2. Семенчук, В.Н. Конечные группы с $\mathfrak{F}$-абнормальными или $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук // Математические заметки. – 1994.– Т. 56, № 6. – С. 111–115.
3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.

S.N. Shevchuk, V.N. Semenchuk. **Finite Groups Every Primary Subgroup of which is Either $\mathfrak{F}$-subnormal or $\mathfrak{F}$-abnormal**

We have studied finite groups in which every primary subgroups is either $\mathfrak{F}$-subnormal or $\mathfrak{F}$-abnormal. In particular, the full description of such groups in the case $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'}$ is obtained.

УДК 513.82

А.А. Юдов, Е.Е. Гурская

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ КАНОНИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ В РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работе изучаются канонические связности в редуктивных однородных пространствах G/G_i, где G – группа Ли движений пространства ${}^2R_4$, G_i – подгруппа Ли группы Ли вращений этого пространства. Строятся модели таких пространств и находятся геодезические линии канонической связности. Построенные геодезические линии полностью характеризуют каноническую связность.

Рассмотрим четырехмерное псевдоевклидово пространство нулевой сигнатуры – пространство ${}^2R_4$ и группу Ли G движений этого пространства.

Представим пространство ${}^2R_4$ в виде однородного φ-пространства В.И. Ведерникова.

Рассмотрим следующий эндоморфизм φ группы G:

$$\varphi : G \to G : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

При помощи эндоморфизма φ построим φ-пространство X по правилу:

$$X = \left\{ a\varphi\left(a^{-1}\right) \mid a \in G \right\}.$$

В этом множестве X транзитивно действует группа G:

$$(G, X) \to X : \left(g, a\varphi\left(a^{-1}\right)\right) \to g\ a\varphi\left(a^{-1}\right)\varphi\left(g^{-1}\right).$$

Следовательно, X становится однородным пространством со структурной группой G. Непосредственным вычислением получаем, что множество X состоит из элементов вида:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & \varepsilon \end{pmatrix} \right\}, \text{ где } \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Группа стационарности H элемента $O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $O \in X$, совпадает с множеством всех φ-неподвижных элементов группы G, т.е. с множеством:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & A & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \right\}.$$

Имеет место

Теорема 1. *G – пространства ${}^2R_4$ X, G/H изоморфны, причём G-изоморфизм задаётся отображениями*:

$$\delta,\psi:\begin{pmatrix}1\\x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\xrightarrow{\delta}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\x_1&1&0&0&0\\x_2&0&1&0&0\\x_3&0&0&1&0\\x_4&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\psi}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\x_1&1&0&0&0\\x_2&0&1&0&0\\x_3&0&0&1&0\\x_4&0&0&0&1\end{pmatrix}H.$$

Рассмотрим для модели φ-пространства X формулы канонической проекции:

$$\pi: G\to X\equiv G/H: a\to aH,$$

$$\pi: G\to G/H\equiv X:\begin{pmatrix}1&0\\t&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\t&A\end{pmatrix}H=\begin{pmatrix}1&0\\t&E\end{pmatrix}H\equiv\begin{pmatrix}1&0\\t&E\end{pmatrix}\in X$$

и её дифференциал:

$$d\pi_{|e}:\overline{G}\to T_{\pi(e)}(G/H):\begin{pmatrix}0&0\\\tau&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0\\\tau&0\end{pmatrix}.$$

Сформулируем следующую теорему А.С. Понтрягина:

Теорема 2. [3, с. 156]. *Пусть G – непрерывная транзитивная группа преобразований топологического пространства Г и α – некоторая фиксированная точка пространства Г. Обозначим через $\psi(\xi)$ множество всех элементов $x\in G$, удовлетворяющих условию $x^*(\alpha)=\xi$. Оказывается, что $H_\alpha=\psi(\alpha)$ есть подгруппа топологической группы G, ψ есть взаимно однозначное отображение множества Г на множество G/H_α левых смежных классов. Оказывается, что ψ^{-1} есть непрерывное отображение пространства G/H на пространство Г. Пусть φ – тождественное отображение группы G на себя. Если пространства G и Г локально бикомпактны и пространство G представимо как сумма счётного множества своих бикомпактных подмножеств, то пара φ, ψ есть подобие пары G, Г на пару G, G/H_α.*

Введем следующие определения.

