

ХАРАКТЕРИСТИКА ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Мы рассматриваем преобразование Фурье векторнозначных функций на локально компактной абелевой группе G , принимающих значения в банаховом пространстве X , квадратично интегрируемых по Бохнеру. Если G конечная группа, то преобразование Фурье является ограниченным оператором. Если G бесконечна, то преобразование Фурье $F: L_2(G, X) \rightarrow L_2(\hat{G}, X)$ является ограниченным оператором тогда и только тогда, когда банахово пространство X изоморфно гильбертову пространству.

В работе Ж. Петре [1] исследовалось обобщение теоремы Хаусдорфа-Юнга об образе пространства X под действием преобразования Фурье. Автор рассматривал векторнозначные функции $x \in L_p(R, X)$, $1 \leq p \leq 2$, на действительной оси, принимающие значения в банаховом пространстве X и интегрируемые в смысле Бохнера [2], т.е. слабо измеримые с конечной нормой

$$\|x\|_{L_p(R, X)} = \left(\int_R \|x(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Ж. Петре было отмечено, что при $p = 2$ во всех известных ему случаях преобразование Фурье

$$F: L_2(R, X) \rightarrow L_2(R, X), \quad F(x)(s) = \int_R x(t) e^{-2\pi i s t} dt$$

оказывалось ограниченным, только если X изоморфно гильбертовому пространству. В работе [3] польский математик С. Квапень подтвердил наблюдение Ж. Петре. Фактически, он доказал следующую теорему.

Теорема 1. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) Банахово пространство X изоморфно гильбертову.
- 2) Существует $C > 0$ такое, что для любого натурального n и $x_0, x_1, x_{-1}, \dots, x_n, x_{-n} \in X$

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=-n}^n e^{-2\pi i s t} \cdot x_k \right\|^2 dt \leq C \sum_{k=-n}^n \|x_k\|^2.$$

- 3) Существует $C > 0$ такое, что для любого натурального n и $x_0, x_1, x_{-1}, \dots, x_n, x_{-n} \in X$

$$C^{-1} \sum_{k=-n}^n \|x_k\|^2 \leq \int_0^1 \left\| \sum_{k=-n}^n e^{-2\pi i s t} \cdot x_k \right\|^2 dt.$$

- 4) Преобразование Фурье F , заданное на плотном в $L_2(R, X)$ подпространстве

$$D_F = \left\{ x(t) = \sum_{k=1}^n I_{A_k}(t) \cdot x_k \right\},$$

где A_k — измеримые непересекающиеся подмножества конечной меры в R , I_{A_k} — функции-индикаторы (равны 1 на A_k и 0 в остальных точках), $x_k \in X$, является ограниченным оператором со значениями в $L_2(R, X)$.

Определим оператор Фурье на векторных функциях целочисленного аргумента формулой

$$F_Z: L_2(Z, X) \rightarrow L_2(T, X): (x_k) \mapsto \sum_{k \in Z} e^{-2\pi i k t} \cdot x_k.$$

Здесь T означает одномерный тор $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, который как пространство с мерой изоморфен единичному отрезку прямой.

Неравенство в пункте 2 теоремы 1 превращается в утверждении об ограниченности композиции $F_Z I_Z$ (здесь I_Z – изометрический оператор замены переменной $I_Z : (x_k) \mapsto (x_{-k})$). Отсюда следует ограниченность самого оператора F_Z на плотном в $L_2(Z, X)$ подпространстве функций с конечным носителем. Последнее означает, что F_Z непрерывно продолжается на все $L_2(Z, X)$.

Аналогично, пункт 3 в теореме 1 эквивалентен ограниченности обратного преобразования Фурье

$$F_Z^{-1} : L_2(T, X) \rightarrow L_2(Z, X).$$

Естественной проблемой в данном направлении является исследование преобразования Фурье в пространстве квадратично интегрируемых по Бохнеру векторзначных функций на локально компактной абелевой группе G :

$$F : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\hat{G}, X), \quad F(x)(\xi) = \int_G \langle \xi, t \rangle_G x(t) d\mu_G(t),$$

где X – банахово пространство, $\hat{G}$ – группа двойственная к G по Понтрягину (группа характеров), $\langle \xi, t \rangle_G$ – каноническое спаривание $\hat{G}$ и G , μ_G – мера Хаара.

