Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда подгруппа $\Phi(G, A)$ нильпотентна.

Лемма 3.5. Если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq \Phi_{\pi}(G, A)$, то

$$\Phi_{\pi}(G / N, A) = \Phi_{\pi}(G, A) / N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq \Phi_{\pi}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая максимальная A -допустимая подгруппа из G с индексом, не делящимся на простые числа из π . Тогда

$$\Phi_{\pi}(G / N, A) = \cap (M / N)_{G/N},$$

где M / N пробегает множество всех максимальных A -допустимых подгрупп из G / N с индексом, не делящимся на простые числа из π .

Продолжим равенство

$$\cap (M / N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = \Phi_{\pi}(G, A) / N.$$

Из приведенных равенств вытекает утверждение леммы.

Лемма 3.6. Пусть группа G имеет группу операторов A , $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G / N, A) = D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq D_\pi^\mathfrak{Z}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая максимальная A -допустимая подгруппа из G , не содержащая $\mathfrak{Z}$ -корадикал, с индексом, не делящимся на простые числа из π . Тогда

$$D_\pi^\mathfrak{Z}(G/N, A) = \cap (M/N)_{G/N},$$

где M/N пробегает множество всех максимальных A -допустимых подгрупп из G/N , не содержащих $\mathfrak{Z}$ -корадикал, с индексом, не делящимся на простые числа из π .

Продолжим равенство

$$\cap (M/N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = D_\pi^\mathfrak{Z}(G, A) / N.$$

Из приведенного вытекает справедливость утверждения.

Лемма 3.7. Пусть группа G имеет группу операторов A , $\mathfrak{Z}$ – ступенчатая формация, K – некоторая нормальная подгруппа группы G . Пусть каждая максимальная A -допустимая подгруппа группы G , не содержащая K , содержит $G^\mathfrak{Z}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $K \cap G^\mathfrak{Z} \subseteq \Phi(G, A)$;
- 2) $K / K \cap \Phi(G, A) \subseteq Z_\infty^\mathfrak{Z}(G / \Phi(G, A))$.

Доказательство. Очевидно, что пересечение $K \cap G^\mathfrak{Z}$ содержится во всех максимальных A -допустимых подгруппах, как содержащих $G^\mathfrak{Z}$, так и не содержащих $G^\mathfrak{Z}$, а следовательно, оно входит в $\Phi(G, A)$.

Пусть R/S – главный фактор группы G , причём $R \subseteq K, S \supseteq K \cap \Phi(G, A)$. Так как

$$R \cap G^\mathfrak{Z} \subseteq K \cap G^\mathfrak{Z} \subseteq S,$$

то имеем G -изоморфизм:

$$RG^\mathfrak{Z} / SG^\mathfrak{Z} R / (R \cap SG^\mathfrak{Z}) = R / S(R \cap G^\mathfrak{Z}) = R / S.$$

Так как $G / SG^\mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}$, то $RG^\mathfrak{Z} / SG^\mathfrak{Z}$ $\mathfrak{Z}$ -централен в $G / SG^\mathfrak{Z}$, а значит, и в G . Но тогда R/S $\mathfrak{Z}$ -централен в G . Лемма доказана.

4. Основной результат

В работе [8] Д. Горенштейн исследовал существование силовских A -допустимых подгрупп и установил, что если группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, тогда в ней существует A -допустимая силовская подгруппа и любые две из них сопряжены между собой в G .

Напомним, что группа G обладает свойством C_π , если в ней существует холловская π -подгруппа и любые две из них сопряжены между собой.

Теорема 4.1. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и подгруппа $\Phi_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π . Тогда

$$\Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Phi(G / O_\pi(G), A).$$

Доказательство. Очевидно, что $O_\pi(G) \subseteq \Phi_\pi(G, A)$. По лемме 3.1 в $\Phi_\pi(G, A)$ существует A -допустимая холловская π -подгруппа. Обозначим её через P . Тогда, по обобщенной лемме Фраттини,

$$G = \Phi_\pi(G, A) N_G(P)$$

Предположим, что $N_G(P)$ – собственная подгруппа группы G . Тогда в G найдётся максимальная A -допустимая подгруппа M , такая что $\Phi_\pi(G, A) \not\subseteq M$

и $N_G(P) \subseteq M$. Ясно, что индекс $N_G(P)$ в G не делится на числа из π . Следовательно, $\Phi_\pi(G, A) \subseteq M$. Получили противоречие. Значит, P – нормальная подгруппа группы G . Отсюда следует, что число $|\Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G)|$ не делится на числа из π . Очевидно, что

$$\Phi(G / O_\pi(G), A) \subseteq \Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G).$$

Если $\Phi(G / O_\pi(G), A) \subset \Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G)$, то в G найдётся максимальная A -допустимая подгруппа K такая, что $O_\pi(G) \subseteq K$ и $K\Phi_\pi(G, A) = G$. Следовательно,

$$|G : K| = |\Phi_\pi(G, A) : \Phi_\pi(G, A) \cap K|$$

не делится на числа из π . Отсюда получаем, что $\Phi_\pi(G, A) \subseteq K$, что противоречит определению K . Значит, $\Phi(G / O_\pi(G), A) = \Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G)$. Лемма доказана.

