

ВНУТРЕННЯЯ СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ПРОСТРАНСТВЕ 2+1

Исследованы внутренние симметрии массивного и безмассового уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1. Показано, что симметрия уравнения с $m \neq 0$ описывается группой $SO(3,1)$, которая содержит в качестве подгруппы зарядовую симметрию, присущую обычному уравнению Дирака. В безмассовом случае имеет место 12-параметрическая группа симметрии, которая, в частности, содержит в качестве подгруппы преобразования Паули-Гюрши.

Введение

В последние годы в связи с получением графена появилось множество публикаций, посвященных теоретическому описанию двумерных кристаллических структур [1]. Существенное место среди этих публикаций занимает исследование симметричных свойств дираковских полей в пространстве размерности 2+1.

В работах [2, 3] был развит подход, основанный на использовании вещественной матричной формы описания дираковских и дирак-кэлеровских полей в обычном 4-мерном пространстве 3+1. При этом было установлено наличие более широкой группы внутренней симметрии указанных полей, чем считалось ранее.

В настоящей работе данный подход применяется для исследования внутренних симметрий массивного и безмассового уравнений Дирака в пространстве 2+1.

Вещественная форма уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1

Уравнение Дирака в трехмерном пространстве-времени можно получить из обычного уравнения Дирака

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \quad (1)$$

исключив из него одно пространственное измерение, например, x_3 . В результате получим уравнение:

$$(\gamma_k \partial_k + m)\psi = 0 \quad (k = 0, 1, 2). \quad (2)$$

Будем использовать метрику, соответствующую выбору $x_0 = ict$. Матрицы Дирака возьмем в виде

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где σ – матрицы Паули.

Применяя к (2) операцию комплексного сопряжения и рассматривая сопряженное уравнение совместно с исходным, придем к 8-компонентной системе уравнений, эквивалентной исходному уравнению (2). Ее также можно записать в стандартной матричной форме

$$(\Gamma_k \partial_k + m)\Psi = 0, \quad (4)$$

где $\Psi = (\psi, \psi^*)$ – столбец и матрицы Γ_k имеют размерность 8x8. Если теперь перейти в базис, в котором

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^r \\ \psi^i \end{pmatrix}, \quad \psi^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^*), \quad \psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^*) \quad (5)$$

и матрицы Γ_k имеют вид

$$\Gamma_0 = \sigma_1 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \sigma_1 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_2 \otimes \gamma_2, \quad (6)$$

полученная система становится, как нетрудно проверить, вещественной. Уравнение (4) с волновой функцией (5) и матрицами (6) будем называть вещественной формой исходного

уравнения (2), (3) (подробный комментарий по поводу данной терминологии содержится в работе [2]). Указанную форму мы и будем использовать при установлении группы внутренней симметрии уравнения (2), (3).

Внутренняя симметрия массивного уравнения Дирака

Перейдем сначала в так называемый фермионный базис в котором диракоподобные матрицы Γ_k принимают вид

$$\Gamma_k = I_2 \otimes \gamma_k. \quad (7)$$

Данный переход осуществляется посредством унитарного преобразования [4]

$$A = \frac{1}{2} [I_2 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \quad (8)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} [I_2 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 + i\gamma_2)].$$

Преобразования внутренней симметрии уравнения (4), коммутирующие с матрицами Γ_k (7), задаются в этом базисе матрицами двух типов

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \quad (9)$$

$$Q_2 = q^{(2)} \otimes \gamma_4, \quad (10)$$

где

$$\gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2 \quad (11)$$

(множитель i в (11) обеспечивает эрмитовость γ_4), $q_{mn}^{(1)}$, $q_{mn}^{(2)}$ – произвольные комплексные матрицы 2×2 .

Возвращаясь с помощью обратного преобразования (8) в базис (5), для матриц Q_1 , Q_2 получим выражения:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \otimes I_4 + \begin{pmatrix} -\rho_1 & -\lambda_1 \\ \lambda_1 & \rho_1 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_2, \quad (12)$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \otimes I_4 + \begin{pmatrix} -\rho_2 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \rho_2 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_4\gamma_2, \quad (13)$$

где введены обозначения

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(q_{11}^{(1)} + q_{22}^{(1)}), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(q_{11}^{(1)} - q_{22}^{(1)}), \quad \beta_1 = \frac{1}{2}(q_{12}^{(1)} + q_{21}^{(1)}), \quad \rho_1 = \frac{1}{2}(q_{12}^{(1)} - q_{21}^{(1)}), \quad (14)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(q_{11}^{(2)} + q_{22}^{(2)}), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(q_{11}^{(2)} - q_{22}^{(2)}), \quad \beta_1 = \frac{1}{2}(q_{12}^{(2)} + q_{21}^{(2)}), \quad \rho_1 = \frac{1}{2}(q_{12}^{(2)} - q_{21}^{(2)}).$$

