

УДК 512.542

DOI 10.63874/2218-0303-2025-1-73-84

**Полина Александровна Павлушко<sup>1</sup>, Александр Александрович Трофимук<sup>2</sup>**<sup>1</sup>студент 4-го курса физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>д-р физ.-мат. наук, доц., зав. каф. фундаментальной математики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Polina Pavlushko<sup>1</sup>, Alexander Trofimuk<sup>2</sup>**<sup>1</sup>4-th Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics  
of Brest State A. S. Pushkin University<sup>2</sup>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Head of the Department of Fundamental Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: <sup>1</sup>polinapavlushko@gmail.com; <sup>2</sup>alexander.trofimuk@gmail.com**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДААННЫМИ СИСТЕМАМИ  $tcc_n$ -ПОДГРУПП\***

Подгруппы  $A$  и  $B$  группы  $G$  называются  $cc$ -перестановочными в  $G$ , если  $A$  перестановочна с  $B^g$  для некоторого элемента  $g \in \langle A, B \rangle$ . Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется  $tcc_n$ -подгруппой в  $G$ , если в  $G$  существует подгруппа  $T$  такая, что  $G = AT$  и каждая нормальная подгруппа из  $A$   $cc$ -перестановочна с каждой подгруппой из  $T$ . В работе доказана сверхразрешимость группы  $G$ , факторизуемой сверхразрешимыми  $tcc_n$ -подгруппой  $A$  и  $B$ . Кроме того, установлена сверхразрешимость группы, у которой максимальные, силовские, максимальные из силовских, минимальные, 2-максимальные подгруппы являются  $tcc_n$ -подгруппами.

**Ключевые слова:**  $tcc_n$ -подгруппа, максимальная подгруппа, силовская подгруппа, минимальная подгруппа, факторизуемая группа, сверхразрешимая группа.

**Finite Groups with Given Systems of  $tcc_n$ -Subgroups**

The subgroups  $A$  and  $B$  are said to be  $cc$ -permutable, if  $A$  permutes with  $B^g$  for some  $g \in \langle A, B \rangle$ . A subgroup  $A$  of a finite group  $G$  is called  $tcc_n$ -subgroup of  $G$ , if there exists a subgroup  $T$  of  $G$  such that  $G = AT$  and every normal subgroup of  $A$  is  $cc$ -permutable with all subgroups of  $T$ . In this paper we proved the supersolubility of the group  $G$  factorized by supersoluble  $tcc_n$ -subgroups  $A$  and  $B$ . In addition, we obtained the supersolubility of a group whose maximal, Sylow, maximal of Sylow, minimal, 2-maximal subgroups are  $tcc_n$ -subgroups.

**Key words:**  $tcc_n$ -subgroup, maximal subgroup, Sylow subgroup, minimal subgroup, factorizable group, supersoluble group.

**Введение**

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует в [1; 2]. Запись  $H \leq G$  означает, что  $H$  – подгруппа группы  $G$ . Если  $H \leq G$  и  $H \neq G$ , то пишем  $H < G$ . Запись  $H \trianglelefteq G$  означает, что  $H$  – нормальная подгруппа группы  $G$ .

Подгруппы  $A$  и  $B$  группы  $G$  называются *перестановочными*, если  $AB = BA$ . Заметим, что равенство  $AB = BA$  равносильно тому, что  $AB \leq G$ . Подгруппы  $A$  и  $B$  группы  $G$  называются  *$cc$ -перестановочными в  $G$  (условно перестановочными)* [3], если  $A$  перестановочна с  $B^g$  для некоторого элемента  $g \in \langle A, B \rangle$ .

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», номера государственной регистрации 20211467).

В последнее десятилетие активно развивается направление, связанное с изучением строения групп с заданными системами условно перестановочных подгрупп. Очевидно, что если в группе подгруппа перестановочна со всеми подгруппами группы, то она перестановочна и со всеми подгруппами из добавления к ней. Так, в работе [4] введено понятие тсс-подгруппы (подгруппа  $A$  группы  $G$  называется тсс-подгруппой в группе  $G$ , если в  $G$  существует подгруппа  $Y$  такая, что  $G = AY$  и каждая подгруппа из  $A$  сс-перестановочна с каждой подгруппой из  $Y$ . В [4] также получен целый ряд признаков сверхразрешимости группы с заданными системами тсс-подгрупп.

Сузив множество перестановочных подгрупп из подгруппы и добавления к ней, введем следующее

**Определение.** Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется тсс <sub>$n$</sub> -подгруппой в  $G$ , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) в  $G$  существует подгруппа  $T$  такая, что  $G = AT$ ;
- 2) каждая нормальная подгруппа из  $A$  сс-перестановочна с каждой подгруппой из  $T$ .

Подгруппа  $T$  в определении будем называть тсс <sub>$n$</sub> -добавлением к  $A$  в  $G$ . Очевидно, что каждая тсс-подгруппа группы  $G$  является тсс <sub>$n$</sub> -подгруппой группы  $G$ , но обратное не всегда выполняется. Например, в симметрической группе  $S_4$  знакопеременная подгруппа  $A_4$  является тсс <sub>$n$</sub> -подгруппой в  $G$ , но не является тсс-подгруппой.

Доказана следующая теорема.

