

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ВЕЙЕРШТРАССА НА КЛАССАХ $W_\beta^r H^\alpha$

Работа посвящена решению одной из задач теории приближения – задачи об исследовании аппроксимативных свойств интегралов Вейерштрасса на классах $W_\beta^r H^\alpha$. Получены асимптотические равенства для верхних граней отклонений функций классов $W_\beta^r H^\alpha$ от интегралов Вейерштрасса.

1. Постановка задачи и некоторые дополнительные утверждения

Пусть C – пространство 2π -периодических функций, в котором норма определена равенством $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$; L_∞ – пространство 2π -периодических измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|$; L – пространство 2π -периодических суммируемых на периоде функций, в котором норма определена равенством $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$.

Пусть $r > 0$ и β – фиксированное действительное число. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left[a_k \cos \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k \sin \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right]$$

есть рядом Фурье некоторой суммируемой функции φ , то такую функцию называют (r, β) -производной функции f в смысле Вейля-Надя и обозначают $f_\beta^r(\cdot)$. Множество функций, которые удовлетворяют такому условию, обозначают через W_β^r .

Если $f \in W_\beta^r$ и при этом $f_\beta^r \in H^\alpha$, то есть f_β^r удовлетворяет условию Липшица порядка α :

$$|f_\beta^r(x+h) - f_\beta^r(x)| \leq |h|^\alpha, \quad h \in R, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

то говорят, что f принадлежит классу $W_\beta^r H^\alpha$. При $\alpha = 0$ полагают, что $W_\beta^r H^0 = W_\beta^r$.

Через W^r обозначают множество 2π -периодических функций, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка включительно и $\|f^{(r)}(t)\|_\infty \leq 1$.

Пусть $f \in L$. Величину

$$W(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^2} \cos kt \right\} dt, \quad 0 \leq \rho < 1,$$

принято называть интегралом Вейерштрасса функции f . Положив $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, интеграл Вейерштрасса запишем в виде [1].

$$W_\delta(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\delta}} \cos kt \right\} dt, \quad \delta > 0.$$

В данной работе изучается асимптотическое поведение величин

$$E(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C = \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \|f(x) - W_\delta(f; x)\|_C, \quad \delta \rightarrow \infty.$$

Если в явном виде найдена функция $g(\delta) = g(W_\delta; \delta)$, такая, что при $\delta \rightarrow \infty$

$$E(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C = g(\delta) + o(g(\delta)),$$

то, следуя А.И. Степанцу [2], будем говорить, что решена задача Колмогорова-Никольского для интеграла Вейерштрасса W_δ на классе $W_\beta^r H^\alpha$ в равномерной метрике.

Для интеграла Вейерштрасса введем функцию

$$\tau(u) = \tau_\delta(u) = \begin{cases} (1 - e^{-u^2}) \delta^{\frac{r}{2}}, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \\ (1 - e^{-u^2}) u^{-r}, & u \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}. \end{cases} \quad (1)$$

Приведем некоторые дополнительные определения и утверждения, которые будут необходимы нам для дальнейшей работы.

Определение 1' [2]. Пусть функция $\tau(u)$ задана на $[0, \infty)$, абсолютно непрерывна, $\tau(\infty) = 0$ и $0 \leq \alpha \leq 1$. Говорят, что функция $\tau(u) \in E_\alpha$, если производную $\tau'(u)$ в тех точках, где она не существует, можно доопределить так, чтобы существовали интегралы

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\tau(u)|.$$

Далее договоримся через $K, K_i, i = 1, 2, \dots$ — обозначать постоянные, вообще говоря, не одни и те же в разных соотношениях.

Теорема 1' [2]. Пусть $\tau(u) \in E_\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$), $\sin \frac{\beta\pi}{2} \tau(0) = 0$ и

$$\xi(A, B) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} |A|, & |B| \leq |A|, \\ |A| \arcsin \left| \frac{A}{B} \right|, & |B| > |A|. \end{cases}$$

Для сходимости интеграла $A(\alpha, \tau)$ вида

$$A(\alpha, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha \left| \int_0^\infty \tau(u) \cos \left(ut + \frac{\beta\pi}{2} \right) du \right| dt \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы сходились интегралы

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^\infty \frac{\tau(u)}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du,$$

