

УДК 539.12

В.М. Редьков

СПИНОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА И ПОЛЯРИЗОВАННЫЙ СВЕТ

Развивается применение теории группы Лоренца в поляризационной оптике в рамках векторного формализма Стокса – Мюллера и спинорного формализма Джонса. 4-векторы Стокса полностью и частично поляризованного света являются аналогами изотропных и времени-подобных векторов в рамках специальной теории относительности. Теоретико-групповая задача о способах построения этих векторов и сопутствующих им тензоров из биспиноров переформулируется как задача о связях между спинорным и тензорным описаниями полностью или частично поляризованного света. Полученные в явном виде формулы существенно различны для полностью и частично поляризованного света.

Введение

Известно, что при описании поляризации света существенную роль может играть группа псевдоортогональных преобразований $SO(3,1)$, изоморфная группе Лоренца (см. [1; 2]; большой список литературы по этому вопросу приведен в [3]). Работа посвящена применению спинорного формализма группы Лоренца для описания полностью и частично поляризованного света.

Спинорный формализм и полностью поляризованный свет

Исходим из хорошо известных соотношений, определяющих связь между биспинором второго ранга и набором соответствующих тензорных полей (используем обозначения из [4]):

$$U = \Psi \otimes \Psi = \left[-i\Phi + \gamma^b \Phi_b + i\sigma^{ab} \Phi_{ab} + \gamma^5 \tilde{\Phi} + i\gamma^b \gamma^5 \tilde{\Phi}_b \right] E^{-1}; \quad (1.1)$$

Все формулы отнесены к спинорному базису (E обозначает метрическую матрицу в биспинорном пространстве):

$$U = \begin{vmatrix} \xi^\alpha & \xi^\beta \\ \eta_\alpha & \xi^\beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^\alpha & \eta_{\dot{\beta}} \\ \eta_{\dot{\alpha}} & \eta_{\dot{\beta}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^{\alpha\beta} & \Delta^\alpha_{\dot{\beta}} \\ H_{\dot{\alpha}}^\beta & \eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{vmatrix}, \quad \gamma^a = \begin{vmatrix} 0 & \bar{\sigma}^a \\ \sigma^a & 0 \end{vmatrix},$$

$$E = \begin{vmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{vmatrix}, \quad \sigma^{ab} = \frac{1}{4}(\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a), \quad \gamma^5 = \begin{vmatrix} -I & 0 \\ 0 & +I \end{vmatrix}. \quad (1.2)$$

Обратные к (1.1) соотношения выглядят так:

$$\Phi_a = \frac{1}{4} \text{Sp}[E \gamma_a U], \quad \tilde{\Phi}_a = \frac{1}{4i} \text{Sp}[E \gamma^5 \gamma_a U],$$

$$\Phi = \frac{i}{4} \text{Sp}[EU], \quad \tilde{\Phi} = \frac{1}{4} \text{Sp}[E \gamma^5 U], \quad \Phi_{mn} = -\frac{1}{2i} \text{Sp}[E \sigma_{mn} U]. \quad (1.3)$$

Сначала рассматриваем вектор

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \frac{1}{2}[(H_2^1 - H_1^2) - (\Delta_1^2 - \Delta_2^1)] = \xi^1 \eta_2 - \xi^2 \eta_1, \\ \Phi_1 &= \frac{1}{2}[(H_1^1 - H_2^2) + (\Delta_1^1 - \Delta_2^2)] = \xi^1 \eta_1 - \xi^2 \eta_2, \\ \Phi_2 &= \frac{i}{2}[(H_1^1 + H_2^2) + (\Delta_1^1 + \Delta_2^2)] = i(\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2), \\ \Phi_3 &= -\frac{1}{2}[(H_2^1 + H_1^2) + (\Delta_1^2 + \Delta_2^1)] = -(\xi^1 \eta_2 + \xi^2 \eta_1); \end{aligned}$$