**Теорема 1.**

1. Пусть  $A$  и  $B$  – тсс <sub>$n$</sub> -подгруппы группы  $G$  и  $G = AB$ . Если  $A$  и  $B$  сверхразрешимы, то  $G$  сверхразрешима.
2. Пусть  $G = AB$  – произведение подгрупп  $A$  и  $B$ . Если все силовские подгруппы из  $A$  и из  $B$  являются тсс <sub>$n$</sub> -подгруппами в  $G$ , то  $G$  сверхразрешима.

**Следствие 1.1.**

Пусть  $A$  и  $B$  – тсс <sub>$n$</sub> -подгруппы группы  $G$  и  $G = AB$ . Если  $A$  и  $B$   $p$ -сверхразрешимы, то  $G$   $p$ -сверхразрешима.

Из теоремы 1 и следствия 1.1 вытекают результаты работ [3–6], представленных в следствии 1.2.

**Следствие 1.2.**

1. Пусть  $G = AB$  – тотально перестановочное произведение сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда  $G$  сверхразрешима [5, теорема 3.1].
2. Пусть  $G = AB$  – тсс-перестановочное произведение сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда  $G$  сверхразрешима [3, теорема А].
3. Пусть  $G = AB$  – произведение сверхразрешимых тсс-подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда  $G$  сверхразрешима [4, теорема 4.1].
4. Пусть  $G = AB$  – тотально перестановочное произведение  $p$ -сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда  $G$   $p$ -сверхразрешима [6, лемма \*].
5. Пусть  $G = AB$  – тсс-перестановочное произведение  $p$ -сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда  $G$   $p$ -сверхразрешима [5, теорема 4.1].
6. Пусть  $G = AB$  – произведение  $p$ -сверхразрешимых тсс-подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда  $G$   $p$ -сверхразрешима [4, теорема 4.1].

7. Если все силовские подгруппы из  $A$  и из  $B$  являются тсс-подгруппами в  $G = AB$ , то  $G$  сверхразрешима [4, теорема 4.2].

Группы, у которых 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп, минимальные подгруппы удовлетворяют некоторому типу перестановочности, исследовались многими авторами (например, список литературы в [7; 8]).

В теореме 2 изучено строение конечной группы, у которой 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп или все минимальные подгруппы являются тсс<sub>n</sub>-подгруппами.

### **Теорема 2.**

1. Если каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из  $G$  является тсс<sub>n</sub>-подгруппой в  $G$ , то группа  $G$  сверхразрешима.

2. Если каждая 2-максимальная подгруппа из  $G$  является тсс<sub>n</sub>-подгруппой в  $G$ , то группа  $G$  сверхразрешима.

3. Если каждая максимальная подгруппа из каждой нециклической силовской подгруппы разрешимой группы  $G$  является тсс<sub>n</sub>-подгруппой в  $G$ , то группа  $G$  сверхразрешима.

### **Следствие 2.1.**

1. Если каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из  $G$  является тсс-подгруппой в  $G$ , то группа  $G$  сверхразрешима [4, теорема 5.2].

2. Если каждая 2-максимальная подгруппа из  $G$  является тсс-подгруппой в  $G$ , то группа  $G$  сверхразрешима [4, теорема 5.3].

3. Если каждая максимальная подгруппа из каждой нециклической силовской подгруппы разрешимой группы  $G$  является тсс-подгруппой в  $G$ , то группа  $G$  сверхразрешима [4, теорема 5.1].

4. Если каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из  $G$  является тсс-перестановочной в  $G$ , то группа  $G$  сверхразрешима [3, теорема 3.10].

5. Если каждая 2-максимальная подгруппа из  $G$  является тсс-перестановочной в  $G$ , то группа  $G$  сверхразрешима [3, теорема 3.10].

### **Вспомогательные результаты**

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах.

Через  $G'$ ,  $Z(G)$ ,  $F(G)$  и  $\Phi(G)$  обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы  $G$  соответственно;  $O_p(G)$  и  $O_{p'}(G)$  – наибольшие нормальные в  $G$   $p$ - и  $p'$ -подгруппы соответственно;  $\pi(G)$  – множество всех простых делителей порядка группы  $G$ . Элементарная абелева группа порядка  $p^t$  и циклическая группа порядка  $m$  обозначаются  $E_{p^t}$  и  $Z_m$  соответственно, а  $[A]B$  – полупрямое произведение нормальной подгруппы  $A$  и подгруппы  $B$ .

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобятся следующие утверждения.

**Лемма 2.1** ([9, лемма 6]). *Предположим, что разрешимая группа  $G$  несверхразрешима, но фактор-группа  $G/K$  сверхразрешима для каждой неединичной нормальной в  $G$  подгруппы  $K$ . Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) группа  $G$  содержит единственную минимальную нормальную подгруппу  $N$ ,  $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$  для некоторого  $p \in \pi(G)$ ;

(2)  $Z(G) = O_p(G) = \Phi(G) = 1$ ;

(3)  $G$  – примитивная группа;  $G = [N]M$ , где  $M$  – максимальная подгруппа в группе  $G$  с единичным ядром;

(4)  $N$  – элементарная абелева подгруппа порядка  $p^n$ ,  $n > 1$ ;

(5) если подгруппа  $M$  абелева, то  $M$  циклическая порядка, делящего  $p^n - 1$ , а  $n$  – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению  $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$ .

**Лемма 2.2** ([10, лемма 3.5]). Если в разрешимой группе  $G$  существует подгруппа  $H$  простого индекса, то  $G/H_G$  сверхразрешима.

Напомним, что подгруппа  $A$  называется полунормальной в группе  $G$ , если существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = AB$  и  $AX$  – подгруппа для каждой подгруппы  $X$  из  $B$ .