при этом справедливы оценки:

$$\begin{aligned} & \left| A(\alpha, \tau) - \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \xi \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \tau(u), |\tau(a+u) - \tau(a-u)| \right) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \right| \leq KH(\alpha, \tau); \\ & \left| A(\alpha, \tau) - \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du \right| \leq K \left(\int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du + H(\alpha, \tau) \right); \\ & \left| A(\alpha, \tau) - \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du \right| \leq K \left(\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du + H(\alpha, \tau) \right); \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$H(\alpha, \tau) = |\tau(0)| + |\tau(1)| + \int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau(u)| + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau(u)| + \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\tau(u)|. \quad (4)$$

Утверждение 1' [3]. Если $\tau(u) \in E_\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$), то

$$|\tau(u)| \leq KH(\alpha, \tau), \quad \int_0^\infty |\tau'(u)| du \leq KH(\alpha, \tau),$$

где величина $H(\alpha, \tau)$ определяется равенством (4), K — некоторая постоянная.

Теорема 2'[2]. Пусть $\tau(u) \in E_\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$), $u \rightarrow \infty$ и интеграл $A(\alpha, \tau)$ сходится. Если при $r = \beta = 0$ $\tau(u) = \lambda(u)$. Тогда при $\delta \rightarrow \infty$

$$E(W_\beta^r H^\alpha; U_\delta)_C = \frac{\gamma(\alpha)}{\delta^{r+\alpha}} A(\alpha, \tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}} a(\alpha, \tau)\right),$$

$$2^{\alpha-1} \leq \gamma(\alpha) \leq 1,$$

где

$$a(\alpha, \tau) = \int_{|t| \geq \frac{\delta\pi}{2}} |t|^\alpha \left| \int_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt.$$

2. Приближение функций с классов $W_\beta^r H^\alpha$ их интегралами Вейерштрасса

В принятых выше обозначениях имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Для функции $\tau(u)$, определенной при помощи соотношения (1), при $r + \alpha \leq 2$ и $\delta \rightarrow \infty$ имеет место равенство

$$E(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C = \frac{\gamma(\alpha)}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} A(\alpha, \tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1+r}{2}}} + \frac{1}{\delta^2}\right), \quad (5)$$

$$2^{\alpha-1} \leq \gamma(\alpha) \leq 1,$$

где величина $A(\alpha, \tau)$ определена при помощи соотношения (2) и для нее справедлива оценка

$$A(\alpha, \tau) = \begin{cases} O(1), & r + \alpha < 2, \\ O(\ln \delta), & r + \alpha = 2. \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство.

Для сходимости интеграла $A(\alpha, \tau)$, согласно теореме 1', достаточно показать сходимость интегралов

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^\infty (u-1) |d\tau'(u)|, \quad (7)$$

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du. \quad (8)$$

Для оценки первого интеграла с (7) разобьем промежуток $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ на две части:

$$\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right] \text{ и } \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{1}{2}\right].$$

Так как при $u \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ $\tau''(u) = 2e^{-u^2} \delta^{\frac{r}{2}} (1-2u^2) \geq 0$ и учитывая неравенство

$$e^{-u^2} \leq 1, \quad u \in R,$$

получим

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} d\tau'(u) \leq 2\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} (u^{1-\alpha} - 2u^{3-\alpha}) du = O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1-r+\alpha}{2}}}\right). \quad (9)$$

Пусть теперь $u \in \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{1}{2}\right]$. Положим

$$\tau_1(u) = (1 - e^{-u^2} - u^2)u^{-r}, \quad \tau_2(u) = u^{2-r},$$

тогда

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'_1(u)| + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'_2(u)|. \quad (10)$$

Найдем оценку первого интеграла в правой части неравенства (10). Так как

$$\tau_1''(u) = r(1+r)(1-e^{-u^2}-u^2)u^{-r-2} - 4ru^{-r}(e^{-u^2}-1) + 2(e^{-u^2}-2u^2e^{-u^2}-1)u^{-r},$$

и учитывая неравенства

$$e^{-u^2} + u^2 - 1 \leq \frac{u^4}{2}, \quad 1 - e^{-u^2} \leq u^2, \quad 2u^2e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1 \leq 3u^2, \quad (11)$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'_1(u)| &\leq r(1+r) \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{-1-r-\alpha} (-1 + e^{-u^2} + u^2) du + 4r \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha} (1 - e^{-u^2}) du + \\ &+ 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha} (-e^{-u^2} + 2u^2e^{-u^2} + 1) du \leq \frac{r(1+r)}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha} du + 4r \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha} du + 6 \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha} du = \\ &= O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right) = O(1). \end{aligned} \quad (12)$$

