

Владимир Анестиевич Плетюхов

*д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*

Vladimir Pletyukhov

*Doctor of Physics and Mathematical Sciences, Professor,
Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: pletyukhov@yandex.by*

ОБОБЩЕННЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И БЕЗМАССОВЫЕ ПРЕДЕЛЫ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА – КЭЛЛЕРА

Предложены матричная и тензорная формулировки релятивистских волновых уравнений, обеспечивающих совместное описание электромагнитного поля (фотона) и безмассового поля Кальба – Рамонда с нулевой спиральностью (нотопфа). Показано, что эти уравнения являются частными случаями уравнениям Дирака – Кэллера.

Ключевые слова: релятивистские волновые уравнения, уравнение Дирака – Кэллера, поле Кальба – Рамонда, электромагнитное поле, фотон, нотопф.

General Relativistic Wave Equations and Massless Limits of the Dirac – Kähler Equation

Matrix and tensor formulations of the relativistic wave equations providing description both an electromagnetic field (photon) and a massless Kalb – Ramond field with the zero helicity (notoph) are given. It is shown that this equations are particular cases of the Dirac – Kähler equation.

Key words: relativistic wave equations, Dirac – Kähler field, Kalb – Ramond field, electromagnetic field, photon, notoph.

Введение

Подход обобщенной теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) исходит из того, что описание микрообъектов (полей) как с ненулевой, так и нулевой массой всегда может быть сведено к системе дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, представимой в матрично-дифференциальной форме [1]

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + \Gamma_0) \Psi(x) = 0 \quad (\mu = 1 \div 4), \quad (1.1)$$

где $\Psi(x)$ – многокомпонентная волновая функция-столбец, преобразующаяся по некоторому приводимому представлению Т полной группы Лоренца; Γ_μ и Γ_0 – квадратные матрицы соответствующей размерности.

Матрица Γ_0 в общем случае является проективной ($\Gamma_0^2 = \Gamma_0$). При этом возможны варианты, когда $\det \Gamma_0 \neq 0$ и $\det \Gamma_0 = 0$ (в том числе $\Gamma_0 = 0$). В первом случае РВУ (1.1) описывает микрообъект с ненулевой массой и умножением на $m\Gamma_0^{-1}$ может быть приведено к виду

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + mI) \Psi(x) = 0, \quad (1.2)$$

где m – скалярный параметр, связанный с массой; во втором случае уравнение (1.1) описывает безмассовый микрообъект.

В работах [1–4] были собраны воедино положения, которые в настоящее время составляют так называемый постулативный базис теории обобщенных РВУ.

Перечислим некоторые (основные) из них:

(1) любое РВУ должно удовлетворять требованиям инвариантности относительно преобразований полной группы Лоренца, а также обеспечивать возможность лагранжевой формулировки теории;

(2) РВУ, описывающее единый физический объект, должно быть не распадающимся в смысле полной группы Лоренца;

(3) среди состояний физического микрообъекта не могут присутствовать такие, которым соответствует нулевая плотность энергии;

(4) «правильное» РВУ должно соответствовать положительно определенной плотности энергии (заряда) в случае целого (полуцелого) спина;

(5) микрообъект с целым (полуцелым) спином описывается на основе тензорных (спинорных) представлений группы Лоренца;

(6) если под микрообъектом понимается бесструктурная элементарная частица со спином s , не обладающая иными внутренними степенями свободы, то для построения соответствующего РВУ достаточно ограничиться минимально необходимым набором неприводимых зацепляющихся компонент τ в представлении T , реализующих данное значение спина.

Однако в настоящее время с появлением новых экспериментальных фактов (обнаружение структуры у микрообъектов, ранее считавшихся элементарными, наличие у них дополнительных внутренних (изоспиновых) степеней свободы и др.) некоторые из вышеперечисленных положений теории РВУ, в частности условия (5) и (6), потеряли обязательный характер.

Объектом нашего рассмотрения в настоящей работе будет тензорная полевая система уравнений первого порядка, известная в литературе как уравнение Дирака – Кэлера (ДК) [5], волновая функция которого представляет собой полный набор антисимметричных тензорных полей в пространстве Минковского. Интерес к уравнению ДК на протяжении многих десятилетий связан с рядом специфических свойств, обуславливающих возможность его применения для описания изоспиновых степеней свободы дираковских частиц (частиц со спином $\frac{1}{2}$, например кварков) [5–8]. Основное внимание при этом будет уделено анализу безмассовых пределов уравнения ДК в рамках подхода теории обобщенных РВУ первого порядка.