**Лемма 2.3** ([11, лемма 10]). Если  $A$  – полунормальная 2-нильпотентная подгруппа группы  $G$ , то подгруппа  $A^G$  разрешима.

**Лемма 2.4** ([13, теорема]). Пусть  $G$  – группа и  $H$  – подгруппа в  $G$ . Предположим, что для каждого простого  $p$ , делящего порядок группы  $G$ , существует силовская  $p$ -подгруппа  $G_p$  группы  $G$  такая, что  $H$  субнормальна в  $\langle H, G_p \rangle$ . Тогда  $H$  субнормальна в  $G$ .

**Лемма 2.5** ([14, теорема 2]). Пусть  $G$  – группа,  $p \in \pi(G)$ ,  $p \neq 3$ . Если существует  $\{p, r\}$ -холлова подгруппа для каждого  $r \in \pi(G)$ , то  $G$   $p$ -разрешима.

**Лемма 2.6**

(1)  $A$  –  $\text{tcc}_n$ -подгруппа в  $H$  для каждой подгруппы  $H$  группы  $G$  такой, что  $A \leq H$ ;

(2)  $AN/N$  –  $\text{tcc}_n$ -подгруппа в  $G/N$  для каждой  $N \trianglelefteq G$ ;

(3) для каждой  $A_i \trianglelefteq A$  и  $X \leq Y$  существует  $y \in Y$  такой, что  $A_i X^y \leq G$ . В частности,  $A_i M \leq G$  для некоторой максимальной подгруппы  $M$  группы  $Y$  и  $A_i H \leq G$  для некоторой  $\pi$ -холловой подгруппы  $H$  разрешимой группы  $Y$  и любого  $\pi \subseteq \pi(G)$ ;

(4)  $A_i K \leq G$  для каждой субнормальной подгруппы  $K$  в  $Y$  и для каждой  $A_i \trianglelefteq A$ ;

(5) для каждого  $i = 1, \dots, s$  и каждой субнормальной подгруппы  $K$  из  $Y$  имеем  $A_i K^g \leq G$  для любого  $g \in G$ ;

(6) если  $Y$  разрешима и  $A$   $r$ -замкнута, то силовская  $r$ -подгруппа  $A_r$  из  $A$  субнормальна в  $G$ , где  $r$  – наибольшее простое число в  $\pi(G)$ ;

(7) если  $A$  2-нильпотентна, то  $A'$  субнормальна в  $G$ .

Доказательство.

1. Так как  $Y$  –  $\text{tcc}_n$ -добавление к  $A$  в  $G$ , то  $G = AY$ . По тождеству Дедекинда

$$H = H \cap AY = A(H \cap Y).$$

Так как  $H \cap Y \leq Y$ , то для любых  $X \trianglelefteq A$  и  $Z \leq H \cap Y$  существует элемент  $u \in \langle X, Z \rangle$  такой, что  $XZ^u \leq G$ . Поэтому  $A$  –  $\text{tcc}_n$ -подгруппа в  $H$ .

2. Так как  $G = AY$ , то

$$G/N = (AN/N)(YN/N).$$

Пусть  $B/N$  – произвольная нормальная подгруппа из  $AN/N$  и  $X/N$  – произвольная подгруппа в  $YN/N$ . Так как  $N \leq B \leq AN$ , то по тождеству Дедекинда

$$B = B \cap AN = (B \cap A)N.$$

Аналогично,

$$X = X \cap YN = (X \cap Y)N.$$

Так как  $B \cap A \trianglelefteq A$  и  $X \cap Y \leq Y$ , то

$$(B \cap A)(X \cap Y)^u \leq G$$

для некоторого  $u \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle$ . Поэтому

$$(B/N)(X/N)^{uN} = (B \cap A)(X \cap Y)^u N/N \leq G/N$$

для

$$uN \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle N/N \subseteq \langle B, X \rangle N/N = \langle B/N, X/N \rangle.$$

Значит,  $AN/N$  – тсс<sub>n</sub>-подгруппа в  $G/N$ .

3. Так как  $A$  – тсс<sub>n</sub>-подгруппа группы  $G$ , то по определению для каждой  $A_1 \trianglelefteq A$  и  $X \leq Y$  существует  $u \in \langle A_1 X \rangle$  такой, что  $A_1 X^u \leq G$ . Так как

$$u \in G = AY = YA,$$

то  $u = ya$  для некоторых  $y \in Y$  и  $a \in A$ . Тогда

$$A_1 X^u = A_1 X^{ya} = A_1 (X^y)^a = A_1^a (X^y)^a = (A_1 X^y)^a \leq G.$$

Поэтому существует подгруппа  $A_1 X^y$  в группе  $G$  для некоторого  $y \in Y$ . Очевидно, что если  $X$  –  $\pi$ -холлова подгруппа группы  $Y$ , то  $H = X^y$  –  $\pi$ -холлова подгруппа группы  $Y$ . Поэтому  $A_1 H \leq G$ . Аналогично и в случае, когда  $X$  – максимальная подгруппа группы  $Y$ . Тогда  $M = X^y$  – максимальная подгруппа группы  $Y$  и  $A_1 M \leq G$ .

