

О РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ ТИПА КАНТОРОВИЧА–КРАСНОСЕЛЬСКОГО

В статье рассматриваются одношаговые и многошаговые нелокальные итерационные процессы для решения нелинейных уравнений. За счёт регуляризации процессы «работают» с «плохим» начальным приближением. Скорость сходимости рассмотренных нелокальных вариантов процессов типа Канторовича–Красносельского оказывается сверхлинейной.

Для решения нелинейного уравнения $f(x) + g(x) = 0$ (1)

где f, g – нелинейные операторы, действующие из некоторой выпуклой области D пространства R^n в R^n , $f \in C_D^{(1)}$, $g \in C_D$ в монографии [1] предложены нерегуляризованные нелокальные итерационные процессы для решения уравнения (1).

В настоящей работе для решения уравнения (1) предлагается семейство итерационных процессов:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n :

$$\begin{aligned} & (\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E + (\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E) \times \\ & \quad (f'(x_n) + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E))\Delta x_n = \\ & \quad = -(\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E)(f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\overline{f'(x_n)}$ – оператор, сопряженный оператору $f'(x_n)$, $\alpha < 1$.

Шаг 2. Находится очередное приближение $n = 0, 1, 2, \dots$

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n} \Delta x_n. \quad (3)$$

Шаг 3. Проверяется условие окончания вычислительного процесса: если $\|f(x_{n+1}) + g(x_{n+1})\| < \varepsilon$, $\varepsilon < 1$ (ε – параметр останова), то конец просчетов иначе,

Шаг 4. Производится пересчёт шаговой длины β_{n+1} по одной из формул, которые будут приведены ниже, таким образом, что выполняется соотношение

$$\sqrt{\beta_0}\|f(x_0) + \beta_{-1}g(x_n)\| = \dots = \sqrt{\beta_n}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|, \quad \beta_{n-1} = \beta_0 \quad (4)$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Далее полагаем, что имеют место оценки:

$$\begin{aligned} & \|(\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E + (\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E) \times \\ & \quad \times (f'(x_n) + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E))^{-1}\| \leq B \\ & \quad \|(\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E)^{-1}\| \leq A, \\ & \quad \|f'(x_n) + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E\| \leq C. \end{aligned} \quad (5)$$

Относительно оператора g полагаем, что $\forall x \in D$ имеет место соотношение:

$$\|\beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n)\| \leq K\alpha, \quad (6)$$

а производная Фреше оператора f удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L .

Теорема 1. Пусть в интересующей нас области D существует x^* – решение уравнения (1), операторы f и g удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное

приближение x_0 и шаговые длины β_0, β_1 таковы, что $\varepsilon_0 < 1$. Тогда перечисленные ниже алгоритмы со сверхлинейной скоростью сходятся к x^* .

Доказательство. Из условий теоремы имеем

$$\|f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| \leq L\|x_{n+1} - x_n\|^2. \quad (7)$$

Далее, используя (2), находим $f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$.

$$\begin{aligned} f'(x_n)\Delta x_n &= -\alpha \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\| (\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_n \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\| E)^{-1} \times \\ &\times \Delta x_n - (f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)) - \alpha \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\| \Delta x_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Простые преобразования позволяют получить оценку, используя (5–8)

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\| &\leq \beta_n L B^2 \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|^2 + \\ &+ \alpha\beta_n A C \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|^2 + \alpha\beta_n A \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|^2 + \\ &+ (1 - \sqrt{\beta_n}) \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\| + \alpha K_1 \beta_n \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|^2 = \\ &= (1 - \sqrt{\beta_n}) \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\| + \beta_n \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|^2 (L B^2 + \\ &+ \alpha A C + \alpha A + \alpha K_1) = (1 - \sqrt{\beta_n} (1 - \varepsilon_n)) \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\| = \\ &= q_n \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|, \varepsilon_n = (L B^2 + \\ &+ \alpha A C + \alpha A + \alpha K_1) \sqrt{\beta_n} \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|, \\ K_1 &= K / \beta_0 \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|^2, q_n = 1 - \sqrt{\beta_n} (1 - \varepsilon_n). \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношение (9) является базовым при доказательстве сходимости процессов (2–4) при различных способах задания шаговых длин β_{n+1} .

При $n = 0$ из (9) и условий теоремы имеем

$$\|f(x_1) + \beta_0 g(x_1)\| \leq (1 - \sqrt{\beta_0} (1 - \varepsilon_0)) \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\| = q_0 \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|.$$

Так как $q_0 < 1$, тогда

$$\|f(x_1) + \beta_0 g(x_1)\| < \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|. \quad (10)$$

Из (4) и (10) следует, что $\beta_1 > \beta_0$.