Основное содержание

В 1962 г. Кэлером [6] в формализме внешних дифференциальных форм было предложено уравнение

$$(d - \delta - m) \Phi = 0, \quad (2.1)$$

где d – внешняя производная; $\delta = * d *$, обозначение $*$ соответствует оператору де Рама, действие которого в пространстве Минковского сводится к свертке тензоров с тензором Леви – Чивита $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$; Φ – неоднородная дифференциальная форма вида

$$\Phi = \varphi + \varphi_\mu dx_\mu + \frac{1}{2!} \varphi_{[\mu\nu]} dx_\mu \wedge dx_\nu + \frac{1}{3!} \varphi_{[\mu\nu\alpha]} dx_\mu \wedge dx_\nu \wedge dx_\alpha + \frac{1}{4!} \varphi_{[\mu\nu\alpha\beta]} dx_\mu \wedge dx_\nu \wedge dx_\alpha \wedge dx_\beta, \quad (2.2)$$

и символ $\wedge$ означает операцию внешнего произведения.

Тензорный эквивалент уравнения (2.1), (2.2) выглядит так [5; 9]:

$$\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \varphi + m \varphi_\mu = 0, \quad (2.3)$$

$$\partial_\nu \widetilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \widetilde{\varphi} + m \widetilde{\varphi}_\mu = 0, \quad (2.4)$$

$$-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \widetilde{\varphi}_\beta + m \varphi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (2.5)$$

$$\partial_\mu \varphi_\mu + m \varphi = 0, \quad \partial_\mu \widetilde{\varphi}_\mu + m \widetilde{\varphi} = 0. \quad (2.6)$$

Здесь используются обозначения

$$\tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varphi_{[\alpha\beta]}, \quad \tilde{\varphi}_\mu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varphi_{[\nu\alpha\beta]}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varphi_{[\mu\nu\alpha\beta]},$$

где лоренцевские коварианты φ (скаляр), $\tilde{\varphi}$ (псевдоскаляр), φ_μ (вектор), $\tilde{\varphi}_\mu$ (псевдовектор), $\varphi_{[\mu\nu]}$ (антисимметричный тензор второго ранга) сопоставляются неприводимым представлениям полной группы Лоренца $(0,0)$, $(0,0)'$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'$, $(0,1) \oplus (1,0)$ соответственно и образуют схему зацеплений [10]

$$(0,0) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (0,1) \oplus (1,0) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})' \oplus (0,0)'. \quad (2.7)$$

Матрично-дифференциальная форма тензорной системы (2.3) – (2.6) имеет вид (1.2), где Γ_μ – матрицы размерности 16×16 , подчиняющиеся перестановочным соотношениям алгебры Клиффорда – Дирака, $\Psi(x)$ – 16-компонентная волновая функция-столбец с компонентами φ , φ_μ , $\varphi_{[\mu\nu]}$, $\tilde{\varphi}_\mu$, $\tilde{\varphi}$. С точки зрения стандартной теории РВУ уравнение ДК описывает микрообъект с ненулевой массой и наборов спинов $s = 0, 1$. Уникальность этого уравнения состоит в динамической неразличимости поля ДК и системы четырех дираковских полей для всех взаимодействий, не нарушающих внутреннюю симметрию лагранжиана, что означает принципиальную возможность применения уравнения ДК для описания частиц со спином $\frac{1}{2}$ и изоспиновыми степенями свободы, имеющими таким образом, геометрическое происхождение.

Безмассовому полю ДК в формализме внешних дифференциальных форм сопоставляется уравнение, которое получается из (2.1) путем предельного перехода $m \rightarrow 0$ (фермионный предел [5]):

$$(d - \delta)\varphi = 0. \quad (2.8)$$

Тензорный эквивалент уравнения (2.8) имеет вид

$$\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \varphi = 0, \quad (2.9)$$

$$\partial_\nu \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \tilde{\varphi} = 0, \quad (2.10)$$

$$-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta = 0, \quad (2.11)$$

$$\partial_\mu \varphi_\mu = 0, \quad \partial_\mu \tilde{\varphi}_\mu = 0. \quad (2.12)$$

Проведем исследование системы (2.9) – (2.12) на предмет возможности описания на ее основе безмассовых дираковских частиц с внутренними квантовыми числами. Предварительно заметим, что подсистема (2.9), (2.10) известна в литературе [11]; подсистема (2.11), (2.12) также обсуждалась: в работах [12; 13] на ее основе осуществлялась попытка «бозонизации» фермионного поля (но без всякой связи с полем Дирака – Кэлера).