Найдем оценку второго интеграла в правой части неравенства (10). Так как

$$\tau_2''(u) = (2-r)(1-r)u^{-r} > 0, \text{ то}$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'_2(u)| \leq (2-r)(1-r) \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha} du = \begin{cases} O\left(1 + \frac{1}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}\right), & r+\alpha < 2 \\ O(\ln \delta), & r+\alpha = 2 \end{cases} = \begin{cases} O(1), & r+\alpha < 2, \\ O(\ln \delta), & r+\alpha = 2. \end{cases} \quad (13)$$

Учитывая (8), (9), (11) и (12), имеем

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| = \begin{cases} O(1), & r+\alpha < 2, \\ O(\ln \delta), & r+\alpha = 2. \end{cases} \quad (14)$$

Оценим второй интеграл с (7). Учитывая, что согласно (1) при $u \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}$

$$\tau''(u) = (2-4r)e^{-u^2}u^{-r} - 4e^{-u^2}u^{2-r} + r(1+r)(1-e^{-u^2})u^{-2-r}, \quad (15)$$

а также неравенства

$$e^{-u^2} \leq 1, \quad 1 - e^{-u^2} \leq u^2, \quad (16)$$

получим, что

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau'(u)| \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| = O(1). \quad (17)$$

Используя соотношение (15) и неравенства

$$1 - e^{-u^2} \leq 1, \quad u^2 e^{-u^2} \leq K_1, \quad u^4 e^{-u^2} \leq K_2,$$

оценим третий интеграл с (7)

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\tau'(u)| \leq \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u |d\tau'(u)| = O(1). \quad (18)$$

Для оценки первого интеграла с (8) разобьем промежутки $[0, \infty)$ на три части:

$$\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right], \quad \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right], \quad [1, \infty).$$

Пусть $u \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$. Учитывая (1) и второе неравенство из (11), будем иметь, что

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{(1-e^{-u^2})\delta^{\frac{r}{2}}}{u^{1+\alpha}} du \leq \delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} du = O\left(\frac{1}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}\right) = O(1). \quad (19)$$

Согласно (1), в случае, когда $u \in \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$, получим

$$\left| \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du - \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{u^{2-r}}{u^{1+\alpha}} du \right| \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|1-e^{-u^2}-u^2|}{u^{1+\alpha}} u^{-r} du \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{u^4}{2u^{1+\alpha}} u^{-r} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right) = O(1).$$

Отсюда,

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{u^{2-r}}{u^{1+\alpha}} du + O(1) = \begin{cases} O\left(1 + \frac{1}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}\right), & r+\alpha < 2 \\ -\frac{1}{2} \ln \delta + O(1), & r+\alpha = 2. \end{cases} \quad (20)$$

Пусть, наконец, $u \in [1, \infty)$. Так как имеет место первое неравенство с (11), то

$$\left| \int_1^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du - \int_1^{\infty} \frac{u^{-r}}{u^{1+\alpha}} du \right| \leq \int_1^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^{1+\alpha}} u^{-r} du \leq \int_1^{\infty} u^{-1-r-\alpha} du = O(1).$$

Отсюда,

$$\int_1^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_1^{\infty} \frac{u^{-r}}{u^{1+\alpha}} du + O(1) = O(1). \quad (21)$$

Соединив формулы (18)–(20), получим

$$\int_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \begin{cases} O(1), & r+\alpha < 2, \\ -\frac{1}{2} \ln \delta + O(1), & r+\alpha = 2. \end{cases} \quad (22)$$

Для того, чтоб оценить второй интеграл с (8), отметим, что при $\bar{\lambda}(u) = e^{-u^2}$ и $\delta \rightarrow \infty$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du &= \int_0^1 \frac{|\bar{\lambda}(1-u) - \bar{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du + \\ &+ \left(\left| \tau(0) \right| + \left| \tau(1) \right| + \int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau'(u)| + \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\tau'(u)| \right). \end{aligned} \quad (23)$$

И, так как

$$\int_0^1 \frac{|\bar{\lambda}(1-u) - \bar{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O(1), \quad (24)$$

то, учитывая соотношения (12), (15)–(16), (21)–(22), получаем

$$\int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \begin{cases} O(1), & r+\alpha < 2, \\ O(\ln \delta), & r+\alpha = 2. \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом, в силу теоремы 1', преобразование Фурье функции $\tau(u)$, заданной в виде (1), суммируемое на всей числовой оси. С неравенств (3) и с учетом формул (22), (25), (14), (17), (18) получим соотношение (6).