Прежде чем приступить к разбору общей задачи приведем необходимые сведения. За доказательствами результатов из области гармонического анализа мы отсылаем к [5], из области структурной теории локально компактных групп – к [6], теория пространств Брюа-Шварца изложена в [7].

Будем считать далее, что на $\hat{G}$ задана двойственная мера Хаара $\mu_{\hat{G}}$ такая, что выполняется скалярное равенство Стеклова-Парсеваля

$$\|\varphi\|_{L_2(G)}^2 = \int_G |\varphi|^2 d\mu_G = \int_{\hat{G}} |F\varphi|^2 d\mu_{\hat{G}} = \|F\varphi\|_{L_2(\hat{G})}^2.$$

В качестве начальной области задания для преобразования Фурье удобно рассматривать всюду плотное подпространство $D_F = L_2(G) \otimes X \subset L_2(G, X)$, где преобразование Фурье действует по формуле

$$F\left(\sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \cdot x_k\right) = \sum_{k=1}^n ((F\varphi_k)(\xi) \cdot x_k).$$

Плотность D_F вытекает из того, что в пространстве $L_2(G, X)$ плотны конечные линейные комбинации вида

$$\sum_{k=1}^n I_{A_k}(t) \cdot x_k \in L_2(G) \otimes X = D_F,$$

где A_k – измеримые непересекающиеся подмножества конечной меры в G , I_{A_k} – функции-индикаторы (равны 1 на A_k и 0 в остальных точках), $x_k \in X$.

Другим полезным подпространством в $L_2(G, X)$ является $S(G) \otimes X$, где $S(G)$ пространство Брюа-Шварца «гладких, быстро убывающих» функций на группе G . Оно также плотно в $L_2(G, X)$, поскольку $S(G) \subset L_2(G)$ и плотно в нем.

В силу того, что скалярное преобразование Фурье является биекцией $L_2(G)$ в $L_2(\hat{G})$ и с $S(G)$ в $S(\hat{G})$ сужение векторзначного преобразования на $L_2(\hat{G}) \otimes X$ является биекцией в $L_2(\hat{G}) \otimes X$, а сужение на $S(G) \otimes X$ – в $S(\hat{G}) \otimes X$.

Для того, чтобы рассмотреть случай бесконечной группы нам понадобится теорема о строении локально компактных групп [6].

Теорема 2. Пусть G – локально компактная абелева группа. Тогда G представима в виде объединения открытых компактно-порожденных подгрупп H с топологией

индуктивного предела. В свою очередь каждая компактно-порожденная группа H представима в виде проективного предела факторгрупп H/K , где $K \subset H$ – компактная подгруппа, а фактор-группа H/K элементарна, т.е. изоморфна произведению

$$H/K \cong R^{a_{H,K}} \times T^{b_{H,K}} \times Z^{c_{H,K}} \times F_{H,K},$$

где $F_{H,K}$ – конечная группа.

Определение 1. Будем говорить, что группа G содержит R -составляющую, если при некоторых H, K из теоремы 2 в элементарной фактор-группе $R^{a_{H,K}} \times T^{b_{H,K}} \times Z^{c_{H,K}} \times F_{H,K}$ показатель $a_{H,K} > 0$.

Аналогичным образом определяется смысл выражений «группа G содержит Z -составляющую», « G содержит T -составляющую».

Перед формулировкой общей теоремы докажем ряд необходимых лемм.

Лемма 1. Допустим банахово пространство X изоморфно гильбертовому, т.е. существует скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на X такое, что для некоторого $C > 0$ выполняется неравенство

$$C^{-1}(x, x)_X^{1/2} \leq \|x\|_X \leq C(x, x)_X^{1/2}.$$

Тогда преобразование Фурье $F : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\mathfrak{G}, X)$ ограничено.