При $n = 1$ из (4), (10) и условий теоремы имеем оценку

$$\begin{aligned} \|f(x_2) + \beta_1 g(x_2)\| &\leq (1 - \sqrt{\beta_1} (1 - \varepsilon_1)) \|f(x_1) + \beta_0 g(x_0)\| = \\ &= q_1 \|f(x_1) + \beta_0 g(x_0)\| \leq q_1 q_0 \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|. \end{aligned} \quad (11)$$

И так как $\beta_1 > \beta_0$, то $q_1 < q_0 < 1$. Из (9) и (11) при $n = 1$ имеем, что $\|f(x_2) + \beta_1 g(x_2)\| < \|f(x_1) + \beta_0 g(x_1)\|$, откуда в силу (4) следует, что $\beta_2 > \beta_1$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_i\}$ монотонно убывающая, последовательность итерационных параметров $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и в силу (9) справедлива оценка

$$\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\| \leq \prod_{i=0}^n q_i \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\| < q_0^{n+1} \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|, \quad (12)$$

из которой следует сходимость последовательности элементов $\{f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\}$ к элементу $(f(x^*) + \beta^*g(x^*))$. При этом так как $\beta_n \nearrow 1$, то есть последовательность $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и ограничена сверху единицей, то существует предельный элемент β^* . Предлагаемые ниже алгоритмы пересчёта шаговой длины таковы, что $\lim \beta_n = 1$ при $n \rightarrow \infty$.

В связи со сказанным выше и из (12) имеем, что

$$\lim \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_n)\| = \|f(x^*) + g(x^*)\| = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что последовательность элементов, генерируемая процессом (2–4), сходится к x^* решению уравнения (1).

Из (2) и условий теоремы имеем оценку

$$\|x^* - x_n\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\Delta x_i\| \leq \frac{BCq_0^n \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|}{1 - q_0}, \quad (13)$$

из которой следует и сильная (по норме) сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^* .

При $n = 0$ из (13) находим величину радиуса сферы $D = \bar{S}(x_0, r)$,

$$r = \frac{BC \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|}{1 - q_0}.$$

Как следует из (12), существует такой номер n_0 , что для всех $k > n_0$, итерация (2–4) попадает в область притяжения метода Канторовича-Красносельского с $\beta_k = 1$, рассмотренного в [2].

Нетрудно показать, что, начиная с $n > n_0$, метод (2–4) имеет квадратичную скорость сходимости. При $\beta_k = 1$ из (9) имеем

$\|f(x_{k+1}) + g(x_{k+1})\| \leq (LB^2 + \alpha A + \alpha AC + \alpha K_1) \|f(x_k) + g(x_k)\|^2$, или $\varepsilon_{k+1} \leq \varepsilon_k^2$, из которой следует локальная квадратичная скорость сходимости процесса (2–4) к x^* . Теорема доказана.

Замечание 1. Константы, фигурирующие в формулировке теоремы, фактически нигде не вычисляются. Важен лишь факт их существования.

Замечание 2. Из соотношения (13) следует, что рассмотренные выше алгоритмы легко можно рассматривать в банаховых пространствах.

Замечание 3. Конкретные виды алгоритмов, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, имеют вид:

алгоритм 1 пересчёта шаговой длины:

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \min(1, \frac{\|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^4 \gamma_n}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|^2 (\|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^2 + \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|^2) \beta_n}) \\ \gamma_{n+1} &= \frac{\gamma_n \|f(x_n) + \beta_{n-1} g_t(x_n)\|^4 (\|f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1})\|^2 + \|f(x_{n+2}) + \beta_{n+1} g_t(x_{n+2})\|^2) \beta_{n+1}}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1})\|^4 (\|f(x_n) + \beta_{n-1} g_t(x_n)\|^2 + \|f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1})\|^2) \beta_n} \\ \gamma_0 &= \frac{\beta_0^2 (\|f(x_0) + \beta_0 g_t(x_0)\|^2 + \|f(x_1) + \beta_0 g_t(x_1)\|^2)}{\|f(x_0) + \beta_0 g_t(x_0)\|^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Алгоритм 2 пересчёта шаговой длины:

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \min(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n) + \beta_{n-1} g_t(x_n)\|^2}{(\|f(x_n) + \beta_{n-1} g_t(x_n)\|^2 + \|f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1})\|^2) \beta_n}), \\ \gamma_{n+1} &= \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|^2 (\|f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1})\|^2 + \|f(x_{n+2}) + \beta_{n+1} g_t(x_{n+2})\|^2) \beta_{n+1}}{\|f(x_{n+2}) + \beta_{n-1} g_t(x_{n+2})\|^2 (\|f(x_n) + \beta_{n-1} g_t(x_n)\|^2 + \|f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1})\|^2) \beta_n} \\ \gamma_0 &= \frac{\beta_0 (\|f(x_0) + \beta_0 g_t(x_0)\|^2 + \|f(x_1) + \beta_0 g_t(x_1)\|^2)}{\|f(x_1) + \beta_0 g_t(x_1)\|^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Алгоритм 3 пересчёта шаговой длины:

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\beta_0^2 \|f(x_0) + \beta_0 g_t(x_0)\|^2 \gamma_n}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1})\|^2 \beta_n}), \quad (16)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}; \gamma_0 = 1.$$

Алгоритм 4 пересчёта шаговой длины:

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_0) + \beta_0 g_t(x_0)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1})\|^2 \beta_n}), \quad (17)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1})\|}{\|f(x_{n+2}) + \beta_{n+1} g_t(x_{n+2})\|}; \gamma_0 = \beta_0^2.$$

Перечисленные выше четыре алгоритма удовлетворяют условию (4), в чём нетрудно убедиться, взяв отношение $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$. Переход к пределу при $n \rightarrow \infty$ в выражениях для β_{n+1} во всех четырёх алгоритмах позволяет утверждать, что начиная с некоторого номера итерации k_0 , все $\beta_i \equiv 1$ для $i > k_0$.