Система (2.9) – (2.12) представляет собой прямую сумму 8-компонентных систем (2.9), (2.10) и (2.11), (2.12), каждая из которых инвариантна относительно преобразований полной группы Лоренца. Они могут быть записаны в матрично-дифференциальной форме соответственно:

$$\Gamma_\mu^{(8)} \partial_\mu \chi = 0, \quad \Gamma_\mu^{(8)} \partial_\mu \xi = 0, \quad (2.13)$$

где $\Gamma_\mu^{(8)}$ – матрицы размерности 8×8 , удовлетворяющие алгебре Клиффорда – Дирака; χ и ξ – 8-компонентные волновые функции

$$\chi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \tilde{\varphi} \\ \varphi_{[\mu\nu]} \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \varphi_\mu \\ \tilde{\varphi}_\mu \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

В то же время нетрудно убедиться, что аналогичный предельный переход $m \rightarrow 0$, осуществленный непосредственно в матричном РВУ (1.2), не приведет к прямой сумме двух независимых лоренц-инвариантных тензорных систем дираковского типа для функций χ и ξ . Причиной этого является то обстоятельство, что в случае массивного РВУ волновая функция и само уравнение преобразуются по одному и тому же представлению группы Лоренца; для безмассовых же РВУ указанные представления могут отличаться.

Так, в нашем случае волновая функция χ (2.14) преобразуется по представлению

$$T^{(1)}: (0,0) \oplus (0,0)' \oplus (0,1) \oplus (1,0),$$

а уравнение (2.13), эквивалентное тензорной системе (2.9), (2.10), – по представлению

$$T^{(2)}: (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'.$$

Для функции ξ (2.14) все наоборот: функция преобразуется по представлению $T^{(2)}$, а уравнение (2.13), эквивалентное системе (2.11), (2.12), – по представлению $T^{(1)}$.

Отсюда следует и то что для безмассового релятивистского волнового уравнения, у которого волновая функция и уравнение преобразуются по различным представлениям группы Лоренца, отсутствует массивный аналог. Кроме того, из матриц $\Gamma_\mu^{(8)}$ и волновых функций χ, ξ можно построить только лоренц-инвариантные билинейные комбинации типа

$$\bar{\xi} \Gamma_\mu^{(1)} \partial_\mu \chi, \quad \bar{\chi} \Gamma_\mu^{(2)} \partial_\mu \xi,$$

которые содержат компоненты обеих функций одновременно. Другими словами, несмотря на то, что системы (2.9), (2.10) и (2.11), (2.12) алгебраически независимы, лагранжева формулировка для каждой из них отсутствует. И, следовательно, физически корректная формулировка теории безмассового поля ДК приводит к необходимости совместного рассмотрения этих систем.

Для установления физического содержания системы (2.9) – (2.12) найдем плотность энергии соответствующего безмассового поля. Лагранжиан, из которого может быть получена данная система, с точностью до несущественного слагаемого типа дивергенции имеет вид

$$L = -\varphi_\mu \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} \varphi_{[\mu\nu]} (\partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu) + \tilde{\varphi}_\mu \partial_\mu \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varphi_{[\mu\nu]} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta. \quad (2.15)$$

Отсюда для тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial \varphi_A}{\partial x_\mu})} \frac{\partial \varphi_A}{\partial x_\nu} - L \delta_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

получаем выражение

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & -\varphi_\mu \partial_\nu \varphi + \tilde{\varphi}_\mu \partial_\nu \tilde{\varphi} - \varphi_{[\mu\alpha]} \partial_\alpha \varphi_\nu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\eta} \varphi_{[\alpha\beta]} \partial_\eta \varphi_\nu + \\ & + \delta_{\mu\nu} \varphi_\alpha \partial_\alpha \varphi + \delta_{\mu\nu} \varphi_{[\alpha\beta]} - \delta_{\mu\nu} \tilde{\varphi}_\alpha \partial_\alpha \tilde{\varphi} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\eta} \varphi_{[\sigma\eta]} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Переписывая (2.17) в импульсном представлении и используя методику, развитую в [9, с. 182–183], найдем:

$$T_{44} = 0, \quad T_{4i} = 0. \quad (2.18)$$

Равенства (2.18) означают, что фермионный безмассовый предел уравнения Дирака – Кэлера приводит к нулевой плотности энергии и импульса, т. е. физического смысла не имеет.