и псевдовектор

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_0 &= \frac{1}{2}[-(H_2^1 - H_1^2) - (\Delta_1^2 - \Delta_2^1)] = 0, \\ \tilde{\Phi}_1 &= \frac{1}{2}[-(H_1^1 - H_2^2) + (\Delta_1^1 - \Delta_2^2)] = 0, \\ \tilde{\Phi}_2 &= \frac{i}{2}[-(H_1^1 + H_2^2) + (\Delta_1^1 + \Delta_2^2)] = 0, \\ \tilde{\Phi}_3 &= -\frac{1}{2}[-(H_2^1 + H_1^2) + (\Delta_1^2 + \Delta_2^1)] = 0. \end{aligned}$$

Аналогично находим, что $\Phi = 0$, $\tilde{\Phi} = 0$, и антисимметричный тензор задается равенствами:

$$\begin{aligned}\Phi^{01} &= \frac{i}{4}[(\xi^{11} - \xi^{22}) + (\eta_{11} - \eta_{22})] = \frac{i}{4}[(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)], \\ \Phi^{23} &= \frac{1}{4}[(\xi^{11} - \xi^{22}) - (\eta_{11} - \eta_{22})] = \frac{1}{4}[(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)], \\ \Phi^{02} &= -\frac{1}{4}[(\xi^{11} + \xi^{22}) + (\eta_{11} + \eta_{22})] = -\frac{1}{4}[(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2)], \\ \Phi^{31} &= -\frac{1}{4i}[(\xi^{11} + \xi^{22}) - (\eta_{11} + \eta_{22})] = -\frac{1}{4i}[(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2)], \\ \Phi^{03} &= -\frac{i}{4}[(\xi^{21} + \xi^{12}) + (\eta_{21} + \eta_{12})] = -\frac{i}{2}[\xi^1 \xi^2 + \eta_1 \eta_2], \\ \Phi^{12} &= -\frac{1}{4}[(\xi^{21} + \xi^{12}) - (\eta_{21} + \eta_{12})] = -\frac{1}{2}[\xi^1 \xi^2 - \eta_1 \eta_2]. \end{aligned}$$

Собирая результаты вместе

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \Psi \otimes \Psi \quad \Rightarrow \quad \Phi = 0, \quad \tilde{\Phi} = 0, \quad \tilde{\Phi}_a = 0, \quad \Phi_a \neq 0, \quad \Phi_{mn} \neq 0,$$

замечаем: чтобы иметь вещественный вектор и тензор необходимо наложить дополнительное условие, например, следующее:

$$\eta = +i \sigma^2 \xi^* \quad \Rightarrow \quad \eta_1 = +\xi^{2*}, \quad \eta_2 = -\xi^{1*}, \quad (1.4)$$

что приводит к вещественным величинам:

$$\begin{aligned}
 \Phi_0 &= -(\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*}) < 0, & \Phi_3 &= (\xi^1 \xi^{1*} - \xi^2 \xi^{2*}), \\
 \Phi_1 &= (\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*}), & \Phi_2 &= i(\xi^1 \xi^{2*} - \xi^2 \xi^{1*}); \\
 \Phi^{01} &= \frac{i}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{23} &= \frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{02} &= -\frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{31} &= -\frac{1}{4i} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{03} &= -\frac{i}{2} (\xi^1 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{1*}), & \Phi^{12} &= -\frac{1}{2} [\xi^1 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{1*}].
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Существует альтернативная возможность дополнительного условия:

$$\eta = -i \sigma^2 \xi^* \quad \Rightarrow \quad \eta_1 = -\xi^{2*}, \quad \eta_2 = +\xi^{1*}; \tag{1.6}$$

она дает

$$\begin{aligned}
 \Phi_0 &= (\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*}) > 0, & \Phi_3 &= -(\xi^1 \xi^{1*} - \xi^2 \xi^{2*}), \\
 \Phi_1 &= -(\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*}), & \Phi_2 &= -i(\xi^1 \xi^{2*} - \xi^2 \xi^{1*}); \\
 \Phi^{01} &= \frac{i}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{23} &= \frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{02} &= -\frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{31} &= -\frac{1}{4i} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{03} &= -\frac{i}{2} (\xi^1 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{1*}), & \Phi^{12} &= -\frac{1}{2} [\xi^1 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{1*}].
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Последний случай (1.6) – (1.7) пригоден для того, чтобы описывать 4-вектор поляризации Стокса [1], и дает также возможность ввести соответствующий тензор поляризации:

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \begin{vmatrix} \xi \\ \eta = -i \sigma^2 \xi^* \end{vmatrix}, & \Psi \otimes \Psi &\Rightarrow S_a \neq 0, S_{mn} \neq 0, \\
 S_0 &= (\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*}) > 0, & S_3 &= -(\xi^1 \xi^{1*} - \xi^2 \xi^{2*}), \\
 S_1 &= -(\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*}), & S_2 &= -i(\xi^1 \xi^{2*} - \xi^2 \xi^{1*}); \\
 a^1 &= S^{01} = \frac{i}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 b^1 &= S^{23} = \frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 a^2 &= S^{02} = -\frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 b^2 &= S^{31} = -\frac{1}{4i} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})],
 \end{aligned}$$

$$a^3 = S^{03} = -\frac{i}{2} (\xi^1 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{1*}), \quad b^3 = S^{12} = -\frac{1}{2} (\xi^1 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{1*}). \quad (1.8)$$

Вычислим основной инвариант для вектора Стокса:

$$S_0 S_0 - S_j S_j = (\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*})^2 - (\xi^1 \xi^{1*} - \xi^2 \xi^{2*})^2 - \\ - (\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*})^2 + (\xi^1 \xi^{2*} - \xi^2 \xi^{1*})^2 = 4(\xi^1 \xi^{1*}) (\xi^2 \xi^{2*}) - 4(\xi^1 \xi^{2*}) (\xi^2 \xi^{1*}) = 0.$$

Следовательно, S_a может рассматриваться как вектор Стокса полностью поляризованного света [1]; соответственно, построенный тензор S_{mn} может рассматриваться как тензор поляризации полностью поляризованного света; обе эти тензорные величины построены из биспинора типа Джонса (обычно рассматривают только 2-компонентный спинор Джонса [1]). Вычислим два возможных инварианта для тензора поляризации S_{mn} . Первый инвариант равен

$$I_1 = -\frac{1}{2} S^{mn} S_{mn} = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = \\ = \frac{1}{16} \{ -[(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})]^2 - [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})]^2 + \\ + [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})]^2 + [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})]^2 - \\ - 4(\xi^1 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{1*})^2 - 4(\xi^1 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{1*})^2 \} = 0. \quad (1.9)$$

Второй инвариант равен

$$I_2 = \frac{1}{4} \varepsilon_{abmn} S^{ab} S^{mn} = \mathbf{ab} = \frac{i}{16} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2)^2 - (\xi^{1*} \xi^{1*} - \xi^{2*} \xi^{2*})^2 - \\ - (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2)^2 + (\xi^{1*} \xi^{1*} + \xi^{2*} \xi^{2*})^2 + 4(\xi^1 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{1*})(\xi^1 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{1*})] = \\ = \frac{i}{16} [(-4\xi^1 \xi^1 \xi^2 \xi^2 + 4\xi^{1*} \xi^{1*} \xi^{2*} \xi^{2*}) + (4\xi^1 \xi^1 \xi^2 \xi^2 - 4\xi^{1*} \xi^{1*} \xi^{2*} \xi^{2*})] = 0. \quad (1.10)$$

Можно получить выражения для стоксовых 4-вектора и 4-тензора через параметры исходного биспинора Джонса (M, N, α, β) :

$$\Psi = \begin{pmatrix} N e^{i\alpha} \\ +M e^{i\beta} \\ -M e^{-i\beta} \\ N e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad \Psi \otimes \Psi \Rightarrow S_a \neq 0, S_{mn} \neq 0,$$

$$S_0 = M^2 + N^2, S_3 = M^2 - N^2, S_1 = -2MN \cos(\alpha - \beta), S_2 = 2MN \sin(\alpha - \beta); \quad (1.11)$$

$$a^1 = S^{01} = -\frac{1}{2}(N^2 \sin 2\alpha - M^2 \sin 2\beta), \quad b^1 = S^{23} = +\frac{1}{2}(N^2 \cos 2\alpha - M^2 \cos 2\beta), \\ a^2 = S^{02} = -\frac{1}{2}(N^2 \cos 2\alpha + M^2 \cos 2\beta), \quad b^2 = S^{31} = -\frac{1}{2}(N^2 \sin 2\alpha + M^2 \sin 2\beta), \\ a^3 = S^{03} = +NM \sin(\alpha + \beta), \quad b^3 = S^{12} = -NM \cos(\alpha + \beta). \quad (1.12)$$