Доказательство. Рассмотрим векторнозначное равенство Стеклова–Парсеваля

$$(F\varphi, F\varphi)_{L_2(\mathfrak{G}, X)} = \int_{\mathfrak{G}} (F\varphi(\xi), F\varphi(\xi)) d\mu_{\mathfrak{G}}(\xi) = \int_G (\varphi(t), \varphi(t)) d\mu_G(t) = (\varphi, \varphi)_{L_2(G, X)},$$

которое легко проверяется для функций $\varphi \in L_2(G) \otimes X$ с помощью аксиом скалярного произведения, скалярного равенства Стеклова–Парсеваля и равенства кросс-нормы

$$(\varphi_1 \otimes x_1, \varphi_2 \otimes x_2)_{L_2(G, X)} = (\varphi_1, \varphi_2)_{L_2(G)} \otimes (x_1, x_2)_X.$$

Тогда на плотном подпространстве верно неравенство

$$\|F\varphi\|_{L_2(\mathfrak{G}, X)} = C(F\varphi, F\varphi)_{L_2(\mathfrak{G}, X)} = C(\varphi, \varphi)_{L_2(G, X)} \leq C^2 \|\varphi\|_{L_2(G, X)},$$

что позволяет распространить F по непрерывности на все $L_2(G, X)$. Лемма доказана.

В случае конечной группы G пространство $L_2(G, X)$ изоморфно конечному декартовому произведению X^G . Группа $\mathfrak{G}$, двойственная по Понтрягину к G , изоморфна самой G . Самодвойственная мера Хаара обладает свойством $\mu_G(G) = \sqrt{|G|}$. Преобразование Фурье, известное также как дискретное преобразование Фурье, принимает вид

$$(F\varphi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{t \in G} \langle \xi, t \rangle \varphi(t)$$

Теорема 3. Если G – конечная группа, то преобразование Фурье $F : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\mathfrak{G}, X)$ ограничено для любого банахова пространства X .

Доказательство. Следует из неравенства

$$\begin{aligned} \|F\varphi\|_{L_2(\mathfrak{G}, X)} &= \sum_{\xi \in \mathfrak{G}} \left\| \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{t \in G} \langle \xi, t \rangle \varphi(t) \right\|_X^2 \leq \frac{1}{|G|} \sum_{\xi \in \mathfrak{G}} \left(\sum_{t \in G} |\langle \xi, t \rangle| \|\varphi(t)\|_X \right)^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{\xi \in \mathfrak{G}} \left(\sum_{t \in G} \|\varphi(t)\|_X \right)^2 = \\ &= \left(\sum_{t \in G} \|\varphi(t)\|_X \right)^2 \leq |G| \sum_{t \in G} \|\varphi(t)\|_X^2 = |G| \|\varphi\|_{L_2(G, X)}^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению бесконечных групп.

Лемма 2. Допустим группа G содержит R -составляющую, T -составляющую или Z -составляющую. Тогда ограниченность преобразования Фурье

$$F : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\mathfrak{G}, X)$$

влечет изоморфность банахова пространства X гильбертову.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда группа G содержит R -составляющую. Тогда в G имеются открытая компактно-порожденная подгруппа H и компактная подгруппа $K \subset H$ такие, что $H/K \cong R^a \times T^b \times Z^c \times F$, где $a \geq 1$.

Пусть $\tau_1: H \rightarrow H/K$ – каноническая проекция, $\tau_2: H/K \rightarrow R$ проекция на первую координату R^a , $\tau = \tau_2 \circ \tau_1$.

Рассмотрим вспомогательные функции $\psi_{R,i} \in L_2(R)$, $2 \leq i \leq a$, $\psi_{T,j} \in L_2(T)$, $1 \leq j \leq b$, $\psi_{Z,k} \in L_2(Z)$, $1 \leq k \leq c$, $\psi_F \in L_2(F)$, каждая из которых имеет в соответствующем пространстве норму равную 1. Рассмотрим вложение

$$J: \varphi \rightarrow ((\varphi \circ \tau) \otimes (\bigotimes_{i=2}^a \psi_{R,i}) \otimes (\bigotimes_{j=1}^b \psi_{T,j}) \otimes (\bigotimes_{k=1}^c \psi_{Z,k}) \otimes \psi_F).$$

Вложение J , как легко видеть, является изометрическим. Существует единственное вложение $\mathcal{H}: L_2(R, X) \rightarrow L_2(\mathcal{H}, X)$, которое также является изометрическим, и для которого будет коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L_2(R, X) & \xrightarrow{F_R} & L_2(R, X) \\ \downarrow J & & \downarrow \mathcal{H} \end{array}$$

$$L_2(H, X) \xrightarrow{F_H} L_2(\mathcal{H}, X)$$

Пространство $L_2(H, X)$ можно отождествить в силу открытости подгруппы H с замкнутым подпространством $L_2(G, X)$, продолжив функции с H на G нулем. Пространство $L_2(\mathcal{H}, X)$ можно отождествить с замкнутым подпространством $L_2(\mathcal{G}, X)$, состоящим из функций постоянных на классах смежности по $H^\perp$.