Помимо фермионного безмассового предела (2.9) – (2.12) уравнения ДК представляют интерес тензорные системы

$$\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \varphi = 0, \quad (2.19)$$

$$\partial_\nu \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \tilde{\varphi} = 0, \quad (2.20)$$

$$-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta + \varphi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (2.21)$$

$$\partial_\mu \varphi_\mu + \varphi = 0, \quad \partial_\mu \tilde{\varphi}_\mu + \tilde{\varphi} = 0 \quad (2.22)$$

и

$$\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \varphi + \varphi_\mu = 0, \quad (2.23)$$

$$\partial_\nu \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}_\mu = 0, \quad (2.24)$$

$$-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta = 0, \quad (2.25)$$

$$\partial_\mu \varphi_\mu = 0, \quad \partial_\varphi \varphi_\varphi = 0, \quad (2.26)$$

которые обычно называют бозонными безмассовыми пределами уравнения ДК. Будучи записанными в стандартной матрично-дифференциальной форме (1.1), эти системы отличаются друг от друга видом проективной матрицы Γ_0 .

В тензорном базисе $\Psi = (\varphi_\mu, \tilde{\varphi}_\mu, \varphi_{[\mu\nu]}, \varphi, \tilde{\varphi})$ – столбец, матрица Γ_0 имеет вид

$$\Gamma_0 \begin{pmatrix} o_8 & \\ & I_8 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

для системы (2.19) – (2.22) и

$$\Gamma_0 \begin{pmatrix} I_8 & \\ & o_8 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

в случае системы (2.23) – (2.26).

Рассмотрим сначала систему (2.19) – (2.22). Прежде всего отметим, что все входящие в нее полевые функции удовлетворяют уравнению Даламбера, т. е. данная система действительно описывает безмассовое поле (или поля). Роль потенциалов здесь выполняют вектор $\varphi_\mu(x)$ и псевдовектор $\tilde{\varphi}_\mu(x)$; $\varphi_{[\mu\nu]}(x)$ – тензор напряженностей. Обсуждаемая система инвариантна относительно калибровочных преобразований потенциалов

$$\varphi_\mu \rightarrow \varphi'_\mu = \varphi_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad \tilde{\varphi}_\mu \rightarrow \tilde{\varphi}'_\mu = \varphi_\mu + \partial_\mu \tilde{\Lambda}, \quad (2.29)$$

где калибровочные функции $\Lambda(x)$, $\tilde{\Lambda}(x)$ удовлетворяют условиям

$$\square \Lambda(x) = 0, \quad \square \tilde{\Lambda}(x) = 0. \quad (2.30)$$

Таким же уравнениям удовлетворяют скалярные функции $\varphi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, т. е. они играют роль калибровочных полей и никаких физических полей не описывают. В итоге приходим к заключению, что система (2.19) – (2.22) описывает безмассовое векторное поле с двукратным вырождением состояний, частным случаем которого является обычное электромагнитное поле.

В системе (2.23) – (2.26) роль потенциалов выполняют величины φ_0 , $\tilde{\varphi}_0$, $\varphi_{[\mu\nu]}$, а в качестве напряженностей выступают вектор φ_μ и псевдовектор $\tilde{\varphi}_\mu$. При этом

уравнения (2.23), (2.24) являются определениями напряженностей через потенциалы, а (2.25), (2.26) – уравнениями движения. Как и в предыдущем случае, нетрудно убедиться, что все полевые функции системы (2.23) – (2.26) удовлетворяют уравнению Даламбера, т. е. данная система также описывает безмассовое поле.