6 компонент векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ задаются 4 параметрами N, M, α, β , но дополнительно выполняются ограничения:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \frac{(N^2 + M^2)^2}{4}, \quad \mathbf{ab} = 0. \quad (1.13)$$

Следовательно, величины $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ содержат 4 независимых параметра $N, M, \beta - \alpha, \beta + \alpha$,

тогда как 4-вектор Стокса зависит только от трех: $N, M, \beta - \alpha$. Вместо вещественного тензора S_{ab} можно ввести 3-мерный комплексный вектор $\mathbf{s} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} s^1 &= a^1 + ib^1 = S^{01} + iS^{23} = \frac{i}{2} (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2), \\ s^2 &= a^2 + ib^2 = S^{02} + iS^{31} = -\frac{1}{2} (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2), \\ s^3 &= a^3 + ib^3 = S^{03} + iS^{12} = -i \xi^1 \xi^2. \\ s_1 + is_2 &= -i \xi^2 \xi^2, \quad s_1 - is_2 = +i \xi^1 \xi^1, \quad s^3 = -i \xi^1 \xi^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Величина $\mathbf{s}$ преобразуется как вектор относительно комплексной группы вращения $SO(3, C)$. Таким образом, для описания полностью поляризованного света, наряду со спинором Джонса, 4-вектором Стокса, 4-тензором Стокса, можно использовать и комплексный 3-вектор Стокса:

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + i\mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i(N^2 e^{2i\alpha} - M^2 e^{2i\beta}) \\ -(N^2 e^{2i\alpha} + M^2 e^{2i\beta}) \\ -2iNM e^{i(\alpha+\beta)} \end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

Очевидно, этот комплексный вектор изотропен: $\mathbf{s}^2 = 0$.

Спинорный формализм и частично поляризованный свет

Исходим опять из известной связи между прямым произведением биспинора на себя с вектором и тензором:

$$\begin{aligned} U &= \Psi \otimes \Psi = (\gamma^b \Phi_b + i\sigma^{ab} \Phi_{ab}) E^{-1}; \\ U &= \begin{vmatrix} \xi^\alpha \xi^\beta & \xi^\alpha \eta_\beta \\ \eta_\alpha \xi^\beta & \eta_\alpha \eta_\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^{\alpha\beta} & \Delta^\alpha_\beta \\ H^\beta_{\dot{\alpha}} & \eta_{\dot{\alpha}\beta} \end{vmatrix}, \quad \gamma^a = \begin{vmatrix} 0 & \bar{\sigma}^a \\ \sigma^a & 0 \end{vmatrix}, \\ E &= \begin{vmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{vmatrix}, \quad \sigma^{ab} = \frac{1}{4} (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a), \quad \gamma^5 = \begin{vmatrix} -I & 0 \\ 0 & +I \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обратные соотношения имеют вид:

$$\Phi_a = \frac{1}{4} \text{Sp} [E \gamma_a U], \quad \Phi_{mn} = -\frac{1}{2i} \text{Sp} [E \sigma_{mn} U]. \quad (2.2)$$