Преобразование Фурье F_H является сужением F_G и, таким образом, ограничено. Преобразование Фурье $F_R = (\mathcal{H})^{-1} F_H J$ будет непрерывно как композиция непрерывных. По теореме 1 пункт 4 пространство X изоморфно гильбертову.

Аналогичным образом рассматриваются случаи, когда группа G содержит T -составляющую или Z -составляющую. Лемма доказана.

Перейдем к рассмотрению случая, когда группа G не содержит R -, Z - или T -составляющих. В этом случае все компактно-порожденные подгруппы $H \subset G$ являются проективными пределами конечных подгрупп с дискретной топологией, т.е. являются *профинитными* группами. Профинитные группы характеризуются в следующей лемме [9].

Лемма 3. Топологическая группа H является профинитной тогда и только тогда, когда она:

- а) хаусдорфова;
- б) компактна;

в) вполне несвязна, т.е. для всех $x, y \in H$ существует открыто-замкнутое подмножество $U \subset H$ такое, что $x \in U$ и $y \notin U$.

Любая профинитная группа H либо дискретна (и тогда конечна в силу компактности), либо недискретна (и тогда бесконечна).

Рассмотрим недискретную профинитную группу H . Меру Хаара на H будем нормировать условием $\mu_H(H) = 1$. Группа H является пространством Лебега, т.е. изоморфно как пространство с мерой интервалу $[0, 1]$ с длиной, см. [5], [8]. Данный факт можно доказать, выбрав последовательность компактных подгрупп $K_n \subset H$ таких, что $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ и мощность фактор-групп $M_n := |H/K_n|$ стремится к $+\infty$. Пронумеровав должным образом классы смежности по K_n , мы сможем отождествить их с точностью до меры 0 с интервалом отрезка с длиной $1/M_n$.

В силу сказанного на группе H можно задать систему функций $(r_i)_{i=1,2,\dots}$, аналогичную системе функций Радемахера на отрезке $[0,1]$. Это ортогональная система

функций, которые принимают значения $\{+1, -1\}$ на подмножествах меры $1/2$. Говоря теоретико-вероятностным языком, функции r_i будут являться реализациями независимых в совокупности случайных величин, принимающих значения $\{+1, -1\}$ с вероятностью $1/2$.

Нам понадобится критерий, доказанный в [3].

Теорема 4. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) Банахово пространство X изоморфно гильбертову.
- 2) Существует константа $C > 0$ такая, что для произвольного конечного набора векторов $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ верно двухстороннее неравенство

$$C^{-1} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leq E \left\| \sum_{i=1}^n r_i x_i \right\|^2 = \int_H \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt \leq C \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2,$$

где r_i – независимые случайные величины, принимающие значения $\{+1, -1\}$ с вероятностью $1/2$, символ E означает математическое ожидание.

Следуя [3], мы сформулируем лемму, которая демонстрирует важность системы (r_i) на H и позволит перейти к рассмотрению базисов в $L_2(H)$. Мере Хаара на H будем также обозначать символом dt .

Лемма 4. Пусть X – банахово пространство, (f_i) – ортонормированная полная система в $L_2(H)$. Если для некоторого $C > 0$ и для любого набора $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ верно неравенство

$$\int_H \left\| \sum_{i=1}^n f_i(t) x_i \right\|^2 dt \leq C \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \quad \left(\text{соотв., } C^{-1} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leq \int_H \left\| \sum_{i=1}^n f_i(t) x_i \right\|^2 dt \right).$$

Тогда для той же константы $C > 0$ и для любого набора $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ также имеем

$$\int_H \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt \leq C \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \quad \left(\text{соотв., } C^{-1} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leq \int_H \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right).$$