В качестве одного из вариантов регуляризованного итерационного процесса рассмотрим следующий алгоритм.

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно поправки Δx_k :

$$f'(x_k) \Delta x_k = -\beta_k (f(x_k) + \beta_{k-1} g_1(x_k)), \quad g_1(x) = g(x) - f(x), \quad k = 0, 1, \dots$$

Шаг 2. Вносится поправка Δx_k в вектор x_k

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

Шаг 3. Проводится проверка окончания вычислительного процесса: если $\|g(x_k)\| < \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ (ε – параметр пространства I , то конец просчётов, иначе

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина $\beta_{k+1}, \beta_{k+1} \in (0, 1]$ одним из приведённых способов и осуществляется переход на шаг 1.

Здесь в развитии рассмотренных выше подходов к решению нелинейных уравнений в качестве вектора $f(x)$ целесообразно брать гладкую аппроксимацию функции $g(x)$, которую назовём $f_1(x)$ и решаем уравнение

$$f_1(x) + (f(x) + g(x) - f_1(x)) = f_1(x) + g_1(x) = 0.$$

Процесс шаг 1 – шаг 4 осуществляется нужное число раз.

Относительно оператора f_1 полагаем, что имеет место оценка $\| [f_1'(x)]^{-1} \| \leq B \quad \forall x \in D$, а оператор $g_1(x)$ удовлетворяет условию (6).

L – константа Липшица оператора $f_1'(x)$ в области D .

Теорема 2. Пусть в области $D = \frac{B \|f_1(x_0) + \beta_0 g_1(x_0)\|}{1 - q_0}$ существует x^* – решение

уравнения (1), операторы $f_1(x)$ и $g_1(x)$ удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное приближение x_0 и шаговые длины β_0, β_{-1} таковы, что

$$\varepsilon_0 = \beta_0 (K\alpha B + LB^2) \|f_1(x_0) + \beta_{-1} g_1(x_0)\| < 1$$

Тогда алгоритм шаг 1 – шаг 4 с β_{n+1} , определяемыми по формулам (14–17) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

Доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.46 монографии [1], при этом β_{n+1} выбирается предложенным там способом.

В результате мы имеем, что

$$\lim \|f(x_k) + \beta_{k-1} g_I(x_k)\| = \|f(x^*) + g_1(x^*)\| = \|g(x^*)\| = 0, k \rightarrow \infty,$$

откуда и следует, что предельный элемент последовательности, генерируемой алгоритмом шаг 1 – шаг 4, является решением уравнения $g(x) = 0$.

Рассмотренные выше итерационные процессы являются многошаговыми. Предлагаемые ниже одношаговые процессы являются весьма эффективными для решения нелинейного уравнения (1):

Шаг 1. Решается нелинейная система относительно поправки x_n :

$$(\alpha \|f(x_n) + g(x_n)\|^2 E + \overline{f'(x_n)} f'(x_n)) \Delta x_n = -\overline{f'(x_n)} (f(x_n) + g(x_n)).$$

Шаг 2. Вносится поправка для получения очередного приближения

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n.$$

Шаг 3. Проводится проверка окончания вычислительного процесса: если $\|f(x_n) + g(x_n)\| < \varepsilon, \varepsilon \ll 1$ (ε – параметр останова), то конец расчётов, иначе пересчёт β_{n+1} по одной из следующих формул:

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_n)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\| \beta_n}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2 \quad (18)$$

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_0)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\| \beta_n}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2 \quad (19)$$

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_n)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\| \beta_n}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n (\|f(x_n) + f(x_{n+1})\| \|f(x_n)\|)}{2 \|f(x_{n+1})\|^2}, \gamma_0 = \beta_0^2 \quad (20)$$

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_0)\| \beta_n \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\|}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_n}{\beta_{n+1}}, \gamma_0 = 1 \quad (21)$$

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_0)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\| \beta_n}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2 \quad (22)$$

и переход на шаг 1.

Вполне аналогично тому, как это было сделано выше, могут быть сформулированы и доказаны теоремы о сходимости процессов шаг 1 – шаг 4 с β_{n+1} , определяемых по одной из формул (18–21) или (22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест, 2005. – 186 с.
2. Красносельский, М.А. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.] – М : Наука, 1969. – 455 с.

V.M. Madorski. On Regularized Nonlocal Iterative Processes of Kantorovich-Krasnoselski Type

The paper is concerned with the one and many-step iterative methods of approximate solution of the nonlinear operator equation in the space of R^n . The processes converge to exact solution of the operator equation from the «bad» initial approximation. The local speed of convergence of the processes is shown.

Рукапіс паступив у редакцію 23.12.2010 г.