В явной форме они дают:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{2} [(H_2^1 - H_1^2) - (\Delta_1^2 - \Delta_2^1)] = \xi^1 \eta_2 - \xi^2 \eta_1, \\ \Phi_1 &= \frac{1}{2} [(H_1^1 - H_2^2) + (\Delta_1^1 - \Delta_2^2)] = \xi^1 \eta_1 - \xi^2 \eta_2, \\ \Phi_2 &= \frac{i}{2} [(H_1^1 + H_2^2) + (\Delta_1^1 + \Delta_2^2)] = i(\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2), \\ \Phi_3 &= -\frac{1}{2} [(H_2^1 + H_1^2) + (\Delta_1^2 + \Delta_2^1)] = -(\xi^1 \eta_2 + \xi^2 \eta_1); \\ \Phi^{01} &= \frac{i}{4} [(\xi^{11} - \xi^{22}) + (\eta_{11} - \eta_{22})] = \frac{i}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)], \\ \Phi^{23} &= \frac{1}{4} [(\xi^{11} - \xi^{22}) - (\eta_{11} - \eta_{22})] = \frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{02} &= -\frac{1}{4} [(\xi^{11} + \xi^{22}) + (\eta_{11} + \eta_{22})] = -\frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2)], \\
\Phi^{31} &= -\frac{1}{4i} [(\xi^{11} + \xi^{22}) - (\eta_{11} + \eta_{22})] = -\frac{1}{4i} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2)], \\
\Phi^{03} &= -\frac{i}{4} [(\xi^{21} + \xi^{12}) + (\eta_{21} + \eta_{12})] = -\frac{i}{2} [\xi^1 \xi^2 + \eta_1 \eta_2], \\
\Phi^{12} &= -\frac{1}{4} [(\xi^{21} + \xi^{12}) - (\eta_{21} + \eta_{12})] = -\frac{1}{2} [\xi^1 \xi^2 - \eta_1 \eta_2].
\end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассмотрим свойства возникающих таким образом 4-вектора и 4-тензора, когда никаких дополнительных условий на биспинор не накладывается:

$$\begin{aligned}
\Phi_0^2 - \Phi_3^2 &= (\xi^1 \eta_2 - \xi^2 \eta_1)^2 - (\xi^1 \eta_2 + \xi^2 \eta_1)^2 = -4 \xi^1 \xi^2 \eta_1 \eta_2, \\
\Phi_1^2 + \Phi_2^2 &= (\xi^1 \eta_1 - \xi^2 \eta_2)^2 - (\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2)^2 = -4 \xi^1 \xi^2 \eta_1 \eta_2, \\
\Phi^0 \Phi^0 - \Phi_1 \Phi^1 - \Phi_2 \Phi^2 - \Phi_3 \Phi^3 &= 0,
\end{aligned} \quad (2.4)$$

т. е. комплексный вектор Φ_a изотропный. Выделим вещественную и мнимую части:

$$\Phi_0 = A + iB, \quad \Phi_j = A_j + iB_j, \quad A^2 - \mathbf{A}^2 = B^2 - \mathbf{B}^2, \quad AB - \mathbf{A}\mathbf{B} = 0. \quad (2.5)$$

Два вещественных 4-вектора A_n и B_n имеют одну и ту же длину (не обязательно нулевую) и ортогональны друг другу.

Теперь обратимся к анализу 4-тензора. Основное уравнение связи и комплексно сопряженное к нему имеют вид:

$$\begin{aligned}
E(\Psi \otimes \Psi) &= \gamma^n \Phi_n + i \sigma^{mn} \Phi_{mn}, \\
E(\Psi^* \otimes \Psi^*) &= (\gamma^n)^* \Phi_n^* - i (\sigma^{mn})^* \Phi_{mn}^*.
\end{aligned} \quad (2.6)$$

С учетом (используем спинорный базис) $(\gamma^n)^* = \gamma^2 \gamma^n \gamma^2$, $(\sigma^{mn})^* = -\gamma^2 \sigma^{mn} \gamma^2$ соотношения (2.6) дают

$$\begin{aligned}
(\Psi \otimes \Psi) &= [\gamma^n \Phi_n + i \sigma^{mn} \Phi_{mn}] E^{-1}, \\
(\gamma^2 \Psi^* \otimes \gamma^2 \Psi^*) &= [\gamma^n \Phi_n^* + i \sigma^{mn} \Phi_{mn}^*] E^{-1}.
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, справедливы тождества:

$$\begin{aligned}
A_n + iB_n = \Phi_n &= \frac{1}{4} \text{Sp} [E \gamma_n (\Psi \otimes \Psi)], \quad A_n - iB_n = \Phi_n^* = \frac{1}{4} \text{Sp} [E \gamma_n (\gamma^2 \Psi^* \otimes \gamma^2 \Psi^*)], \\
\Phi_{mn} &= -\frac{1}{2i} \text{Sp} [E \sigma_{mn} (\Psi \otimes \Psi)], \quad \Phi_{mn}^* = -\frac{1}{2i} \text{Sp} [E \sigma_{mn} (\gamma^2 \Psi^* \otimes \gamma^2 \Psi^*)].
\end{aligned} \quad (2.8a)$$