Доказательство. В силу ортонормальности системы Радемахера (r_i) и полноты (f_k) мы для заданного $\varepsilon > 0$ можем найти возрастающую последовательность индексов (k_j) , (m_j) и ортонормированную последовательность (h_j) такую, что

$$h_j = \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (h_j, f_k) \cdot f_k, \quad \int_H |h_j(t) - r_{m_j}(t)|^2 dt < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Для фиксированного n и для фиксированных $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ имеем

$$\int_H \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) \cdot x_i \right\|^2 dt = \int_H \left\| \sum_{i=1}^n r_{m_j}(t) \cdot x_i \right\|^2 dt.$$

По неравенству треугольника имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_H \left\| \sum_{j=1}^n r_{m_j}(t) \cdot x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2} &\leq \left(\int_H \left\| \sum_{j=1}^n (r_{m_j}(t) - h_j(t)) \cdot x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_H \left\| \sum_{j=1}^n h_j(t) \cdot x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_H \left\| \sum_{j=1}^n h_j(t) \cdot x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Поскольку $1 = h_j^2 = \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (h_j, f_k)^2$, получаем

$$\int_H \left\| \sum_{j=1}^n h_j(t) \cdot x_j \right\|^2 dt = \int_H \left\| \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (h_j, f_k) \cdot f_k \right) x_j \right\|^2 dt \leq C \sum_{j=1}^n \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} |(h_j, f_k)|^2 x_j^2 = C \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

Таким образом,

$$\int_H \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) \cdot x_i \right\|^2 dt \leq (\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{C})^2 \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Устремляя ε к нулю, получаем требуемое неравенство. Неравенство в обратную сторону доказывается независимо и аналогично. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть X – банахово пространство, (f_i) – ортонормированная полная система в $L_2(H)$. Тогда X изоморфно гильбертову пространству если и только если существует такая константа $C > 0$, что для любого набора $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ верно неравенство

$$C^{-1} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leq \int_H \left\| \sum_{i=1}^n f_i(t) \cdot x_i \right\|^2 dt \leq C \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

В следствии 1 изоморфность X гильбертову пространству вытекает из *двойного* неравенства. Структурные особенности профинитных групп позволяют нам переходить от оценок снизу к оценкам сверху и наоборот.

Отметим, что пространство функций Брюа–Шварца на профинитной группе H и на двойственной группе $\mathbf{H}^A$ состоят из локально постоянных функций с компактными носителями. Пространства $S(H)$ и $S(\mathbf{H}^A)$ можно представить в виде индуктивного предела конечномерных пространств. В силу этого они несут сильнейшую локально выпуклую топологию [7].

Теперь мы готовы рассмотреть важный частный случай преобразования Фурье векторнозначных функций на профинитной недискретной группе.

Так как H компактная бесконечная группа, то двойственная $\mathbf{H}^A$ будет дискретной бесконечной группой.

Лемма 5. Пусть X – банахово пространство, H – профинитная недискретная группа. Следующие утверждения эквивалентны:

1) X изоморфно гильбертову пространству.

2) Существует такая константа $C > 0$, что для произвольного конечного набора векторов $x_1, \dots, x_n \in X$ и характеров $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbf{H}^A$ верно неравенство

$$\int_H \left\| \sum_{k=1}^n \langle \xi_k, t \rangle x_k \right\|^2 dt \leq C \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

2') Преобразование Фурье $F_{\mathbf{H}^A} : L_2(\mathbf{H}^A, X) \rightarrow L_2(H, X)$ и $F_H^{-1} = I_H F_{\mathbf{H}^A}$ ограничены. Здесь I_H – изометричный оператор замены переменной $x(t) \mapsto x(-t)$.

3) Существует такая константа $C > 0$, что для произвольного конечного набора векторов $x_1, \dots, x_n \in X$ и характеров $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbf{H}^A$ верно неравенство

$$C^{-1} \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \leq \int_H \left\| \sum_{k=1}^n \langle \xi_k, t \rangle x_k \right\|^2 dt.$$

3') Обратное преобразование Фурье $F_{\mathbf{H}^A}^{-1} : L_2(H, X) \rightarrow L_2(\mathbf{H}^A, X)$ и $F_H = I_H F_{\mathbf{H}^A}^{-1}$ ограничены.

Доказательство. Лемма 1 дает импликации $1) \Rightarrow 2)'$, $1) \Rightarrow 3)'$.