Накладывая на преобразования

$$\Psi' = Q_1 \Psi, \quad \Psi' = Q_2 \Psi \quad (15)$$

условие сохранения структуры (5) волновой функции Ψ (условие вещественности 8-компонентного поля), найдем следующие ограничения на элементы матриц Q_1 (12), Q_2 (13):

$$\alpha_1, \lambda_1, \beta_2, \rho_2 - \text{вещественные}, \quad (16)$$

$$\beta_1, \rho_1, \alpha_2, \lambda_2 - \text{чисто мнимые}.$$

Преобразования (12), (13) при выполнении условий (16) могут быть параметризованы посредством эрмитовских матриц, имеющих в базисе (5) вид:

$$J^1 = \sigma_1 \otimes I_4, \quad J^2 = -\sigma_3 \otimes \gamma_2, \quad J^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_2, \quad (17)$$

$$I^1 = \sigma_1 \otimes I_4, \quad I^2 = -\sigma_3 \otimes \gamma_4\gamma_2, \quad I^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_4\gamma_2, \quad I^4 = I_2 \otimes \gamma_4.$$

В фермионном базисе получим:

$$J^i = \sigma_i \otimes I_4, \quad I^i = \sigma_i \otimes \gamma_4, \quad I^4 = I_2 \otimes \gamma_4, \quad (18)$$

Сравнивая (17) с общими выражениями (12), (13) для матриц Q_1, Q_2 , находим для параметров $\omega_i, \Omega_i, \Omega_4$, соответствующих генераторам J^i, I^i, I^4 , значения ($\omega_1 \rightarrow J^i, \Omega_i \rightarrow I^i, \Omega_4 \rightarrow I^4$):

$$\begin{aligned} \omega_2 = i\rho_1, \quad \omega_3 = \lambda_1, \quad \Omega_2 = \rho_2, \quad \Omega_3 = -i\lambda_2, \quad \Omega_4 = -i\alpha_2 & - \text{ вещественные,} \\ \omega_1 = \beta_1, \quad \Omega_1 = -i\beta_2 & - \text{ мнимые.} \end{aligned} \quad (19)$$

Наложим теперь на генераторы (17) (или (18)) и параметры (19) условие

$$(\omega J)^+ \eta = -\omega \eta J \quad (20)$$

(η – матрица билинейной формы), вытекающее из требования

$$Q^+ \eta Q = \eta \quad (21)$$

инвариантности лагранжиана теории

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_k \partial_k + m)\Psi \quad (22)$$

относительно преобразований внутренней симметрии. При этом учтем, что матрица η в базисах (5) и фермионом имеет соответственно вид:

$$\eta = I_2 \otimes \gamma_0, \quad (23)$$

$$\eta = \sigma_1 \otimes \gamma_0. \quad (24)$$

В результате получим, что условию (20) удовлетворяют шесть генераторов J^i и I^i . Эти генераторы удовлетворяют алгебре

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} J^k, \\ [J^i, I^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} I^k, \\ [I^i, I^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} J^k \end{aligned} \quad (25)$$

и, следовательно, образуют 6-параметрическую группу. Генераторы J^i образуют в ней подгруппу $SO(2,1)$ типа зарядовой симметрии, присущую массивному уравнению Дирака в пространстве 3+1.

Симметрия безмассового поля

В безмассовом случае ($m = 0$) инвариантность уравнения

$$\Gamma_k \partial_k \Psi = 0, \quad (26)$$

наряду с преобразованиями Q_1, Q_2 , коммутирующими с матрицами Γ_k , может быть обеспечена также преобразованиями, антикоммутирующими с Γ_k :

$$[Q, \Gamma_k]_+ = 0. \quad (27)$$

Условию (27) удовлетворяют матрицы следующих двух типов (в фермионом базисе):

$$Q_3 = q^{(3)} \otimes \gamma_3, \quad (28)$$

$$Q_4 = q^{(4)} \otimes \gamma_5. \quad (29)$$

Здесь $q^{(3)} = q_{mn}^{(3)}$, $q^{(4)} = q_{mn}^{(4)}$ – произвольные комплексные матрицы 2x2; γ_3, γ_5 – матрицы Дирака

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \quad (30)$$

В базисе (5) матрицы Q_3, Q_4 принимают вид

$$Q_3 = \begin{pmatrix} \beta_3 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} \otimes \gamma_3 + \begin{pmatrix} \lambda_3 & \rho_3 \\ -\rho_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_2 \gamma_3, \quad (31)$$

$$Q_4 = \begin{pmatrix} \beta_4 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{pmatrix} \otimes \gamma_5 + \begin{pmatrix} \lambda_4 & \rho_4 \\ -\rho_4 & -\lambda_4 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_2 \gamma_5, \quad (32)$$