4. Поскольку  $K$  субнормальная подгруппа в  $Y$ , то существует цепь подгрупп

$$Y = K_0 \geq K_1 \geq \dots \geq K_{n-1} \geq K_n = K,$$

в которой подгруппа  $K_{i+1}$  нормальна в  $K_i$  для всех  $i$ . Применим индукцию по  $n$ . По п. (3) существует  $y \in Y$  такой, что

$$A_1 K_1^y = A_1 K_1 \leq G.$$

Поэтому утверждение справедливо для  $n=0$  и  $n=1$ . Значит,  $n \geq 2$ . Согласно п. (1),  $A$  – тсс-подгруппа в  $AK_1$  и  $K_1$  – тсс-добавление к  $A$  в  $AK_1$ . Так как длина субнормальной цепи между  $K$  и  $K_1$  меньше, чем  $n$ , то по индукции в группе  $AK_1$  существует подгруппа  $A_1 K$ , а следовательно,  $A_1 K \leq G$ .

5. Так как  $g \in G = AY = YA$ , то  $g = ya$  для некоторых  $y \in Y$  и  $a \in A$ . Тогда

$$A_1 K^g = A_1 K^{ya} = A_1 (K^y)^a = (A_1 K^y)^a.$$

Так как  $K$  субнормальна в  $Y$ , то  $K^y$  субнормальна в  $Y$ . Из (4) следует, что  $A_1 K^y \leq G$ . Поэтому  $AK^g \leq G$ .

6. Применим индукцию по  $|G|$ . Из (3) следует, что  $AY_1 \leq G$  для некоторой  $r'$ -холловой подгруппы  $Y_1$  из  $Y$ . Если  $AY_1 < G$ , то из (1) следует, что  $A$  –  $\text{tss}_n$ -подгруппа в  $AY_1$  и по индукции  $A_r$  субнормальна в  $AY_1$ . Кроме того,  $A_r$  субнормальна в некоторой силовой  $r$ -подгруппе  $G_r$  из  $G$ . Пусть  $Y_r \leq R$ , где  $R$  – силовая  $r$ -подгруппа из  $G$  и  $R^g = G_r$  для некоторого  $g \in G$ . По [12, теорема 1],  $A_r$  субнормальна в  $G = AY = AY_1Y_r = (AY_1)Y_r^g = (AY_1)G_r$ .

Далее считаем, что  $G = AY_1$ . Из (3) следует, что  $AQ \leq G$  для некоторой силовой  $q$ -подгруппы  $Q$  из  $Y_1$ . Если  $AQ < G$ , то  $A$  –  $\text{tss}_n$ -подгруппа в  $AQ$  и по индукции  $A_r$  субнормальна в  $AQ$ . Следовательно,  $A_r$  нормальна в  $AQ$  и  $Q \leq N_G(A_r)$ . Поскольку это верно для любого  $q \in \pi(Y_1)$ , то  $A_r$  нормальна в  $G = AY_1$ .

Следовательно,  $G = AQ$ . Согласно (4),  $Q$  – минимальное  $\text{tss}_n$ -добавление к  $A$  в  $G$ . Из (3) следует, что  $AM < G$  для некоторой максимальной подгруппы  $M$  из  $Q$ . Поскольку  $A$  –  $\text{tss}_n$ -подгруппа в  $AM$ , то по индукции  $A_r$  субнормальна в  $AM$  и, следовательно,  $A_r$  нормальна в  $AM$ . Поскольку  $|G:AM| = q$ , то  $G/(AM)_G$  изоморфна подгруппе симметрической группы  $S_q$ . Следовательно,  $G_r \leq (AM)_G \leq AM$  и  $A_r = G_r$  субнормальна в  $G$ .

7. Применим индукцию по  $|G|$ . Из (3) следует, что для каждого  $p \in \pi(Y)$  существует силовая  $p$ -подгруппа  $Y_p$  из  $Y$  такая, что  $AY_p \leq G$ . Предположим, что  $AY_p < G$  для каждого  $p \in \pi(Y)$ . Тогда из (1) следует, что  $A$  является  $\text{tss}_n$ -подгруппой в  $AY_p$  и по индукции  $A'$  субнормальна в  $AY_p$ . Ясно, что для каждого  $p \in \pi(G)$  существует силовая  $p$ -подгруппа  $R$  из  $G$  такая, что  $R \leq AY_p$ . Так как  $A' \leq \langle A', R \rangle \leq AY_p$ , то  $A'$  субнормальна в  $\langle A', R \rangle$ . По лемме 2.4,  $A'$  субнормальна в  $G$ .

Следовательно,  $G = AY_q$  для некоторого  $q \in \pi(Y)$ . Из (4) следует, что  $A$  полунормальна в  $G$ . Так как  $A$  2-нильпотентна, то, по лемме, 2.3  $A^G$  разрешима. Следовательно,  $G = AY_q = A^G Y_q$  разрешима. Из (4) следует, что  $Y_q$  является минимальным  $\text{tss}_n$ -добавлением к  $A$  в  $G$  и  $AT < G$  для некоторой максимальной подгруппы  $T$  группы  $Y_q$ . Поскольку  $A$  является  $\text{tss}_n$ -подгруппой в  $AT$ , то по индукции  $A'$  субнормальна в  $AT$ . Поскольку  $|G:AT| = q$ , то по лемме 2.2  $G/(AT)_G$  сверхразрешима, и, следовательно,

$$(G/(AT)_G)' = G'(AT)_G / (AT)_G$$

нильпотентна. Так как  $A' \leq G'$ , то

$$A'(AT)_G / (AT)_G \leq G'(AT)_G / (AT)_G$$

и, следовательно,  $A'(AT)_G$  субнормальна в  $G$ . Ясно, что  $A' \leq A'(AT)_G \leq AT$ . Так как  $A'$  субнормальна в  $AT$ , то  $A'$  субнормальна в  $A'(AT)_G$  и  $A'$  субнормальна в  $G$ .