Чтобы получить эквивалентности $2)' \Leftrightarrow 2)$, $3)' \Rightarrow 3)$ достаточно рассмотреть функции вида

$$h = \sum_{k=1}^n I_{\{\xi_k\}} \cdot x_k \in S(\mathbf{H}^A) \otimes X,$$

где $\xi_k \in \mathbf{H}^A$, $x_k \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Из определения преобразования Фурье $F : L_2(\mathbf{H}^A, X) \rightarrow L_2(H, X)$ и выбора нормировки меры Хаара на H сразу получаем

$$\|h\|_{L_2(\mathbb{H}, X)}^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2, \|Fh\|_{L_2(H, X)}^2 = \int_H \left\| \sum_{k=1}^n \langle \xi_k, t \rangle x_k \right\|^2 dt.$$

Эквивалентности следуют из плотности $S(\mathbb{H}) \otimes X$ в $L_2(\mathbb{H}, X)$, $S(H) \otimes X$ в $L_2(H, X)$ и биективности $F_{\mathbb{H}}$, F_H на соответствующих подпространствах.

По следствию 1 мы имеем импликацию 2) & 3) $\Rightarrow$ 1).

Допустим, имеет место ограниченность 2)'. Исследуем преобразование Фурье F_H на подпространстве $S(H) \otimes X$. Для этого рассмотрим произвольную компактную подгруппу $K \subset H$, где $|H/K| < +\infty$. Функции постоянные на классах смежности по K мы отождествим с элементами $S(H/K) \otimes X$.

В силу конечности H/K существует изоморфизм $\alpha: H/K \rightarrow H/K$. Он индуцирует сопряженный изоморфизм $\alpha^*: H/K \rightarrow H/K$ по формуле

$$\langle \xi_1, \alpha(\xi_2) \rangle_H = \langle \alpha^*(\xi_1), \xi_2 \rangle_{\mathbb{H}}.$$

Определим оператор

$$R_\alpha: S(H/K) \otimes X \rightarrow S(H/K) \otimes X: (R_\alpha \psi)(\xi') = \psi(\alpha(\xi')) \cdot |H/K|^{-\frac{1}{2}}.$$

Он является изометрией в силу равенства

$$\begin{aligned} \|R_\alpha \psi\|^2 &= \sum_{\xi' \in H/K} \|R_\alpha \psi(\xi')\|^2 \mu_{H/K}(\xi') = \sum_{\xi' \in H/K} \|\psi(\alpha(\xi'))\|^2 \cdot |H/K|^{-\frac{1}{2} \cdot 2} = \\ &= [t := \alpha(\xi')] = \sum_{t \in H/K} \|\psi(t)\|^2 \cdot |H/K|^{-1} = \sum_{t \in H/K} \|\psi(t)\|^2 \mu_{H/K}(t) = \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} (F_{\mathbb{H}} R_\alpha \psi)(t') &= \sum_{\xi' \in H/K} \langle t', \xi' \rangle_{H/K} (\psi(\alpha(\xi')) |H/K|^{-\frac{1}{2}}), \\ (R_{\alpha^*} F_{\mathbb{H}} R_\alpha \psi)(\xi) &= \left(\sum_{\xi' \in H/K} \langle \alpha^*(\xi), \xi' \rangle_{H/K} \psi(\alpha(\xi')) |H/K|^{-\frac{1}{2}} \right) |H/K|^{-\frac{1}{2}} = [t := \alpha(\xi')] = \\ &= \left(\sum_{t \in H/K} \langle \alpha^*(\xi), \alpha^{-1}(t) \rangle_{H/K} \psi(t) |H/K|^{-1} \right) = \sum_{t \in H/K} \langle \alpha^*(\xi), \alpha(\alpha^{-1}(t)) \rangle_{H/K} \psi(t) |H/K|^{-1} = \\ &= \sum_{t \in H/K} \langle \xi, t \rangle_{H/K} \psi(t) \mu_{H/K}(t) = (F_H \psi)(\xi) \end{aligned}$$

Таким образом, сужение F_H на $S(H/K) \otimes X$ имеет ту же константу ограниченности, что и $F_{\mathbb{H}}$. В силу произвольности K это значит, что F_H непрерывен на $L_2(H, X)$, и верна импликация 2) $\Rightarrow$ 3). Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) доказывается аналогично.

Доказанных импликаций достаточно, чтобы утверждать эквивалентность пунктов теоремы. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению общего случая, когда преобразование Фурье действует в пространстве векторнозначных функций на произвольной локально компактной абелевой группе G .