С использованием обозначения $\gamma^2 \Psi^* = \Psi^c$ они записываются короче:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{8} \text{Sp} [E \gamma_n (\Psi \otimes \Psi + \Psi^c \otimes \Psi^c)], \quad iB_n = \frac{1}{8} \text{Sp} [E \gamma_n (\Psi^c \otimes \Psi^c - \Psi \otimes \Psi)], \\
\Phi_{mn} &= -\frac{1}{2i} \text{Sp} [E \sigma_{mn} (\Psi \otimes \Psi)], \quad \Phi_{mn}^* = -\frac{1}{2i} \text{Sp} [E \sigma_{mn} (\Psi^c \otimes \Psi^c)].
\end{aligned} \quad (2.8b)$$

Вычислим компоненты тензора в явном виде:

$$\begin{aligned}
\Phi^{01} &= \frac{i}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)], \quad \Phi^{23} = \frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)], \\
s^1 &= \Phi^{01} + i\Phi^{23} = \frac{i}{2} (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2), \quad t^1 = \Phi^{01} - i\Phi^{23} = \frac{i}{2} (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{02} &= -\frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2)], & \Phi^{31} &= -\frac{1}{4i} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2)], \\ s^2 &= \Phi^{02} + i\Phi^{31} = -\frac{1}{2} (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2), & t^2 &= \Phi^{02} - i\Phi^{31} = -\frac{1}{2} (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2); \\ \Phi^{03} &= -\frac{i}{2} (\xi^1 \xi^2 + \eta_1 \eta_2), & \Phi^{12} &= -\frac{1}{2} (\xi^1 \xi^2 - \eta_1 \eta_2), \\ s^3 &= \Phi^{03} + i\Phi^{12} = -i \xi^1 \xi^2, & t^3 &= \Phi^{03} - i\Phi^{12} = -i \eta_1 \eta_2.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{t}$ изотропные:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^2 &= -\frac{1}{4} (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2)^2 + \frac{1}{4} (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2)^2 - (\xi^1 \xi^2)^2 \equiv 0, \\ \mathbf{t}^2 &= -\frac{1}{4} (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)^2 + \frac{1}{4} (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2)^2 - (\eta_1 \eta_2)^2 \equiv 0.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\mathbf{s} \mathbf{t} &= -\frac{1}{4} (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2)(\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2) + \\ &+ \frac{1}{4} (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2)(\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2) - \xi^1 \xi^2 \eta_1 \eta_2 = \frac{1}{2} (\xi^1 \eta_2 - \xi^2 \eta_1)^2.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Установим знак релятивистской длины вектора A_n (и длины вектора B_n):

$$\begin{aligned}2A_0 &= (\xi^1 \eta_2 - \xi^2 \eta_1) + (\xi^{1*} \eta_2^* - \xi^{2*} \eta_1^*), \\ 2A_3 &= -(\xi^1 \eta_2 + \xi^2 \eta_1) - (\xi^{1*} \eta_2^* + \xi^{2*} \eta_1^*), \\ A_1 &= (\xi^1 \eta_1 - \xi^2 \eta_2) + (\xi^{1*} \eta_1^* - \xi^{2*} \eta_2^*), \\ A_2 &= i(\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2) - i(\xi^{1*} \eta_1^* + \xi^{2*} \eta_2^*).\end{aligned}$$

Учитывая тождества

$$\begin{aligned}4(A_0^2 - A_3^2) &= -4\xi^1 \xi^2 \eta_1 \eta_2 - 4\xi^{1*} \xi^{2*} \eta_1^* \eta_2^* - 4\xi^1 \xi^{1*} \eta_2 \eta_2^* - 4\xi^2 \xi^{2*} \eta_1 \eta_1^*, \\ 4(A_1^2 + A_2^2) &= -4\xi^1 \xi^2 \eta_1 \eta_2 - 4\xi^{1*} \xi^{2*} \eta_1^* \eta_2^* + 4\xi^1 \xi^{1*} \eta_1 \eta_1^* + 4\xi^2 \xi^{2*} \eta_2 \eta_2^*,\end{aligned}$$

приходим к соотношению

$$A_0^2 - A^2 = -(\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*}) (\eta_1 \eta_1^* + \eta_2 \eta_2^*) < 0. \quad (2.11)$$

Следовательно, оба 4-вектора являются пространственноподобными и по этой причине не пригодны для описания частично поляризованного света [2].