Для выяснения физического смысла этой системы учтем, что она инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned}\varphi_{[\mu\nu]} &\rightarrow \varphi'_{[\mu\nu]} = \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \Lambda_\nu(x) - \partial_\nu \Lambda_\mu(x), \\ \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} &\rightarrow \tilde{\varphi}'_{[\mu\nu]} = \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \tilde{\Lambda}_\nu(x) - \partial_\nu \tilde{\Lambda}_\mu(x), \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi + \Lambda(x), \quad \tilde{\varphi} \rightarrow \tilde{\varphi}' = \tilde{\varphi} + \tilde{\Lambda}(x),\end{aligned}\quad (2.31)$$

где калибровочные функции $\Lambda_\mu(x)$, $\tilde{\Lambda}_\mu$, $\Lambda(x)$, $\tilde{\Lambda}(x)$ должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned}\square \Lambda_\mu(x) - \partial_\mu \partial_\nu \Lambda_\nu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) &= 0, \\ \square \tilde{\Lambda}_\mu(x) - \partial_\mu \partial_\nu \tilde{\Lambda}_\nu(x) + \partial_\mu \tilde{\Lambda}(x) &= 0.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Калибровочные преобразования (2.31), (2.32) приводят к тому, что из восьми полевых величин $\varphi_{[\mu\nu]}$ ($\tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}$), φ , $\tilde{\varphi}$ независимыми являются только две составляющие тензор-потенциала $\varphi_{[\mu\nu]}$ ($\tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}$) и величины φ , $\tilde{\varphi}$, описывающие соответственно скалярное и псевдоскалярное безмассовые поля [9, стр. 177–180].

Согласно [14] компоненты тензор-потенциала соответствуют состояниям безмассовых векторного (поле Кальба – Рамонда [15]) и псевдовекторного (нотиф Огиевского – Полубаринова [16]) полей с продольной поляризацией, но переносящих во взаимодействиях спин 1. С учетом этого можно сделать вывод: тензорная система (2.23) – (2.26) описывает объединенное поле Кальба – Рамонда – Огиевского – Полубаринова и безмассовое скалярное поле с удвоенным набором состояний (скалярное плюс псевдоскалярное) как единый физический микрообъект.

Заключение

Рассмотрены три безмассовых предела уравнения Дирака – Кэлера: фермионный, соответствующий выбору матрицы $\Gamma_0 = 0$ в уравнении (1.1), и два бозонных, при которых матрица Γ_0 имеет вид (2.27) или (2.28). Использовались тензорный формализм и подход теории обобщенных РВУ первого порядка.

Показано, что фермионный предел приводит к нулевой плотности энергии и импульса, т. е. никакому реальному физическому полю не соответствует.

Бозонный предел с матрицей Γ_0 (2.28) (тензорная система (2.23) – (2.26)) дает совместное описание поля Кальба – Рамонда и нотифа Огиевского – Полубаринова, а также скалярного и псевдоскалярного полей. В работе [15] тензор-потенциал $\varphi_{[\mu\nu]}$ трактуется в качестве потенциала поля, описывающего взаимодействие замкнутых струн в пространстве размерности $d = 4$. В [16] безмассовое псевдоскалярное поле $\tilde{\varphi}$ передает взаимодействие между мембранами второго порядка. В русле этих трактовок логично интерпретировать тензорную систему (2.23) – (2.26) в качестве феноменологической модели для описания полей, осуществляющих взаимодействие замкнутых струн и мембран в пространстве $d = 4$.

В случае открытых струн одной только системы (2.23) – (2.26) недостаточно. Взаимодействие концов открытых струн естественно описывать посредством электромагнитного поля. В качестве подходящей для этой цели модели может служить тензорная система (2.19) – (2.22) – безмассовый предел уравнения ДК с матрицей Γ_0 (2.27), т. е. тензорная система (2.19) – (2.22).