Применяя лемму 3.4, получаем

Следствие 4.1.1. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и подгруппа $\Phi_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π . Тогда факторгруппа $\Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G)$ нильпотентна.

По теореме Силова, в любой группе G подгруппа $\Phi_p(G, A)$ обладает свойством C_p , тогда при $\pi = \{p\}$ имеем следующий результат.

Следствие 4.1.2. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда $\Phi_p(G, A) / O_p(G) = \Phi(G / O_p(G), A)$ — нильпотентная факторгруппа.

Если группа операторов $A = 1$, то из теоремы 4.1 вытекает результат В. Дескинса [3].

Теорема 4.2. Пусть π и τ – различные множества простых чисел и $\pi \cap \tau = \emptyset$. Тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|, |A|) = 1$, справедливо равенство

$$\Phi_\pi(G, A) \cap \Phi_\tau(G, A) = \Phi(G, A).$$

Доказательство. Очевидно, $\Phi(G, A) \subseteq \Phi_\pi(G, A) \cap \Phi_\tau(G, A)$. Пусть $\Phi(G, A) \subset K = \Phi_\pi(G, A) \cap \Phi_\tau(G, A)$. Тогда в G найдётся максимальная A -допустимая подгруппа M такая, что $G = MK$. Если $|G : M|$ не делится на числа из $\omega = \pi \cup \tau$, то $\Phi_\omega(G, A) \subseteq M$. Следовательно, $KM = M$, что не возможно. Значит, индекс M в G делится одновременно на числа из $\pi \cup \tau$.

Пусть $O_\pi(G) = 1$. Тогда ввиду теоремы 4.1 имеем равенство $\Phi_\pi(G, A) = \Phi(G, A)$. Поэтому $K \subseteq M$, что противоречит определению подгруппы K . Значит, $O_\pi(G) \neq 1$. Если $O_\pi(G)M = G$, то $|G : M|$ делится на числа из π . Противоречие. Поэтому $O_\pi(G) \subseteq M$. На основании теоремы 4.1 имеем:

$$\Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Phi_\pi(G / O_\pi(G), A) \subseteq M / O_\pi(G).$$

Отсюда следует, что $\Phi_\pi(G, A) \subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Таким образом, остаётся заключить, что

$$\Phi_\pi(G, A) \cap \Phi_\tau(G, A) = \Phi(G, A).$$

Лемма доказана.

Следствие 4.2.1. Пусть π и τ – различные множества простых чисел и $\pi \cap \tau = \emptyset$. Тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|, |A|) = 1$, подгруппа $\Phi_\pi(G, A) \cap \Phi_\tau(G, A)$ нильпотентна.

Если $\pi = \{p\}$ и $\tau = \{q\}$, то имеем:

Следствие 4.2.2. Пусть p и q – различные простые числа. Тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|, |A|) = 1$ подгруппа $\Phi_p(G, A) \cap \Phi_q(G, A) = \Phi(G, A)$ нильпотентна.

В случае, когда группа операторов единична, получаем

Следствие 4.2.3. Пусть π и τ – различные множества простых чисел и $\pi \cap \tau = \emptyset$. Тогда для любой группы G справедливо

$$\Phi_\pi(G) \cap \Phi_\tau(G) = \Phi(G).$$

Теорема 4.3. Пусть группа G имеет группу операторов A , $\mathfrak{S}$ – ступенчатая формация. Тогда

$$D^{\mathfrak{S}}(G, A) / \Phi(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{S}}(G / \Phi(G, A)).$$

Доказательство. Так как подгруппа Фраттини фактор-группы $G / \Phi(G, A)$ единична, то, применяя теорему 3.2 и то, что $\Delta^{\mathfrak{S}}(G) \subseteq D^{\mathfrak{S}}(G, A)$, получаем

$$\begin{aligned} D^{\mathfrak{S}}(G, A) / \Phi(G, A) &\supseteq \Delta^{\mathfrak{S}}(G) \Phi(G, A) / \Phi(G, A) \supseteq \\ &\supseteq \Delta^{\mathfrak{S}}(G / \Phi(G, A)) = Z_{\infty}^{\mathfrak{S}}(G / \Phi(G, A)). \end{aligned}$$

Обратное включение выполняется ввиду леммы 3.7. Теорема доказана.

Согласно леммы 3.3 получаем следующее:

Следствие 4.3.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , $\mathfrak{S}$ – нормально наследственная локальная формация. Тогда $D^{\mathfrak{S}}(G, A) / \Phi(G, A) \in \mathfrak{S}$.

В случае единичности группы операторов A из теоремы 4.3 получаем соответствующий результат Л.А. Шеметкова [4].