Так как для функции $\tau(u)$, заданной при помощи соотношения (1), выполняются все условия теоремы 2', а именно, согласно выше доказанного, функция $\tau(u) = \tau_\delta(u) \in E_\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$) и интеграл $A(\alpha, \tau)$ сходится. Поэтому, согласно теоремы 2', будет иметь место равенство

$$E(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C = \frac{\gamma(\alpha)}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} A(\alpha, \tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} a(\alpha, \tau)\right), \quad (26)$$

$$2^{\alpha-1} \leq \gamma(\alpha) \leq 1,$$

где

$$a(\alpha, \tau) = \int_{|t| \geq \frac{\delta\pi}{2}} |t|^\alpha \left| \int_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt. \quad (27)$$

Оценим интеграл $a(\alpha, \tau)$ виду (27). Для этого представим преобразование Фурье $\hat{\tau}(t)$ в виде

$$\hat{\tau}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty \right) \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du. \quad (28)$$

Проинтегрируем дважды по частям интегралы в правой части равенства (28)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \frac{1}{t} \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) \delta^{\frac{r}{2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta}} \delta^{\frac{r}{2}} \frac{1}{t^2} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$- \frac{1}{t^2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du, \quad (29)$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \frac{-1}{t} \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) \delta^{\frac{r}{2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$- \left(\frac{2}{\delta^{\frac{1-r}{2}}} e^{-\frac{1}{\delta}} - r \delta^{\frac{1+r}{2}} \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) \right) \frac{1}{t^2} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{t^2} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du. \quad (30)$$

Подставив (28), (29) в (27), получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \frac{1}{\pi t^2} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} + \frac{\beta\pi}{2}\right) r \delta^{\frac{1+r}{2}} \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) - \frac{1}{\pi t^2} \int_0^\infty \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du.$$

Отсюда

$$\left| \int_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| \leq \frac{1}{\pi t^2} \int_0^\infty |\tau''(u)| du + \frac{1}{t^2} \frac{K}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}. \quad (31)$$

Для оценки интеграла с правой части неравенства (31) разобьем промежуток $[0, \infty)$ на три части: $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$, $[1, \infty)$ и проведем размышления аналогичные, как и при оценке первого интеграла с (9).

Учитывая, что $\tau''(u) \geq 0$ на $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ и первое неравенство с (16), получим

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\tau''(u)| du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \tau''(u) du = 2\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} e^{-u^2} (1-2u^2) du \leq 2\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} (1-2u^2) du = O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}\right) \quad (32)$$

Пусть $u \in \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$. Размышляя, как и при оценивании первого интеграла с (7) на промежутке $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{1}{2}\right]$, можно показать справедливость оценки

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 |\tau''(u)| du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}\right), \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Если $u \in [1, \infty)$, то

$$\int_1^{\infty} |\tau''(u)| du = O(1). \quad (34)$$

Объединив формулы (31)–(34), получим

$$\left| \int_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| = \frac{1}{t^2} O\left(1 + \frac{1}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}\right).$$

Отсюда,

$$\int_{|t| \geq \frac{\delta\pi}{2}} |t|^\alpha \left| \int_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt = O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1-\alpha}{2}}} + \frac{1}{\delta^{\frac{2-(r+\alpha)}{2}}}\right). \quad (35)$$

Из соотношений (26), (35) вытекает равенство (5). Теорема доказана.

Теорема 2. При $r > 2$, $0 \leq \alpha < 1$ и $\delta \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$E(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C = \frac{1}{\delta} \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \|f''(x)\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} + \frac{1}{\delta^2}\right). \quad (36)$$

Доказательство. Подадим функцию $\tau(u)$, заданную при помощи соотношения (1), в виде $\tau(u) = \varphi(u) + \mu(u)$, где

$$\varphi(u) = \begin{cases} u^2 \delta^{\frac{r}{2}}, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \\ u^{2-r}, & u \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \end{cases} \quad (37)$$

$$\mu(u) = \begin{cases} (1 - e^{-u^2} - u^2) \delta^{\frac{r}{2}}, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \\ (1 - e^{-u^2} - u^2) u^{-r}, & u \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}. \end{cases} \quad (38)$$

