

УДК 539.12:530.145

П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев

О ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ ДИРАКОВСКИХ ПОЛЕЙ (Ч.1)

Исследована внутренняя симметрия 8-компонентного дираковского поля в матричном подходе. Установлено, что классическая формулировка теории обладает внутренней симметрией $SO(3,2)$. На квантовом уровне остается симметрия $SO(3)$ ($SU(2)$), обычно сопоставляемая такому полю.

Введение

В работе [1] на примере уравнения Дирака был предложен новый подход к исследованию внутренней симметрии релятивистских волновых уравнений (РВУ) с дираковской алгеброй матриц.

В настоящей работе мы применим данный подход для установления полной группы внутренней симметрии лагранжевой формулировки 8-компонентного дираковского на классическом и квантовом уровнях.

Напомним, что под преобразованиями Q внутренней симметрии лагранжевой формулировки РВУ первого порядка, записанного в матричной форме

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0 \quad (1)$$

(Ψ – многокомпонентная волновая функция, Γ_μ – квадратные матрицы, m – массовый параметр), понимаются преобразования

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu), \quad (2)$$

удовлетворяющие требованиям:

матрица Q коммутирует со всеми матрицами Γ_μ , то есть

$$[Q, \Gamma_\mu] = 0; \quad (3)$$

для матрицы Q выполняется условие

$$Q^+ \eta Q = \eta, \quad (4)$$

где η – матрица билинейной лоренц-инвариантной формы $\Psi^+ \eta \Psi$, знак «+» означает эрмитовское сопряжение. Для бесконечно малых однопараметрических преобразований

$$Q = I + \omega J \quad (5)$$

(ω – параметр, J – генератор) условие (4) принимает вид:

$$(\omega J)^+ \eta = -\eta \omega J. \quad (6)$$

Вещественная форма дираковского поля

Итак, возьмем систему из двух уравнений Дирака

$$\begin{cases} (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 = 0, \\ (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где ψ_1, ψ_2 – биспиноры первого ранга, γ_μ – матрицы 4×4 , имеющие вид:

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Рассмотрим теорию, базирующуюся на лагранжиане

$$L = L_1 + L_2, \quad (9)$$

что соответствует выбору

$$\eta = I_2 \otimes \gamma_4 \quad (10)$$

матрицы билинейной формы.

Для решения поставленной задачи предварительно преобразуем систему (7). Возьмем от (7) комплексное сопряжение и, учитывая, что $\gamma_1^* = -\gamma_1$, $\gamma_2^* = \gamma_2$, $\gamma_3^* = -\gamma_3$, $\gamma_4^* = \gamma_4$, $\partial_i^* = \partial_i$, $\partial_4^* = -\partial_4$, получим уравнения:

$$\begin{cases} (-\gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 - \gamma_3 \partial_3 - \gamma_4 \partial_4 + m) \psi_1^* = 0, \\ (-\gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 - \gamma_3 \partial_3 - \gamma_4 \partial_4 + m) \psi_2^* = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Объединяя (11) с исходными уравнениями (7), приходим к системе из четырех (шестнадцати) уравнений, которая может быть записана в стандартной матричной форме (1). Матрицы Γ_μ 16x16 и матрица η в базисе

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_1^*, \psi_2^*) - \text{столбец} \quad (12)$$

для такой системы будут иметь вид:

$$\Gamma_1 = \gamma_4 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma_3 = \gamma_4 \otimes \gamma_3, \quad \Gamma_4 = \gamma_4 \otimes \gamma_4, \quad (13)$$

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_4. \quad (14)$$

Складывая и вычитая затем соответствующие уравнения (7) и (11) и вводя функции

$$\psi_1^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_1^*), \quad \psi_2^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 + \psi_2^*), \quad \psi_1^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_1^*), \quad \psi_2^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 - \psi_2^*), \quad (15)$$

получим эквивалентную исходной 16-компонентную систему уравнений, которая также может быть записана в форме (1). При этом, если расположить вещественные (ψ_1^r, ψ_2^r) и чисто мнимые (ψ_1^i, ψ_2^i) компоненты волновой функции, например, в последовательности

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) - \text{столбец}, \quad (16)$$

матрицы Γ_μ трансформируются к виду:

$$\Gamma_1 = -\gamma_5 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma_3 = -\gamma_5 \otimes \gamma_3, \quad \Gamma_4 = -\gamma_5 \otimes \gamma_4, \quad (17)$$

где $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$. Для матрицы же η сохраняется выражение (14).