Теорема 5. Пусть X – банахово пространство, G – бесконечная локально компактная абелева группа. Пространство X изоморфно гильбертову тогда и только тогда, когда ограничено преобразование Фурье

$$F: L_2(G, X) \rightarrow L_2(\mathfrak{G}, X).$$

Доказательство. Достаточность условия изоморфности для ограниченности F показана в лемме 1.

Обратно, допустим преобразование Фурье ограничено.

Если группа G содержит R -, T - или Z -составляющую, то изоморфность X гильбертову пространству следует из леммы 2 и доказательство в этом случае закончено.

Будем далее считать, что группа G не содержит R -, T - или Z -составляющих. В

этом случае все открытые компактно-порожденные подгруппы $H \subset G$ являются профинитными.

Если среди подгрупп H найдется некомпактная, то мы рассмотрим пространство $L_2(H, X)$ как замкнутое подпространство $L_2(G, X)$, продолжая функции за пределом H нулем. Пространство $L_2(\mathbb{H}, X)$ отождествим с пространством $L_2(\mathbb{G}, X)$ функций, постоянных на классах смежности по аннулятору $H_G^\perp \subset \mathbb{G}$. Преобразование Фурье на $L_2(H, X)$ является сужением преобразования Фурье с $L_2(G, X)$ и, таким образом, ограничено. Изоморфность X гильбертову пространству следует из леммы 5 (пункт 3)'. Доказательство в этом случае закончено.

Если же все рассматриваемые подгруппы $H \subset G$ являются дискретными (в силу компактности отсюда следует их конечность), то по структурной теореме 2 группа G является индуктивным пределом конечных дискретных подгрупп. В силу свойств двойственности Понтрягина, двойственная группа $\mathbb{G}$ является проективным пределом групп $\mathbb{H}$. Группы $\mathbb{H}$ двойственны к конечным дискретным группам H , изоморфны им, и сами являются конечными дискретными. Таким образом, группа $\mathbb{G}$ является профинитной. Поскольку G является бесконечной, то $\mathbb{G}$ некомпактна.

Утверждение об ограниченности преобразования Фурье $F : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\mathbb{G}, X)$ эквивалентно ограниченности обратного преобразования $F_\mathbb{G}^{-1}$ для профинитной некомпактной группы $\mathbb{G}$. Изоморфность X гильбертову пространству в этом последнем случае следует из леммы 5 пункт 2)'. Конец доказательства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Peetre, J. Sur la transformation de Fourier des fonctions à valeurs vectorielles / J. Peetre // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1969. – Vol. 42. – P.15–26.
2. Mikusinski, J. The Bochner integral // J. Mikusinski. – Acad. Press, 1978.
3. Kwapien, S. Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector-valued coefficients / S. Kwapien // Studia mathematica. – 1972. – Vol. XLIV. – P.583–595.
4. Радыно, Е.М. Характеристика гильбертовых пространств с использованием преобразования Фурье на поле p -адических чисел / Е.М. Радыно, Я.В. Радыно, А.Г. Сидорик // Докл. НАН Беларуси. – 2007. – Т.48, №5. – С. 17–22.
5. Хьюит, Э. Абстрактный гармонический анализ / Э. Хьюит, К. Росс – Т.1. – М : Наука, 1975.
6. Моррис, С. Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп / С. Моррис – М : Мир, 1980.
7. Bruchat, F. Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des representations des groupes p -adiques / F. Bruchat // Bull. Soc. Math. France. – 1961. – Vol. 89. – P.43–75.
8. Леонов, Н.Н. Математическая социология: структурно-аппроксимационный подход / Н.Н. Леонов – Минск, 2002.
9. Lenstra, H. Profinite groups // Электронный документ: <http://websites.math.leidenuniv.nl/algebra/Lenstra-Profinite.pdf>

Ya.M. Radyna H.G. Sidoryk. The Fourier Transform of Vector-valued Functions on Locally Compact Groups

We consider Fourier transform of vector-valued functions on a locally compact group G taking value in Banach space X , and square-integrable in Bochner sense. If G is a finite group then Fourier

transform is a bounded operator. If G is an infinite group then Fourier transform $F : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\hat{G}, X)$ is a bounded operator if and only if Banach space X is isomorphic to a Hilbert one.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 04.10.2010 г.