Рассмотрим еще одну возможность построения 4-вектора и 4-тензора из биспинора:

$$\begin{aligned}\Psi \otimes (-i\Psi^c) &= (\xi^1, \xi^2, \eta_1, \eta_2) \otimes \begin{pmatrix} +\eta_2^* \\ -\eta_1^* \\ -\xi^{2*} \\ +\xi^{1*} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} +\xi^1 \eta_2^* & -\xi^1 \eta_1^* & -\xi^1 \xi^{2*} & +\xi^1 \xi^{1*} \\ +\xi^2 \eta_2^* & -\xi^2 \eta_1^* & -\xi^2 \xi^{2*} & +\xi^2 \xi^{1*} \\ +\eta_1 \eta_2^* & -\eta_1 \eta_1^* & -\eta_1 \xi^{2*} & +\eta_1 \xi^{1*} \\ +\eta_2 \eta_2^* & -\eta_2 \eta_1^* & -\eta_2 \xi^{2*} & +\eta_2 \xi^{1*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^{11} & \xi^{12} & \Delta_1^1 & \Delta_1^2 \\ \xi^{21} & \xi^{22} & \Delta_2^1 & \Delta_2^2 \\ H_1^1 & H_1^2 & \eta_{11} & \eta_{12} \\ H_2^1 & H_2^2 & \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Соответствующий 4-вектор задается соотношениями:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \frac{1}{2} [(\eta_2 \eta_2^* + \eta_1 \eta_1^*) + (\xi^2 \xi^{2*} + \xi^1 \xi^{1*})] > 0, \\ \Phi_3 &= -\frac{1}{2} [(\eta_2 \eta_2^* - \eta_1 \eta_1^*) + (-\xi^2 \xi^{2*} + \xi^1 \xi^{1*})], \\ \Phi_1 &= \frac{1}{2} [(\eta_1 \eta_2^* + \eta_2 \eta_1^*) - (\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*})], \\ \Phi_2 &= \frac{i}{2} [(\eta_1 \eta_2^* - \eta_2 \eta_1^*) + (-\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*})].\end{aligned}$$

Учитывая тождества

$$\begin{aligned}4(\Phi_0^2 - \Phi_3^2) &= 4\eta_1 \eta_1^* \eta_2 \eta_2^* + 4\xi^1 \xi^{1*} \xi^2 \xi^{2*} + 4\eta_1 \eta_1^* \xi^1 \xi^{1*} + 4\eta_2 \eta_2^* \xi^2 \xi^{2*}, \\ 4(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) &= 4\eta_1 \eta_1^* \eta_2 \eta_2^* + 4\xi^1 \xi^{1*} \xi^2 \xi^{2*} - 4\eta_1 \eta_2^* \xi^2 \xi^{1*} - 4\eta_2 \eta_1^* \xi^1 \xi^{2*},\end{aligned}$$

приходим к равенству

$$\Phi^a \Phi_a = \Phi_0^2 - \Phi_1^2 - \Phi_2^2 - \Phi_3^2 = \eta_1 \eta_1^* \xi^1 \xi^{1*} + \eta_2 \eta_2^* \xi^2 \xi^{2*} + \eta_1 \eta_2^* \xi^2 \xi^{1*} + \eta_2 \eta_1^* \xi^1 \xi^{2*}. \quad (2.13)$$

Покажем, что введенный 4-вектор временноподобный. С использованием обозначений

$$\xi = \begin{vmatrix} N_1 e^{im_1} \\ N_2 e^{im_2} \end{vmatrix}, \quad \eta = \begin{vmatrix} M_1 e^{im_1} \\ M_2 e^{im_2} \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

получаем

$$\Phi^a \Phi_a = N_1^2 M_1^2 + N_2^2 M_2^2 + 2N_1 M_1 N_2 M_2 \cos[(n_1 - n_2) - (m_1 - m_2)].$$