Нетрудно убедиться, что при выборе (15) полевых функций в системе (1), (16), (17) последняя становится вещественной. Будем называть ее вещественной формой исходной системы (7), или 16-компонентным вещественным дираковским полем. Отметим, что аналогичным образом можно записать любое РВУ первого порядка с дираковской алгеброй матриц Γ_μ , в том числе и обычное уравнение Дирака [1]. Преимущество данной записи заключается в том, что она позволяет обнаружить симметрию, которая остается скрытой при использовании стандартной комплексной формы РВУ.

Внутренняя симметрия. Классический случай

При установлении группы внутренней симметрии системы (7), записанной в вещественной форме, необходимо учесть следующее. Волновая функция (16) содержит 8 вещественных и 8 мнимых компонент. Это соотношение должно (по определению) сохраняться при преобразованиях (2). Следовательно, к условиям (3), (6) в данном случае добавляется еще одно: преобразование Q должно оставлять вещественные (мнимые) компоненты волновой функции Ψ вещественными (мнимыми) в том смысле, что если Ψ_A – вещественная (мнимая) функция, то и $\Psi'_A = Q_{AB} \Psi_B$ – также вещественная (мнимая).

Применение условий, накладываемых на матрицу Q , удобнее всего проводить в так называемом фермионном базисе [2], в котором диракоподобные матрицы Γ_μ (17) принимают вид:

$$\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu. \quad (18)$$

Переход из базиса (16), (17) в фермионный базис осуществляется посредством унитарного преобразования:

$$A = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \quad (19)$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)].$$

Очевидно, что группа внутренней симметрии 16-компонентного вещественного дираковского поля может быть параметризована с помощью генераторов, которые содержатся в наборе

$$\Gamma'_\mu, \Gamma'_5, \Gamma'_\mu \Gamma'_5, \Gamma'_{[\mu} \Gamma'_{\nu]} = \frac{1}{2}(\Gamma'_\mu \Gamma'_\nu - \Gamma'_\nu \Gamma'_\mu), \quad (20)$$

описывающем внутреннюю $SU(4)$ -симметрию 16-компонентного комплексного поля Дирака [3]. Здесь Γ'_μ – квадратные матрицы размерности 16×16 , удовлетворяющие, как и Γ_μ (18), алгебре матриц Дирака, взаимно коммутирующие с Γ_μ и имеющие в фермионном базисе вид

$$\Gamma'_\mu = \gamma_\mu \otimes I_4. \quad (21)$$

Для того чтобы выделить в (20) генераторы, определяющие группу внутренней симметрии системы (7), записанной в вещественной форме (1), (16), (17), поступим следующим образом. С помощью преобразования A^{-1} (19) переведем генераторы (20) в базис (16), в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены. Получим:

$$\begin{aligned} J^1 &= \Gamma'_1 = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad J^2 = \Gamma'_2 = i\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2, \\ J^3 &= \Gamma'_3 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad J^4 = \Gamma'_4 = i\gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2, \\ J^5 &= \Gamma'_5 = \gamma_5 \otimes I_4, \quad J^6 = \Gamma'_1 \Gamma'_5 = i\gamma_1 \otimes \gamma_2, \\ J^7 &= \Gamma'_2 \Gamma'_5 = i\gamma_2 \otimes \gamma_2, \quad J^8 = \Gamma'_3 \Gamma'_5 = i\gamma_3 \otimes \gamma_2, \\ J^9 &= \Gamma'_4 \Gamma'_5 = i\gamma_4 \otimes \gamma_2, \quad J^{10} = \Gamma'_{[2} \Gamma'_{3]} = \gamma_2\gamma_3 \otimes I_4, \\ J^{11} &= \Gamma'_{[3} \Gamma'_{1]} = \gamma_3\gamma_1 \otimes I_4, \quad J^{12} = \Gamma'_{[1} \Gamma'_{2]} = \gamma_1\gamma_2 \otimes I_4, \\ J^{13} &= \Gamma'_{[1} \Gamma'_{4]} = \gamma_1\gamma_4 \otimes I_4, \quad J^{14} = \Gamma'_{[2} \Gamma'_{4]} = \gamma_2\gamma_4 \otimes I_4, \\ J^{15} &= \Gamma'_{[3} \Gamma'_{4]} = \gamma_3\gamma_4 \otimes I_4. \end{aligned} \quad (22)$$

Затем, используя определение (2), выражения (5), (22) для однопараметрических преобразований и условие, сформулированное в начале данного пункта, устанавливаем, какие из параметров ω в (5) являются вещественными, а какие – мнимыми. И наконец, проверяем, для каких однопараметрических преобразований выполняется условие (6), и таким образом находим группу внутренней симметрии лагранжиана рассматриваемого дираковского поля с одновременной ее явной параметризацией.