Теорема 4.4. Пусть $\mathfrak{S}$ – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если в группе G подгруппа $\Phi_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π , то

$$D_\pi^{\mathfrak{S}}(G, A) / O_\pi(G) = D^{\mathfrak{S}}(G / O_\pi(G), A).$$

Доказательство. Пусть $O_\pi(G) \neq 1$. По теореме 4.1

$$\Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Phi(G / O_\pi(G), A),$$

то теорема для факторгруппы $G / O_\pi(G)$ верна по индукции. Следовательно,

$$D_\pi^{\mathfrak{S}}(G / O_\pi(G), A) / O_\pi(G / O_\pi(G)) = D^{\mathfrak{S}}(G / O_\pi(G) / O_\pi(G / O_\pi(G)), A).$$

Так как $O_\pi(G / O_\pi(G)) = 1$ и

$$D_\pi^{\mathfrak{S}}(G / O_\pi(G), A) = D_\pi^{\mathfrak{S}}(G, A) / O_\pi(G),$$

то

$$D_\pi^{\mathfrak{S}}(G, A) / O_\pi(G) = D^{\mathfrak{S}}(G / O_\pi(G), A).$$

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. Тогда, по теореме, 4.1 $\Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Phi(G / O_\pi(G), A)$. Значит,

$$D_\pi^{\mathfrak{S}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{S}} \subseteq \Phi_\pi(G, A) = \Phi(G, A).$$

Пусть K / N – главный фактор группы G , причём,

$$\Phi(G, A) \subseteq N \subseteq K \subseteq D_\pi^{\mathfrak{S}}(G, A).$$

Так как

$$K \cap G^{\mathfrak{S}} \subseteq D_\pi^{\mathfrak{S}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{S}} \subseteq \Phi(G, A),$$

то

$$N = N(K \cap G^{\mathfrak{S}}) = K \cap NG^{\mathfrak{S}}.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{Z}} / NG^{\mathfrak{Z}} K / K \cap NG^{\mathfrak{Z}} = K / N(K \cap G^{\mathfrak{Z}}) = K / N.$$

Но $G / NG^{\mathfrak{Z}} \in \mathfrak{Z}$, поэтому главный фактор $KG^{\mathfrak{Z}} / NG^{\mathfrak{Z}}$ является $\mathfrak{Z}$ -центральным в G . Следовательно, главный фактор K / N также является $\mathfrak{Z}$ -центральным в G . Таким образом, $D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A)$ – $\mathfrak{Z}$ -гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G / \Phi(G, A)$. Поэтому

$$D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{Z}}(G / \Phi(G, A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 4.3

$$D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A) \supseteq D^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{Z}}(G / \Phi(G, A)).$$

Значит,

$$D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{Z}}(G / \Phi(G, A)).$$

Следовательно,

$$D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A) = D^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A),$$

то есть $D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) = D^{\mathfrak{Z}}(G, A)$. Теорема доказана.

Из теоремы 4.4 с помощью следствия 4.3.1 получаем следующее:

Следствие 4.4.1. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{Z}$ – локальная нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, а подгруппа $\Phi(G, A)$ обладает свойством C_{π} , тогда $D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) / O_{\pi}(G) \in \mathfrak{Z}$.

В случае, когда $\mathfrak{Z}$ – формация всех нильпотентных групп, то из теоремы 4.4 получаем следующее

Следствие 4.4.2. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если подгруппа $\Phi(G, A)$ обладает свойством C_{π} , то $D_{\pi}^{\mathfrak{N}}(G, A) / O_{\pi}(G) \in \mathfrak{N}$.

Пусть $\pi = \{p\}$, где p – простое число, $D_p^{\mathfrak{Z}}(G, A)$ – пересечение ядер всех $\mathfrak{Z}$ -абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , индексы которых не делятся на данное простое число p .

Ввиду теоремы Силова и теоремы 4.4 справедливы следующие утверждения.

Следствие 4.4.3. Пусть $\mathfrak{Z}$ – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда

$$D_p^{\mathfrak{Z}}(G, A) / O_p(G) = D^{\mathfrak{Z}}(G / O_p(G), A).$$

Следствие 4.4.4. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{Z}$ – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда $D_p^{\mathfrak{Z}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{Z}$.

Следствие 4.4.5. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда $D_p^{\mathfrak{N}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{N}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frattini, G. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol.1. – P. 281–285.
2. Gaschütz, W. Über die Φ -Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.
3. Deskins, W.E. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins //

III.J. Math. – 1961. – Vol. 5. – № 2. – P. 306–313.

4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

5. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

6. Carter, R. The F -normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – V. 5. – № 2 – P. 175–202.

7. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т.94. – № 4. – С. 628–648.

8. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New York : Harper and Row, 1968. – 572 p.

9. Бородич, Р.В. О пересечениях подгрупп заданных индексов в конечных группах с операторами / Р.В. Бородич // Известия Гомельского государственного ун-та им. Ф. Скорины, 5(14). Вопросы алгебры 18. – 2002. – С. 85–87.

E.N. Borodich, R.V. Borodich, M.V. Selkin. About Influence of Indexes of the Maximal Subgroups on their Intersection

The intersections of $\mathfrak{F}$ -abnormal maximal subgroup, with crossings on their indexes singled out by subgroup functor are investigated in this work.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 06.06.2011 г.