Следовательно,

$$(N_1 M_1 - N_2 M_2)^2 < \Phi_0^2 - \Phi_1^2 - \Phi_2^2 - \Phi_3^2 < (N_1 M_1 + N_2 M_2)^2. \quad (2.15)$$

И следовательно, 4-вектор Φ_a может рассматриваться как вектор Стокса S_a для частично поляризованного света [2]:

$$(N_1 M_1 - N_2 M_2)^2 < S_0^2 - \mathbf{S}^2 < (N_1 M_1 + N_2 M_2)^2. \quad (2.16)$$

Соответственно, два 2-спинора в (2.14) следует рассматривать как образующие биспинор Джонса для частично поляризованного света.

Остается установить явный вид тензора поляризации S_{ab} частично поляризованного света:

$$\begin{aligned}\Phi^{01} &= \frac{i}{4} [(\xi^1 \eta_2^* + \xi^2 \eta_1^*) - (\eta_1 \xi^{2*} + \eta_2 \xi^{1*})], \quad \Phi^{23} = \frac{1}{4} [(\xi^1 \eta_2^* + \xi^2 \eta_1^*) + (\eta_1 \xi^{2*} + \eta_2 \xi^{1*})], \\ \Phi^{02} &= -\frac{1}{4} [(\xi^1 \eta_2^* - \xi^2 \eta_1^*) + (-\eta_1 \xi^{2*} + \eta_2 \xi^{1*})], \quad \Phi^{31} = \frac{i}{4} [(\xi^1 \eta_2^* - \xi^2 \eta_1^*) - (-\eta_1 \xi^{2*} + \eta_2 \xi^{1*})], \\ \Phi^{03} &= -\frac{i}{4} [(\xi^2 \eta_2^* - \xi^1 \eta_1^*) + (-\eta_2 \xi^{2*} + \eta_1 \xi^{1*})], \quad \Phi^{12} = -\frac{1}{4} [(\xi^2 \eta_2^* - \xi^1 \eta_1^*) - (-\eta_2 \xi^{2*} + \eta_1 \xi^{1*})], \\ s^1 &= \frac{i}{2} (\xi^1 \eta_2^* + \xi^2 \eta_1^*), \quad s^2 = -\frac{1}{2} (\xi^1 \eta_2^* - \xi^2 \eta_1^*), \quad s^3 = -\frac{i}{2} (\xi^2 \eta_2^* - \xi^1 \eta_1^*). \quad (2.17)\end{aligned}$$

Комплексный 3-вектор является неизотропным:

$$4\mathbf{s}^2 = -(\xi^1 \eta_1^* - \xi^2 \eta_2^*)^2 \neq 0.$$

Заключение

Полученные результаты могут представлять интерес не только в поляризационной оптике, но также и в контексте описания уравнений Максвелла в спинорном подходе, когда вместо электромагнитных 4-потенциала A_μ и тензора $F_{\mu\nu}$ можно ввести фундаментальный электромагнитный биспинор $\Psi = (\xi, \eta)$. Также эти результаты могут быть полезными в контексте явного построения моделей для пространства-времени со спинорной структурой (например, см. [3]).

Работа поддержана грантом БРФФИ $\Phi 09K-123$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Снопко, В.Н. Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск, 1992. – 336 с.
2. Богуш, А.А. Бикватернионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш [и др.]. // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 5. – С. 71–76.
3. Red'kov, V.M. Maxwell Equations in Media, Group Theory and Polarization of the Light. / V.M. Red'kov. – 73 pages, arxiv/0906.2482.
4. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 496 с.

V.M. Red'kov. Spinor Formalism of the Lorentz Group and Polarized Light

The application of Lorentz group theory in the optics of polarized light is developed in the frames of Stokes – Mueller real and Jones complex formalisms. Stokes vector of completely and partly polarized light is analogous to the isotropic and time-like 4-vectors respectively in the frame of special relativity. The group theoretical problem on constructing these vectors in terms of 4-spinors is formulated as a problem of connecting spinor and vector description of a polarized light. The formulas produced in explicit form are substantially different for completely and partly polarized light.