**Лемма 2.7** *Группа  $G$  сверхразрешима, если каждая максимальная (силовая) подгруппа из  $G$  является  $\text{tss}_n$ -подгруппой в  $G$ .*

Доказательство.

1. Пусть  $M$  – произвольная максимальная подгруппа в  $G$ . По лемме 2.6 (3) следует, что  $MY_p \leq G$  для некоторой силовой  $p$ -подгруппы  $Y_p$  группы  $Y$ . Так как  $M$  – максимальная подгруппа в группе  $G$ , то или  $MY_p = M$ , или  $MY_p = G$ . Если  $MY_p = M$  для всех  $p \in \pi(Y)$ , то  $Y \leq M$  и  $G = MY = M$  – противоречие. Поэтому существует  $q \in \pi(Y)$  такое, что  $MY_q = G$  и  $Y_q$  – тсс<sub>n</sub>-добавление к подгруппе  $M$  в группе  $G$ . По лемме 2.6 (4) можно считать, что  $Y_q$  – минимальное тсс<sub>n</sub>-добавление к подгруппе  $M$  в группе  $G$ . По лемме 2.6 (3)  $MS < G$  и  $|G:MS| = q$  для некоторой максимальной подгруппы  $S$  подгруппы  $Y_q$ . Так как  $M$  максимальная подгруппа в  $G$ , то  $|G:M| = |G:MS| = q$  и  $G$  сверхразрешима.

2. Покажем, что  $G$  разрешима. Пусть  $R$  силовая  $r$ -подгруппа группы  $G$ . Тогда  $R$  – тсс<sub>n</sub>-подгруппа в  $G$ . Пусть  $T$  – тсс<sub>n</sub>-добавление к  $R$  в  $G$ . По лемме 2.6 (3)  $RQ \leq G$  для некоторой силовой  $q$ -подгруппы  $Q$  из  $T$  и для каждого  $q \in \pi(T) \setminus \{p\}$ . Подгруппа  $RQ$   $\{r, q\}$ -холлова подгруппа группы  $G$ . Тогда  $G$   $r$ -разрешима для  $r \neq 3$ . Пусть  $t$  – наименьшее простое число из  $\pi(G)$ . Если  $t > 2$ , то  $G$  разрешима. Если  $t = 2$ , то по доказанному выше  $G$   $t$ -разрешима и, следовательно,  $G$  разрешима.

Теперь покажем, что  $G$  сверхразрешима. Предположим, что заключение теоремы ложное, и пусть  $G$  – контрпример наименьшего порядка. Пусть  $N$  – нормальная неединичная подгруппа группы  $G$  и  $RN/N$  – силовая  $r$ -подгруппа фактор-группы  $G/N$ . По лемме 2.6 (2)  $RN/N$  – тсс<sub>n</sub>-подгруппа фактор-группы  $G/N$ . Тогда  $G/N$  сверхразрешима по выбору группы  $G$ .

Пусть  $P$  – силовая  $p$ -подгруппа группы  $G$ , где  $p$  – наибольшее простое число из  $\pi(G)$ . По лемме 2.6 (6)  $P$  субнормальна в  $G$  и поэтому  $P$  нормальна в  $G$ . Следовательно,  $G$  имеет единственную нормальную подгруппу  $N$  такую, что  $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G) = P$  и  $N$  – элементарная абелева подгруппа порядка  $p^n, n > 1$ .

Пусть  $T$  – тсс<sub>n</sub>-добавление к подгруппе  $P$  в  $G$ . Пусть  $P_1$  – минимальная нормальная подгруппа в  $P$ . Ясно, что  $|P_1| = p$ . По лемме 2.6 (3) следует, что для каждого  $r \in \pi(T)$  существует силовая  $r$  подгруппа  $R$  из  $T$  такая, что  $P_1R \leq G$ . Если  $p \neq r$ , то  $P \cap P_1R = P_1(P \cap R) = P_1$  нормальная подгруппа в  $P_1R$  и  $R \leq N_G(P_1)$ . Так как данное включение выполняется для любого  $r \in \pi(T) \setminus \{p\}$ , то  $T_1 \leq N_G(P_1)$  для некоторой  $p'$ -холловой подгруппы  $T_1$  из  $T$ . Поэтому  $P_1$  нормальна в  $G = PT = PT_pT_1 = PT_1$  – противоречие.

**Доказательство теоремы 1**

Покажем, что в двух случаях группа  $G$  разрешима. По лемме 2.6 (7)  $A'$  и  $B'$  субнормальны в  $G$ . Если  $A$  и  $B$  абелевы, то, по теореме Ито,  $G$  разрешима. Следовательно, будем считать, что либо  $A' \neq 1$ , либо  $B' \neq 1$ . Предположим, что  $A' \neq 1$ . По лемме 2.7 (2) подгруппа  $A$  сверхразрешима. Поэтому в каждом из случаев подгруппа  $A$  сверхразрешима и  $(A')^G$  нильпотентна. Если  $(A')^G = G$ , то  $G$  разрешима. Если  $(A')^G < G$ , то  $G/(A')^G$  сверхразрешима. Следовательно,  $G$  разрешима.