Проверка показывает, что условию (6) удовлетворяют следующие 10 генераторов:

$$\Gamma'_1, \Gamma'_3, \Gamma'_4, \Gamma'_5, \Gamma'_1\Gamma'_5, \Gamma'_3\Gamma'_5, \Gamma'_4\Gamma'_5, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}, \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]}, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}, \quad (23)$$

которым соответствуют 6 вещественных ($\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_{[31]}, \omega_{[14]}, \omega_{[34]}$) и 4 мнимых

$(\omega_5, \omega_{15}, \omega_{35}, \omega_{45})$ параметра. Для установления структуры группы, задаваемой генераторами (23) и соответствующими параметрами, выберем все параметры вещественными. При этом придем к генераторам

$$\Gamma'_1, \Gamma'_3, \Gamma'_4, i\Gamma'_5, i\Gamma'_1\Gamma'_5, i\Gamma'_3\Gamma'_5, i\Gamma'_4\Gamma'_5, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}, \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]}, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} \quad (24)$$

Здесь 6 генераторов $(\Gamma'_1, \Gamma'_3, \Gamma'_4, i\Gamma'_1\Gamma'_5, i\Gamma'_3\Gamma'_5, i\Gamma'_4\Gamma'_5)$ являются эрмитовскими и 4 $(i\Gamma'_5, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}, i\Gamma'_{[1}\Gamma'_{5]}, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]})$ – антиэрмитовскими.

Таким образом, получаем группу внутренней симметрии, изоморфную группе $SO(3,2)$. Обнаруженное в данном подходе расширение симметрии по сравнению с ожидаемой группой $SU(2)$ (или $SO(3)$ в присоединенном представлении) в рамках релятивистской квантовой механики соответствует перемешиванию состояний с противоположными значениями энергии, в том числе и для решений из двух различных уравнений Дирака. Группа $SO(3)$, ответственная за перемешивание однотипных по знаку энергии и проекции спина состояний из различных уравнений, содержится в $SO(3,2)$ в качестве подгруппы и задается генераторами

$$\Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}, \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]}, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}. \quad (25)$$

Внутренняя симметрия. Квантовый случай

Для того чтобы выяснить, сохраняется ли установленная выше $SO(3,2)$ -симметрия системы (7) на квантовом уровне, необходимо проверить инвариантность перестановочных соотношений для операторов рождения и уничтожения относительно соответствующих однопараметрических преобразований. С этой целью удобно перевести генераторы (24) из базиса (16), в котором они имеют вид (22), в базис

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) - \text{столбец}, \quad (26)$$

где $\bar{\psi}_i = \psi_i^\dagger \gamma_4 (i=1,2)$. В результате получим выражения:

$$\begin{aligned} \Gamma'_1 &= -i\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, \quad \Gamma'_3 = -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\ \Gamma'_4 &= -i\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_4, \quad i\Gamma'_5 = -i\gamma_4 \otimes I_4, \\ i\Gamma'_1\Gamma'_5 &= -\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, \quad i\Gamma'_3\Gamma'_5 = -\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\ i\Gamma'_4\Gamma'_5 &= -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_4, \quad \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]} = -\gamma_1\gamma_3 \otimes I_4, \\ \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]} &= \gamma_1\gamma_5 \otimes I_4, \quad \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = \gamma_3\gamma_5 \otimes I_4. \end{aligned} \quad (27)$$

Затем разложим ψ_i и $\bar{\psi}_i$ по «чистым» состояниям, представляющим решения уравнений (7) с положительными и отрицательными частотами и проекциями спина $s=1/2, -1/2$:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \sum_s a_{is} \psi_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is}^+ \psi_{is}^{(-)}, \\ \bar{\psi}_i &= \sum_s a_{is}^+ \bar{\psi}_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is} \bar{\psi}_{is}^{(-)}. \end{aligned} \quad (28)$$

При квантовании коэффициенты разложения $a_{is}^+, b_{is}^+, a_{is}, b_{is}$ принимают смысл операторов рождения и уничтожения, для которых постулируются антикоммутационные соотношения

$$\{a_{is}, a_{i's'}^+\} = \{b_{is}, b_{i's'}^+\} = \delta_{ii'} \delta_{ss'} \quad (29)$$

и все остальные антикоммутанты равны нулю.