Убедимся в суммируемости преобразований $\hat{\varphi}(t)$ и $\hat{\mu}(t)$ функций $\varphi(u)$ и $\mu(u)$ вида

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du, \quad (39)$$

$$\hat{\mu}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du. \quad (40)$$

Для сходимости интеграла $A(\alpha, \varphi)$, согласно теореме 1', достаточно показать сходимость интегралов

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\varphi'(u)|, \quad (41)$$

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du. \quad (42)$$

Для первого интеграла с (41) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| = 2\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} du + (2-r)(1-r) \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha} du = \\ &= O\left(1 + \frac{1}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \end{aligned} \quad (43)$$

Так как функция $|u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|$ непрерывная на отрезке $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, то она ограниченная на этом отрезке. Поэтому

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| = O(1). \quad (44)$$

Оценим третий интеграл с (41):

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\varphi'(u)| \leq \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u |d\varphi'(u)| = (2-r)(1-r) \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u^{1-r} du = O(1). \quad (45)$$

Для оценки первого интеграла с (42) разобьем промежутки $[0, \infty)$ на три части:

$\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$, $[1, \infty)$. Получим

$$\int_0^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} du + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 u^{1-r-\alpha} du + \int_1^{\infty} u^{1-r-\alpha} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \quad (46)$$

Для второго интеграла с (42) имеет место равенство

$$\int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|(1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|(1-u)^{2-r} - (1+u)^{2-r}|}{u^{1+\alpha}} du.$$

Так как

$$\frac{|(1-u)^{2-r} - (1+u)^{2-r}|}{u} \leq K,$$

то

$$\int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du \leq K \left(\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \right) u^{-\alpha} = O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1-r-\alpha}{2}}}\right). \quad (47)$$

Таким образом, учитывая соотношения (42)–(47), в силу теоремы 1' преобразование Фурье функции $\varphi(u)$, заданное в виде (39), суммируемо на всей числовой оси.

Для того, чтоб оценить величину $A(\alpha, \mu)$, согласно сформулированной выше теореме 1', достаточно найти оценки следующих интегралов:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\mu'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\mu'(u)|, \quad (48)$$

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du. \quad (49)$$

Исследуем первый интеграл с (48). Для этого разобьем промежуток $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ на две части: $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{1}{2}\right]$. Учитывая третье неравенство с (11) и то, что при $u \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ $\mu''(u) \leq 0$, получим

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| = 2\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} (2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1) du \leq 6\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{3-\alpha} du = O\left(\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \quad (50)$$

Найдем оценку этого интеграла на промежутке $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{1}{2}\right]$. Из равенства (38) имеем

$$\mu''(u) = (1 - e^{-u^2} - u^2)r(r+1)u^{-r-2} + 4(-r)u(e^{-u^2} - 1)u^{-r-1} + 2u^{-r}(e^{-u^2} - 2u^2 e^{-u^2} - 1).$$

Можно убедиться, что $\mu''(u) \leq 0$, когда $u \in \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{1}{2}\right]$. Тогда, учитывая неравенства (11) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| &\leq r(r+1) \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} (u^2 + e^{-u^2} - 1)u^{-1-r-\alpha} du + 4r \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} (1 - e^{-u^2})u^{1-r-\alpha} du + \\ &+ 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} (2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1)u^{1-r-\alpha} du \leq K \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha} du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \end{aligned} \quad (51)$$

Из соотношений (50), (51) вытекает

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \quad (52)$$

Аналогично, как и при оценивании второго интеграла с (41), получим

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\mu'(u)| = O(1). \quad (53)$$

Из неравенств

$$e^{-u^2} \leq 1, \quad 1 - e^{-u^2} \leq 1, \quad u^2 e^{-u^2} \leq K_1$$

вытекает

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\mu'(u)| \leq K \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u^{-r+1} du = O(1). \quad (54)$$

Для оценки первого интеграла с (49) разобьем промежутки $[0, \infty)$ на три части:

$\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$, $[1, \infty)$. Используя первые неравенства с (11) и (16), получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du &= \delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{e^{-u^2} + u^2 - 1}{u^{1+\alpha}} du + \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 + \int_1^\infty \right) (e^{-u^2} + u^2 - 1) u^{-1-r-\alpha} du \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{3-\alpha} du + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 u^{3-r-\alpha} du + \int_1^\infty u^{1-r-\alpha} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{\frac{2-r+\alpha}{2}}}\right). \end{aligned} \quad (55)$$