1. Предположим, что теорема неверна, и пусть  $G$  – контрпример минимального порядка. Пусть  $N$  – неединичная нормальная подгруппа группы  $G$ . Подгруппы  $AN/N \simeq A/A \cap N$  и  $BN/N \simeq B/B \cap N$  являются  $\text{tss}_n$ -подгруппами в  $G/N$  по лемме 2.6 (2),  $AN/N \simeq A/A \cap N$  и  $BN/N \simeq B/B \cap N$  сверхразрешимы. Следовательно,  $G/N = (AN/N)(BN/N)$  сверхразрешима по индукции.

Так как по условию  $A$  и  $B$  являются сверхразрешимыми  $\text{tss}_n$ -подгруппами разрешимой группы  $G$ , по лемме 2.6 (6)  $A_p$  и  $B_p$  субнормальны в  $G$  для наибольшего простого числа  $p \in \pi(G)$ .

Поскольку  $P = A_p B_p$  является силовой  $p$ -подгруппой  $G$ , то  $G$  является  $p$ -замкнутой. По лемме 2.1  $G$  имеет единственную минимальную нормальную подгруппу  $N$  такую, что  $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G) = P$  и  $N$  является элементарной абелевой подгруппой порядка  $p^n$ ,  $n > 1$ .

Без ограничения общности будем считать, что  $A_p \neq 1$ . Поскольку  $A$   $p$ -замкнута, то  $|A_1| = p$ , где  $A_1$  – минимальная нормальная подгруппа в  $A$ . По лемме 2.6 (3)  $A_1 Y_1 \leq G$  для некоторой  $p'$ -холловой подгруппы  $Y_1$  из  $Y$ . Тогда

$$A_1 = P \cap A_1 Y_1 = A_1 (P \cap Y_1)$$

является нормальной в  $A_1 Y_1$ . Следовательно,  $Y_1 \leq N_G(A_1)$ . Так как  $P$  абелева, то силовая  $p$ -подгруппа  $Y_p$  из  $Y$  централизует  $A_1$  и  $A_1$  нормальна в  $G = AY_p Y_1$  – противоречие.

2. Пусть  $N$  – неединичная нормальная в  $G$  подгруппа. Тогда фактор-группа

$$G/N = (AN/N)(BN/N).$$

Пусть  $S/N$  – силовая  $s$ -подгруппа в  $AN/N$  и  $T$  – силовая  $s$ -подгруппа в  $S \cap A$ . Тогда  $TN/N$  силовая  $s$ -подгруппа в

$$(S \cap A)N/N = S/N.$$

Поэтому  $TN/N = S/N$ . Так как  $T \leq A$ , то  $T \leq A_s$ , где  $A_s$  – некоторая  $s$ -подгруппа группы  $A$ . Тогда  $TN/N \leq A_s N/N$  и  $A_s N/N$  – силовая  $s$ -подгруппа группы  $AN/N$ . Поэтому

$$S/N = TN/N = A_s N/N.$$

По условию  $A_s$  –  $\text{tss}_n$ -подгруппа в  $G$ . По лемме 2.6 (2)  $S/N$  –  $\text{tss}_n$ -подгруппа в  $G/N$ . Аналогично, если  $K/N$  – силовая подгруппа из  $BN/N$ , то  $K/N$  –  $\text{tss}$ -подгруппа в  $G/N$ . Таким образом, условие теоремы наследуют все фактор-группы и по индукции  $G/N$  сверхразрешима.

Так как  $G$  разрешима, то по лемме 2.6 (6) силовые подгруппы  $A_p$  и  $B_p$  подгрупп  $A$  и  $B$  субнормальны в  $G$  для наибольшего простого числа  $p$  из  $\pi(G)$ . Тогда силовая  $p$ -подгруппа  $P$  группы  $G$  нормальна в группе  $G$ . По индукции  $G/P$  сверхразрешима, поэтому группа  $G$  имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

Предположим, что  $G$  – контрпример минимального порядка. По лемме 2.1  $G$  – примитивная группа, и для  $G$  сохраним обозначения, выписанные в этой лемме. В частности,  $N = P$  и  $G = [N]M$ .

Пусть  $Q$  – силовская  $q$ -подгруппа из  $M$ ,  $q \in \pi(M)$ . Так как  $M = G_p$ , то  $Q = A_q B_q$  для некоторых силовских  $q$ -подгрупп  $A_q$  и  $B_q$  из  $A$  и  $B$  соответственно.

Пусть  $U$  – тсс-добавление к  $A_q$  в  $G$ . Так как  $N$  –  $p$ -подгруппа группы  $G$ , то  $N \leq U$ . Пусть  $N_1$  – минимальная нормальная подгруппа в  $N$ . По лемме 2.6 (4)  $A_q N_1 \leq G$  и  $A_q \leq N_G(N_1)$ , так как  $N_1$  субнормальна в  $U$  и  $G$   $p$ -замкнута. Аналогично,  $B_q \leq N_G(N_1)$ . Следовательно,  $Q \leq N_G(N_1)$ . Так как данное включение справедливо для любого  $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ , то  $M \leq N_G(N_1)$ . Поэтому  $N_1$  нормальна в  $G = NM$  – противоречие. Теорема доказана.