Таким образом, предлагаемая трактовка бозонных безмассовых пределов уравнения Дирака – Кэлера дает ключ к пониманию физического смысла этого уравнения: в безмассовом варианте оно может выступать в качестве феноменологической модели для описания взаимодействий заряженных микрообъектов, геометрическим образом которых является не точка, а струна.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Федоров, Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф. И. Федоров // Доклады АН СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.
2. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17, nr 2-3. – P. 200–216.
3. Bhabha, H. J. On the postulational basis of the theory of elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21, nr 3. – P. 451–462.
4. Harish-Chandra. Relativistic equations for elementary particles / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. – 1948. – Vol. A192. – P. 195–218.
5. Стражев, В. И. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, Д. А. Ционенко. – Минск : БГУ, 2007. – 195 с.
6. Kähler, E. Der innere differentialkalkul / E. Kähler // Rendiconti di Mat. (Roma). – 1962. – Ser. S. – Vol. 21, nr 3–4. – P. 343–361.
7. Darwin, C. G. The wave equation of the electron / C. G. Darwin // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 118. – P. 654–680.
8. Боргардт, А. А. Матричные аспекты теории бозонов / А. А. Боргардт // ЖЭТФ. – 1956. – Т. 30, № 2. – С. 334–341.
9. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 326 с.
10. Плетюхов, В. А. К теории частиц с максимальным спином 1 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Весці АН БССР, Сер. фіз.-мат. навук. – 1983. – № 5. – С. 94–98.
11. Стражев, В. И. О группе симметрии обобщенных уравнений векторного поля / В. И. Стражев // Изв. вузов СССР. Физика. – 1977. – № 8. – С. 45–48.
12. Garbaczewski, P. Quantization of spinor fields. Meaning of «bosonization» in 1+1 and 1+3 dimension / P. Garbaczewski // J. Math. Phys. – 1982. – Vol. 23, nr 3 – P. 442–450.
13. Aratyn, H. A Bose representation for the massless Dirac field in four dimensions / H. Aratyn // Nucl. Phys. – 1983. – Vol. B227, nr 1. – P. 172–188.
14. Огиевецкий, В. И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В. И. Огиевецкий, И. В. Полубаринов // ЯФ. – 1966. – Т. 4. – вып. 1. – С. 216–223.
15. Kalb, M. Classical direct interesting action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9, nr 8. – P. 2273–2284.
16. Aurilia, A. Generalized Maxwell equations and the gauge mixing mechanism of mass generation / A. Aurilia, Y. Takahashi // Progr. Theor. Phys. – 1981. – Vol. 66. – P. 693–712.

REFERENCES

1. Fiodorov, F. I. Obobshchionnyje rieliativistskije volnovyje uravnienija / F. I. Fiodorov // Doklady AN SSSR. – 1952. – Т. 82, № 1. – S. 37–40.
2. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17, nr 2-3. – P. 200–216.
3. Bhabha, H. J. On the postulational basis of the theory of elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21, nr 3. – P. 451–462.

4. Harish-Chandra. Relativistic equations for elementary particles / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. – 1948. – Vol. A192. – P. 195–218.
5. Strazhev, V. I. Uravnenije Diraka – Keliera. Klassichieskoje polie / V. I. Strazhev, I. A. Satikov, D. A. Cionienko. – Minsk : BGU, 2007. – 195 s.
6. Kähler, E. Der innere differentialkalkul / E. Kähler // Rendiconti di Mat. (Roma). – 1962. – Ser. S. – Vol. 21, nr 3–4. – P. 343–361.
7. Darwin, C. G. The wave equation of the electron / C. G. Darwin // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 118. – P. 654–680.
8. Borgardt, A. A. Matrichnyje aspiekty tieorii bozonov / A. A. Borgardt // ZhETF. – 1956. – T. 30, № 2. – S. 334–341.
9. Plietukhov, V. A. Rielativistskije volnovyje uravnenija i vnutriennije stiepieni svobody / V. A. Plietukhov, V. M. Ried'kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Bielarus. navuka, 2015. – 326 s.
10. Plietukhov, V. A. K tieorii chastic s maksimal'nym spinom 1 / V. A. Plietukhov, V. I. Strazhev // Viesci AN BSSR, Cier. fiz.-mat. navuk. – 1983. – № 5. – S. 94–98.
11. Strazhev, V. I. O gruppie simmetrii obobshchionnykh uravnenij viktornogo polia / V. I. Strazhev // Izv. vuzov SSSR. Fizika. – 1977. – № 8. – S. 45–48.
12. Garbaczewski, P. Quantization of spinor fields. Meaning of «bosonization» in 1+1 and 1+3 dimension / P. Garbaczewski // J. Math. Phys. – 1982. – Vol. 23, nr 3 – P. 442–450.
13. Aratyn, H. A Bose representation for the massless Dirac field in four dimensions / H. Aratyn // Nucl. Phys. – 1983. – Vol. B227, nr 1. – P. 172–188.
14. Ogijevieckij, V. I. Notof i jeho vozmozhnyje vzaimodiejstvija / V. I. Ogijevieckij, I. V. Polubarinov // JAF. – 1966. – T. 4. – vyp. 1. – S. 216–223.
15. Kalb, M. Classical direct interesting action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9, nr 8. – P. 2273–2284.
16. Aurilia, A. Generalized Maxwell equations and the gauge mixing mechanism of mass generation / A. Aurilia, Y. Takahashi // Progr. Theor. Phys. – 1981. – Vol. 66. – P. 693–712.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.04.2025