Оценим второй интеграл с (49). Из соотношения (38) найдем вид функций $\mu(1-u)$ и $\mu(1+u)$.

$$\mu(1-u) = \begin{cases} (1 - e^{-(1-u)^2} - (1-u)^2) \delta^{\frac{r}{2}}, & 1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \leq u \leq 1, \\ (1 - e^{-(1-u)^2} - (1-u)^2)(1-u)^{-r}, & u \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \end{cases} \quad (56)$$

$$\mu(1+u) = \begin{cases} (1 - e^{-(1+u)^2} - (1+u)^2) \delta^{\frac{r}{2}}, & -1 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} - 1, \\ (1 - e^{-(1+u)^2} - (1+u)^2)(1+u)^{-r}, & u \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}} - 1. \end{cases} \quad (57)$$

Подадим второй интеграл с (49) в виде суммы двух интегралов

$$\int_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du + \int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du. \quad (58)$$

Оценим сначала первое слагаемое правой части равенства (58). С этой целью, додадим и отнимем под знаком модуля в подынтегральной функции величину

$$e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2.$$

Получим

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du &\leq \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left| e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2 \right|}{u^{1+\alpha}} du + \\ &+ \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left| \mu(1-u) - \mu(1+u) + e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2 \right|}{u^{1+\alpha}} du. \end{aligned} \quad (59)$$

Для первого интеграла с правой части неравенства (58) есть очевидная оценка

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left| e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2 \right|}{u^{1+\alpha}} du \leq K \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{-\alpha} du = O(1). \quad (60)$$

Дальше, так как имеют место соотношения (56) и (57), то при $u \in \left[0, 1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$

$$e^{-(1-u)^2} = 2u - u^2 - (1-u)^r \mu(1-u), \quad e^{-(1+u)^2} = 2u - u^2 - (1+u)^r \mu(1+u).$$

Тогда

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left| \mu(1-u) - \mu(1+u) + e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2 \right|}{u^{1+\alpha}} du \leq$$

$$\leq \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\mu(1-u)| |1-(1-u)^r| \frac{du}{u^{1+\alpha}} + \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\mu(1+u)| |1-(1+u)^r| \frac{du}{u^{1+\alpha}}. \quad (61)$$

Так как функция $\mu(u)$ виду (38), принадлежит множеству E_α , то согласно утверждению 1' будем иметь, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\mu(1-u)| |1-(1-u)^r| \frac{du}{u^{1+\alpha}} + \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\mu(1+u)| |1-(1+u)^r| \frac{du}{u^{1+\alpha}} = \\ & = H(\alpha, \mu) O \left(\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|1-(1-u)^r| du}{u^{1+\alpha}} + \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|1-(1+u)^r| du}{u^{1+\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (62)$$

Покажем, что при $\delta \rightarrow \infty$

$$I_{1,\delta} := \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|1-(1-u)^r| du}{u^{1+\alpha}} = O(1), \quad (63)$$

$$I_{2,\delta} := \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|1-(1+u)^r| du}{u^{1+\alpha}} = O(1). \quad (64)$$

Действительно, функция $\frac{1-(1-u)^r}{u}$ ограниченная при всех $u \in \left[\sqrt{\delta}; 1-\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right]$, $0 < \delta < 1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}$ и кроме того,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1-(1-u)^r}{u} &= \lim_{u \rightarrow 0} r(1-u)^{r-1} = O(1), \\ \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{-\alpha} du &= O(1). \end{aligned}$$

Итак, $I_{1,\delta} = O(1)$, $\delta \rightarrow \infty$.

Аналогично, можно доказать, что $I_{2,\delta} = O(1)$.

Объединение соотношений (61)–(64) позволяет записать, что

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u) + e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du = H(\alpha, \mu) O(1), \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (65)$$

Для величины $H(\alpha, \mu)$ виду (4), согласно с (52)–(54), справедлива оценка

$$H(\alpha, \mu) = O \left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}} \right). \quad (66)$$

Итак, при $\delta \rightarrow \infty$

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u) + e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du = O \left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}} \right). \quad (67)$$

Учитывая (59)–(61), получаем

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O \left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}} \right). \quad (68)$$

Оценим второе слагаемое из правой части равенства (58). Имеем

$$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du +$$

$$+ O \left(\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u) + e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du \right). \quad (69)$$