### Доказательство теоремы 2

1. Предположим, что теорема неверна, и пусть  $G$  – минимальный контрпример. Пусть  $K$  – собственная подгруппа группы  $G$ . По лемме 2.6 (1) каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 группы  $K$  является тсс<sub>n</sub>-подгруппой в  $K$ . Тогда по индукции  $K$  сверхразрешима, и, следовательно,  $G$  – минимальная несверхразрешимая группа. По [15]  $G$  разрешима,  $G$  имеет единственную нормальную силовскую  $p$ -подгруппу  $P$  и  $P = G^u$ ,  $\bar{P} = P / \Phi(P)$  является минимальной нормальной подгруппой в  $\bar{G} = G / \Phi(P)$  и  $|P / \Phi(P)| > p$ . Кроме того,  $P$  имеет экспоненту  $p$ , если  $p \neq 2$ , и экспоненту не более 4, если  $p = 2$ .

Предположим, что  $p = 2$ . Пусть  $x \in P$  и  $P_1 = \langle x \rangle$ . Тогда  $|P_1| = 2$  или  $|P_1| = 4$ . По условию,  $P_1$  является тсс<sub>n</sub>-подгруппой в  $G$ . По лемме 2.6 (3)  $G$  имеет 2'-холлову подгруппу  $S$  такую, что  $P_1 S \leq G$ . По [2, IV.2.8]  $P_1 \leq N_G(S)$  и, следовательно,  $P \leq N_G(S)$  и  $S$  нормальна в  $G$  – противоречие.

Предположим, что  $p > 2$ . Пусть  $\bar{K} = K / \Phi(P)$  – подгруппа порядка  $p$  в  $\bar{P}$ . Тогда

$$\bar{K} = \langle x\Phi(P) \rangle = \langle x \rangle \Phi(P) / \Phi(P).$$

Так как  $x \in P$ , то  $|\langle x \rangle| = p$  и, следовательно, по лемме 2.6 (2)  $\bar{K}$  является тсс<sub>n</sub>-подгруппой в  $\bar{G}$  и  $\bar{T} = T / \Phi(P)$  является тсс<sub>n</sub>-добавлением к  $\bar{K}$  в  $\bar{G}$ . Следовательно, по лемме 2.6 (3) для любого  $r \in \pi(\bar{T})$ ,  $r \neq p$  существует силовская  $r$ -подгруппа  $\bar{R}$  группы  $\bar{T}$  такая, что  $\bar{K}\bar{R} \leq \bar{G}$ . Ясно, что  $\bar{R}$  является силовской  $r$ -подгруппой в  $\bar{G}$ . Имеем, что

$$\bar{P} \cap \bar{K}\bar{R} = \bar{K}(\bar{P} \cap \bar{R}) = \bar{K}$$

нормальна в  $\bar{K}\bar{R}$  и  $\bar{R} \leq N_{\bar{G}}(\bar{K})$ . Так как  $\bar{P}$  абелева, то  $\bar{K}$  нормальна в  $\bar{G}$ . Следовательно,  $\bar{K} = \bar{P}$  – противоречие.

2. Предположим, что утверждение ложно, и пусть  $G$  – минимальный контрпример. По лемме 2.6 (1) и по (1.1) каждая максимальная подгруппа  $M$  из  $G$  сверхразрешима. Следовательно,  $G$  – минимальная несверхразрешимая группа. Тогда по [15]  $G$  разрешима,  $|\pi(G)| \leq 3$  и  $G$  имеет единственную нормальную подгруппу

$P = G^U$ . Ясно, что  $\Phi(G) = 1$ . Следовательно,  $P$  – минимальная нормальная подгруппа порядка  $p^n$ ,  $n > 1$  и  $G = [P]M$  для некоторой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$ .

Если  $|\pi(G)| = 3$ , то  $G$  имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и  $M = T \rtimes R$ , где  $|T| = t$ ,  $|R| = r$  и  $t, r \in \pi(G)$ . Подгруппы  $T$  и  $R$  являются 2-максимальными подгруппами группы  $G$ . Тогда по условию  $TY_1 = G = RY_2$ , где  $Y_1$  и  $Y_2$  являются  $\text{tss}_n$ -добавлениями в  $G$ . Кроме того,  $P \leq Y_1$  и  $P \leq Y_2$ . Пусть  $P_1$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $P$ . Тогда по лемме 2.6 (4)  $TP_1 \leq G$  и  $RP_1 \leq G$ , и следовательно,  $T \leq N_G(P_1)$  и  $R \leq N_G(P_1)$ , поскольку  $G$   $p$ -замкнута. Тогда  $P_1$  нормальна в  $G = PM = PTR$  – противоречие.

Итак,  $|\pi(G)| = 2$ . Тогда  $M$  является  $q$ -подгруппой. Если  $|M| > q$ , то  $M$  имеет максимальную подгруппу  $M_1$  такую, что  $M_1 \neq 1$ . Ясно, что  $H = P \rtimes M_1$  – максимальная подгруппа в  $G$ . Поскольку  $H$  сверхразрешима, то  $H$  имеет максимальную подгруппу  $H_1$  такую, что  $M_1 \leq H_1$  и  $|H : H_1| = p$ . По условию,  $H_1$  является  $\text{tss}_n$ -подгруппой в  $G$ . Тогда  $H_1V = G$ , где  $V$  –  $\text{tss}_n$ -добавление к  $H_1$  в  $G$ . Пусть  $K_1$  – минимальная нормальная подгруппа в  $H_1$ . Поскольку  $H_1$  сверхразрешима, то  $|K_1| = p$ .

По лемме 2.6 (3)  $V$  имеет силовскую  $q$ -подгруппу  $V_q$  такую, что  $K_1V_q \leq G$ . Следовательно,  $V_q \leq N_G(K_1)$  и  $K_1$  нормальна в  $G = H_1V = H_1PV_q$  – противоречие.