Для проверки инвариантности соотношений (29) относительно однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами (27), надо установить соответствующие трансформационные свойства операторов рождения и уничтожения. В базисе,

определяемом выражениями (8), (26), (27), операторы знака энергии $\hat{\Gamma}_4$, проекции спина $\hat{S}_3 = -\frac{i}{4}\Gamma_{[1}\Gamma_{2]}$ и внутренней четности $\hat{\Pi} = I_2 \otimes (\hat{\sigma}_3 \otimes I_4)$, выступающие в данном случае в качестве операторов полного набора, имеют вид:

$$\hat{\Gamma}_4 = \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1), \quad (30)$$

$$\hat{S}_3 = \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1), \quad (31)$$

$$\hat{\Pi} = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1). \quad (32)$$

Располагая операторы рождения и уничтожения в столбец в последовательности, определяемой выражениями (30) – (32), и проводя над ним (столбцом) преобразования (5), где в качестве J берутся по очереди генераторы (27), устанавливаем искомые трансформационные свойства этих операторов.

В результате для однопараметрического преобразования, задаваемого, например, генератором Γ'_1 , получим:

$$\begin{aligned} a'_{1s} &= a_{1s} + \omega b_{2s}, \quad a'_{2s} = a_{2s} + \omega b_{1s}, \\ (a_{1s}^+)' &= a_{1s}^+ + \omega b_{2s}^+, \quad (a_{2s}^+)' = a_{2s}^+ + \omega b_{1s}^+, \\ b'_{1s} &= b_{1s} - \omega a_{2s}, \quad b'_{2s} = b_{2s} - \omega a_{1s}, \\ (b_{1s}^+)' &= b_{1s}^+ - \omega a_{2s}^+, \quad (b_{2s}^+)' = b_{2s}^+ - \omega a_{1s}^+. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя формулы (33), вычислим антикоммутант $\{a'_{1,1/2}, (b_{2,1/2}^+)' \}$:

$$\{a'_{1,1/2}, (b_{2,1/2}^+)' \} = \{a_{1,1/2}, b_{2,1/2}^+ \} + \omega \{a_{1,1/2}, a_{1,1/2}^+ \} + \omega \{b_{2,1/2}, b_{2,1/2}^+ \} = \{a_{1,1/2}, b_{2,1/2}^+ \} + 2\omega \neq \{a_{1,1/2}, b_{2,1/2}^+ \}.$$

Таким образом, данный антикоммутант, а значит и в целом условия квантования (29), не инвариантны относительно однопараметрических преобразований с генератором Γ'_1 .

В случае генератора $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}$ имеем:

$$\begin{aligned} a'_{1s} &= a_{1s} + \omega a_{2s}, \quad a'_{2s} = a_{2s} - \omega a_{1s}, \\ (a_{1s}^+)' &= a_{1s}^+ + \omega a_{2s}^+, \quad (a_{2s}^+)' = a_{2s}^+ - \omega a_{1s}^+, \\ b'_{1s} &= b_{1s} + \omega b_{2s}, \quad b'_{2s} = b_{2s} - \omega b_{1s}, \\ (b_{1s}^+)' &= b_{1s}^+ + \omega b_{2s}^+, \quad (b_{2s}^+)' = b_{2s}^+ - \omega b_{1s}^+. \end{aligned} \quad (34)$$

Прямая проверка показывает, что относительно преобразований (34) антикоммутационные соотношения (29) инвариантны.

Расчеты, проведенные для всех остальных однопараметрических преобразований (5) с генераторами (27), показывают, что инвариантность условий квантования (29) имеет место еще для двух генераторов: $\Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]}$, $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}$. Совместно с генератором $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}$ они образуют совпадающий с (24) набор генераторов, который ассоциируется с группой инвариантности $SU(2)$ ($SO(3,2)$) классического 8-компонентного дираковского поля в обычном подходе.