где числа $\alpha_3, \beta_3, \lambda_3, \rho_3, \alpha_4, \beta_4, \rho_4, \lambda_4$ выражаются через элементы матриц $q_{mn}^{(3)}, q_{mn}^{(4)}$ по формулам, аналогичным (14). Требование вещественности поля приводит к следующим ограничениям на эти числа:

$$\begin{aligned} \alpha_3, \lambda_3, \beta_4, \rho_4 & - \text{вещественные,} \\ \beta_3, \rho_3, \alpha_4, \lambda_4 & - \text{чисто мнимые.} \end{aligned} \quad (33)$$

Инвариантность лагранжиана

$$L = -\bar{\Psi} \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi \quad (34)$$

безмассового поля относительно преобразований Q_3, Q_4 обеспечивается выполнением условий

$$Q_3^+ \eta \Gamma_k Q_3 = \eta \Gamma_k, \quad Q_4^+ \eta \Gamma_k Q_4 = \eta \Gamma_k, \quad (35)$$

принимаящих с учетом антикоммутации матриц Γ_k с Q_3, Q_4 вид:

$$Q_3^+ \eta Q_3 = -\eta, \quad Q_4^+ \eta Q_4 = -\eta. \quad (36)$$

Условия (36) приводят к дополнительным ограничениям на элементы матриц Q_3, Q_4 :

$$\begin{aligned} \alpha_3^2 + \rho_3^2 - \beta_3^2 - \lambda_3^2 &= 1, \\ \beta_4^2 + \lambda_4^2 - \alpha_4^2 - \rho_4^2 &= 1. \end{aligned} \quad (37)$$

Условия (33), (37) означают, что матрицы Q_3, Q_4 задают некоторое шестипараметрическое преобразование, которое можно параметризовать, например, посредством эрмитовских генераторов K^i, L^i ($i=1, 2, 3$), имеющих в фермионном базисе вид:

$$K^i = \sigma_i \otimes \gamma_3, \quad L^i = \sigma_i \otimes \gamma_5. \quad (38)$$

В базисе (5) для K^i, L^i получаются выражения:

$$\begin{aligned} K^1 &= I_2 \otimes \gamma_3, \quad K^2 = i\sigma_2 \otimes \gamma_3 \gamma_2, \quad K^3 = i\sigma_3 \otimes \gamma_3 \gamma_2, \\ L^1 &= I_2 \otimes \gamma_5, \quad L^2 = i\sigma_2 \otimes \gamma_5 \gamma_2, \quad L^3 = i\sigma_3 \otimes \gamma_5 \gamma_2. \end{aligned} \quad (39)$$

Сравнивая (39) с общими выражениями (31), (32) для матриц Q_3, Q_4 в базисе (5), заключаем, что генераторам K^i, L^i соответствуют параметры ($\Theta_i \rightarrow K^i, \Lambda_i \rightarrow L^i$)

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \beta_3, \quad \Theta_2 = -i\rho_3, \quad \Theta_3 = -\lambda_3, \\ \Lambda_1 &= \beta_4, \quad \Lambda_2 = i\rho_4, \quad \Lambda_3 = \lambda_4, \end{aligned} \quad (40)$$

среди которых три вещественных ($\Lambda_1, \Theta_2, \Theta_3$) и три мнимых ($\Theta_1, \Lambda_2, \Lambda_3$) параметра.

Заключение

Таким образом, внутренняя симметрия лагранжевой формулировки безмассового уравнения Дирака в пространстве 2+1 описывается 12-параметрическим преобразованием, алгебра генераторов которого, наряду с (25), характеризуется соотношениями:

$$\begin{aligned} [K^i, K^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} J^k, \\ [L^i, L^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} J^k, \\ [J^i, K^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} K^k, \\ [J^i, L^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} L^k \end{aligned} \quad (41)$$

и т.д. Помимо упоминавшейся выше группы $SO(2,1)$ зарядовой симметрии, здесь содержится в качестве подгруппы также группа $SO(3)$ Паули-Гюрги с генераторами J^1, L^2, L^3 , присущая безмассовому уравнению Дирака в пространстве 3+1.

Полученные результаты могут представлять интерес с точки зрения теоретического описания симметричных свойств графена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bashir, A. Fermions in old space-time dimensions: back to basics / A. Bashir, M. Calicia // arXiv: hep-ph / 0502089v1 9 Feb 2005.
2. Плетюхов, В.А. Вещественное поле Дирака–Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ, сер. 1. – 2009. – № 2. – С. 3–7.
3. Плетюхов, В.А. Внутренняя симметрия восьмикомпонентного дираковского поля / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусевич // Весці НАНБ, сер. фіз.-мат. н. – 2010. – № 4. – С. 89–94.
4. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ун-та, сер. 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2009. – № 2. – С. 46–51.

V.A. Pletyukhov. Internal Symmetry of Dirac Equation in Space-Time 2+1

Internal symmetries of massive and massless Dirac equation in space-time 2+1 dimensions are investigated. It is shown that the massive equation ($m \neq 0$) has the symmetry group $SO(3,1)$ and include the charge symmetry as subgroup. The massless Dirac equation has 12-parameters symmetry group which as subgroup contains the transformations of Pauli–Gursey type

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 22.02.2011 г.