Таким образом,  $|M| = q$  и  $P$  – максимальная подгруппа в  $G$ . Пусть  $P_1$  – максимальная подгруппа в  $P$ . Тогда по условию  $P_1K = G$ , где  $K$  –  $\text{tss}_n$ -добавление к  $P_1$  в  $G$ . По лемме 2.6 (3)  $K$  имеет силовскую  $q$ -подгруппу  $K_1$  такую, что  $P_1K_1 \leq G$  и  $K_1 \leq N_G(P_1)$ . Следовательно,  $P_1$  нормальна в  $G = P_1K = PK_1$ . Поэтому  $|P| = p$  – противоречие.

3. Пусть  $P$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ . Если  $P$  циклическая, то  $G$   $p$ -сверхразрешима. Пусть  $P$  нециклическая. Тогда по лемме 2.6 (3) для любой максимальной подгруппы  $P_i$  группы  $P$  и каждого  $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$  существует силовская  $q$ -подгруппа  $Q$  группы  $G$  такая, что  $P_iQ \leq G$ . По [16, Теорема 3.4]  $G$   $p$ -сверхразрешима. Поскольку это верно для любого  $p \in \pi(G)$ , то  $G$  сверхразрешима.

Теорема доказана.

### Заключение

В настоящей работе было рассмотрено понятие  $\text{tss}_n$ -подгруппы, которое наряду с NS-добавляемой подгруппой из [16] является еще одним обобщением понятия  $\text{tss}$ -подгруппы из [4]. В ходе исследования был получен целый ряд признаков сверхразрешимости группы с заданными системами  $\text{tss}_n$ -подгрупп, которые естественным образом развивают результаты работы [4]. В перспективе результаты работы могут стать методическим подспорьем для исследования конечных групп с условно перестановочными субнормальными подгруппами из сомножителей и добавлений к ним.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – С. 207.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.
3. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Southeast Asian Bull. Math. – 2005. – Vol. 29. – P. 493–510.
4. Trofimuk, A. A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A. A. Trofimuk // Journal of Algebra and Its Applications. – 2021. – 2150020 (18 p.).
5. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
6. Carocca, A.  $p$ -supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Math. J. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.
7. Monakhov, V. S. Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Journal of Group Theory. – 2014. – Vol. 17, nr 5. – P. 889–895.
8. Guo, W. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups  $\sigma$ -permutably embedded / W. Guo, A. N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20. – P. 169–183.
9. Монахов, В. С. О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп / В. С. Монахов, И. К. Чирик // Сибирский математический журнал. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 353–364.
10. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a group with semisubnormal factors / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2020. – Vol. 23, nr 5. – P. 893–911.
11. Княгина, В. Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.
12. Wielandt, H. Subnormalität in faktorisierten endlichen Gruppen / H. Wielandt // J. Algebra. – 1981. – Vol. 69. – P. 305–311.
13. Casolo, C. A criterion for subnormality and Wielandt complexes in finite groups / C. Casolo // J. Algebra. – 1994. – Vol. 169. – P. 605–624.
14. Tyutyaynov, V. N. Finite groups with biprimary Hall subgroups / V. N. Tyutyaynov, V. N. Kniahina // J. Algebra. – 2015. – Vol. 443. – P. 430–440.
15. Doerk, K. Minimal nicht auflösbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.
16. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a finite group with NS-supplemented subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Acta Math. Hung. – 2020. – Vol. 160, nr 1. – P. 161–167.

## REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedeniye v teoriyu koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – S. 207.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.
3. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Southeast Asian Bull. Math. – 2005. – Vol. 29. – P. 493–510.
4. Trofimuk, A. A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A. A. Trofimuk // Journal of Algebra and Its Applications. – 2021. – 2150020 (18 p.).

5. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
6. Carocca, A.  $p$ -supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Math. J. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.
7. Monakhov, V. S. Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Journal of Group Theory. – 2014. – Vol. 17, nr 5. – P. 889–895.
8. Guo, W. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups  $\sigma$ -permutably embedded / W. Guo, A. N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20. – P. 169–183.
9. Monakhov, V. S. O svierkhrazrieshimom koradikalie proizvodienija subnormal'nykh svierkhrazrieshimykh podgrupp / V. S. Monakhov, I. K. Chirik // Sibirskij matematicheskij zhurnal. – 2017. – T. 58, № 2. – S. 353–364.
10. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a group with semisubnormal factors / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2020. – Vol. 23, nr 5. – P. 893–911.
11. Kniagina, V. N. Koniechnyje grupy s polunormal'nymi podgruppami Shmidta / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // Algiebra i logika. – 2007. – T. 46, № 4. – S. 448–458.
12. Wielandt, H. Subnormalität in faktoriisierten endlichen Gruppen / H. Wielandt // J. Algebra. – 1981. – Vol. 69. – P. 305–311.
13. Casolo, C. A criterion for subnormality and Wielandt complexes in finite groups / C. Casolo // J. Algebra. – 1994. – Vol. 169. – P. 605–624.
14. Tyutyaynov, V. N. Finite groups with biprimary Hall subgroups / V. N. Tyutyaynov, V. N. Kniahina // J. Algebra. – 2015. – Vol. 443. – P. 430–440.
15. Doerk, K. Minimal nicht uberauflösbare, endliche gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.
16. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a finite group with NS-supplemented subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Acta Math. Hung. – 2020. – Vol. 160, nr 1. – P. 161–167.

*Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.04.2025*