Предельный переход к уравнению Дирака

Предлагаемый в настоящей работе подход распространяется на дираковские поля произвольной $4n$ - размерности, в том числе и на одно уравнение Дирака. Правильные результаты для уравнения Дирака можно получить из вышеприведенных выражений путем вычеркивания во всех матрицах и генераторах строк и столбцов, соответствующих волновой функции ψ_2 . Так, из 10 генераторов (24) группы $SO(3,2)$ внутрен-

ней симметрии системы (7) остаются только три генератора:

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = i \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix}, \quad J^3 = i \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

получающиеся путем указанного предельного перехода из генераторов Γ'_3 , $i\Gamma'_5$, $i\Gamma'_3\Gamma'_5$. Поскольку генераторы J^1 и J^3 являются эрмитовскими, а генератор J^2 – антиэрмитовский, с учетом вещественности всех параметров приходим к выводу: лагранжева формулировка свободного классического уравнения Дирака обладает группой внутренней симметрии $SO(2,1)$. С физической точки зрения этот факт объясняется тем, что в отсутствие электромагнитного взаимодействия состояния частицы и античастицы являются неразличимыми.

Квантовая формулировка теории Дирака базируется на антикоммутационных соотношениях

$$\{a_s, a_{s'}^+\} = \{b_s, b_{s'}^+\} = \delta_{ss'}. \quad (36)$$

В базисе

$$\Psi = (\psi, \bar{\psi}) - \text{столбец} \quad (37)$$

операторы полного набора имеют следующий вид:

$$\hat{\Gamma}_4 = \text{diag}(1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1), \quad (38)$$

$$\hat{S}_3 = \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1). \quad (39)$$

Располагая операторы рождения и уничтожения в столбец в порядке, соответствующем выражениям (38), (39), и рассматривая, например, однопараметрическое преобразование с генератором J^3 , получим следующий закон преобразования этих операторов:

$$\begin{aligned} a'_{1/2} &= a_{1/2} + \omega b_{1/2}, & a'_{-1/2} &= a_{-1/2} - \omega b_{-1/2}, \\ (a_{1/2}^+)' &= a_{1/2}^+ + \omega b_{1/2}^+, & (a_{-1/2}^+)' &= a_{-1/2}^+ - \omega b_{-1/2}^+, \\ b'_{1/2} &= b_{1/2} + \omega a_{1/2}, & b'_{-1/2} &= b_{-1/2} - \omega a_{-1/2}, \\ (b_{1/2}^+)' &= b_{1/2}^+ + \omega a_{1/2}^+, & (b_{-1/2}^+)' &= b_{-1/2}^+ - \omega a_{-1/2}^+. \end{aligned} \quad (40)$$

Теперь, используя (40), вычислим антикоммутант $\{a'_{1/2}, (b_{1/2}^+)' \}$: $\{a'_{1/2}, (b_{1/2}^+)' \} = \{a_{1/2}, b_{1/2}^+\} + \omega \{a_{1/2}, a_{1/2}^+\} + \omega \{b_{1/2}, b_{1/2}^+\} = \{a_{1/2}, b_{1/2}^+\} + 2\omega \neq \{a_{1/2}, b_{1/2}^+\}$. Этот результат означает, что данный антикоммутант, а значит и в целом условия квантования уравнения Дирака, не инвариантны относительно преобразования, задаваемого генератором J^3 . Аналогичный вывод получается и для генератора J^2 . Генератор J^1 соответствует обычному фазовому преобразованию. Следовательно, квантовая формулировка теории Дирака обладает симметрией только относительно фазовых преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БрГУ. – 2009. – № 2. – С. 46–51.
2. Стражев, В.И. Уравнение Дирака-Кэлера. Классическое поле / В.И. Стражев, И.А. Сатиков, Д.А. Ционенко // Минск: изд-во БГУ. – 2007. – 196 с.
3. В.А. Плетюхов, В.И. Стражев / Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2009. – №2. – С. 3–7.

P.P. Andrusevich, V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev. On Internal Symmetry of Dirac Fields

The internal symmetry of the 8-component real Dirac field in matrix approach has been investigated. The classical formulation of the theory has the internal symmetry group $SO(3,2)$. The quantum formulation has the internal symmetry group $SO(3)$.