Из соотношений (55), (57) при $u \in \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$ вытекают равенства

$$e^{-(1-u)^2} = 2 - u^2 - \delta^{-\frac{r}{2}} \mu(1-u), \quad e^{-(1+u)^2} = 2 - u^2 - \delta^{-\frac{r}{2}} \mu(1+u). \quad (70)$$

Учитывая (70) и в силу утверждения 1', находим, что

$$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u) + e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du \leq$$

$$\leq \int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \left| \mu(1-u)(1 - \delta^{-\frac{r}{2}}) - \mu(1+u)(1 - (1+u)^r) + (1-u)^2 - (1+u)^2 \right| \frac{du}{u^{1+\alpha}} =$$

$$= H(\alpha, \mu) O \left(\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|1 - \delta^{-\frac{r}{2}}|}{u^{1+\alpha}} du + \int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|1 - (1+u)^r|}{u^{1+\alpha}} du \right). \quad (71)$$

Далее получаем

$$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|1 - \delta^{-\frac{r}{2}}|}{u^{1+\alpha}} du = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^\alpha} - 1 \right) = O(1). \quad (72)$$

Повторяя размышления, приведенные при установлении оценки (65), можно показать, что при $\delta \rightarrow \infty$

$$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|1 - (1+u)^r|}{u^{1+\alpha}} du = O(1). \quad (73)$$

Объединив соотношения (69)–(72), учитывая (66) и тот факт, что

$$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du = O(1),$$

получаем такую оценку

$$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O \left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}} \right).$$

Из равенства (58) на основе оценок (67), (68) имеем

$$\int_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O \left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}} \right). \quad (74)$$

Согласно теореме 1', с учетом соотношений (55), (66) и (74), получим

$$A(\alpha, \mu) = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \quad (75)$$

Аналогично к соотношению (1.1) работы [5] можно показать, что ряд Фурье функции

$$f_\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) \widehat{\varphi}(t) dt$$

имеет вид

$$S[f_\varphi] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \delta^{\frac{r}{2}-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\delta}\right) \widehat{\varphi}(t) dt = -\frac{1}{\delta^{\frac{1-r}{2}}} f''(x). \quad (76)$$

Как показано в [3] имеет место равенство

$$f(x) - W_\delta(f, x) = \delta^{-\frac{r}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) - f_\beta^r(x) \right) \widehat{\tau}(t) dt.$$

Отсюда, учитывая данное равенство и то, что $f(x) \in W_\beta^r H^\alpha$, получаем

$$\begin{aligned} E(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C &= \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \delta^{-\frac{r}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) - f_\beta^r(x) \right) \widehat{\tau}(t) dt \right\|_C = \\ &= \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \delta^{-\frac{r}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) - f_\beta^r(x) \right) (\widehat{\varphi}(t) + \widehat{\mu}(t)) dt \right\|_C \leq \\ &\leq \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \delta^{-\frac{r}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) - f_\beta^r(x) \right) \widehat{\varphi}(t) dt \right\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} A(\alpha, \mu)\right). \end{aligned} \quad (77)$$

Подставляя (75), (76) в (77) получим равенство (36). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харкевич, Ю.І. Наближення (ψ, β) -диференційовних функцій інтегралами Вейерштрасса / Ю.І. Харкевич, І.В. Кальчук // Укр. мат. журн. – 2007. – Т.59, №7. – С.953–978.
2. Степанец, А.И. Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. – Киев : Наук. Думка, 1987. – 268 с.
3. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, II / Л.И. Баусов // Изв. вузов. – 1996. – Т. 46, № 3. – С.15–31.
4. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, I / Л.И. Баусов // Изв. вузов. – 1996. – Т. 55, № 6. – С.5–17.
5. Новикова, А.К. О приближении функций в пространствах C и L / А.К. Новикова // Вопросы суммирования рядов Фурье. – Киев, 1985. – С.14–51. – (Препринт /АН УССР Ин-т математики ; 85.61).

I.V. Kalchuk, U.Z. Grabova, T.A. Stepanyuk. Approximative Properties of Integrals of Weierstrass on Classes $W_\beta^r H^\alpha$

The article is devoted to the solution of one of the problem of the Approximation's Theory, the problem of researching approximating properties of Weierstrass'es integrals on classes $W_{\beta}^r H^{\alpha}$. The asymptotic equalities are obtained for upper borders of deflection of functions of the classes $W_{\beta}^r H^{\alpha}$ from Weierstrass'es integrals.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 15.09.2010 г.