Определение 1. *Образом стационарности подгруппы K группы G называется совокупность D фигур пространства ${}^2R_4$ и ему соответствующего векторного пространства ${}^2E_4$ таких, что группе K принадлежат те и только те преобразования, при которых каждая из фигур совокупности D инвариантна.*

Определение 2. *Упорядоченная совокупность фигур пространства ${}^2R_4$ называется флагом, если все фигуры этой совокупности являются k-плоскостями (k = 0, 1, 2, 3, 4) пространства ${}^2R_4$, причем каждая последующая плоскость содержится в предыдущей.*

Флаг выписывается в порядке убывания размерности элементов.

Все подгруппы Ли группы Ли H, имеющие флаговые образы стационарности, перечислены в работе [2].

Ниже приведены все такие подгруппы Ли группы Ли H, причем подгруппы Ли задаются своими алгебрами Ли:

$\overline{G}_1=\{i_{10}\}$, о.с. – точечно-неподвижная евклидова плоскость $\overset{\circ}{R}_2$.

$\overline{G}_2=\{i_5\}$, о.с. – точечно-неподвижная мнимоевклидова плоскость ${}^2\overset{\circ}{R}_2$.

$\overline{G}_3=\{i_6\}$, о.с. – точечно-неподвижная псевдоевклидова плоскость ${}^1\overset{\circ}{R}_2$.

$\overline{G}_4=\{i_8-i_{10}\}$, о.с. – точечно-неподвижная полуевклидова плоскость $\overset{\circ}{R}{}_2^1$.

$\overline{G}_5=\{i_5-i_7\}$, о.с. – точечно-неподвижная полумнимоевклидова плоскость ${}^1\overset{\circ}{R}{}_2^1$.

$\overline{G}_6=\{i_5-i_7-i_8+i_{10}\}$, о.с. – точечно-неподвижная изотропная плоскость $\overset{\circ}{R}{}_2^2$.

$\overline{G}_{14}=\{i_5, i_{10}\}$, о.с. – обобщенный флаг $\{R_2, R_0\}$.

$\overline{G}_{15}=\{i_6, i_9\}$, о.с. – флаг $\{{}^1R_2, R_0\}$.

$\overline{G}_{16}=\{i_9, i_8-i_{10}\}$, о.с. – флаг $\{R_2{}^1, R_1, R_0\}$.

$\overline{G}_{17}=\{i_9, i_5-i_7\}$, о.с. – флаг $\{{}^1R_2{}^1, {}^1R_1, R_0\}$.

$\overline{G}_{18}=\{i_5-i_7, i_8-i_{10}\}$, о.с. – флаг $\{R_2{}^1, \overset{\circ}{R}{}_1^1, R_0\}$.

$\overline{G}_{27}=\{i_8, i_9, i_{10}\}$, о.с. – флаг $\{R_1, R_0\}$.

$\overline{G}_{28}=\{i_5, i_7, i_9\}$, о.с. – флаг $\{{}^1R_1, R_0\}$.

$\overline{G}_{29}=\{i_6, i_5-i_7, i_8-i_{10}\}$, о.с. – точечно-неподвижная изотропная прямая $\overset{\circ}{R}{}_1^1$.

$\overline{G}_{30}=\{i_9, i_5-i_7, i_8-i_{10}\}$, о.с. – флаг $\{R_2{}^1, R_0\}$.

$\overline{G}_{36}=\{i_6, i_9, i_5-i_7, i_8-i_{10}\}$, о.с. – флаг $\{R_1{}^1, R_0\}$.

$\overline{G}_{40}=\{i_6, i_9, i_5-i_7, i_5-i_{10}, i_8-i_{10}\}$, о.с. – флаг $\{R_2{}^2, R_0\}$.

$H=\{i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}$, о.с. – точка R_0.

Будем рассматривать каноническую связность на редуктивном однородном пространстве [1, гл.11]. Следующая теорема обосновывает существование связности, инвариантной под действием левых сдвигов группы Ли G на редуктивном однородном пространстве G/H.

Теорема 3. [1, с. 104]. *Пусть G – связная группа Ли, а H – её замкнутая подгруппа. Пусть $\overline{G}$ и $\overline{H}$ – алгебры Ли для G и H соответственно.*

(1) Если существует подпространство m в $\overline{G}$ такое, что $\overline{G}=\overline{H}+m$ (прямая сумма) и ad(H)m=m, то $\overline{H}$-компонента ω канонической 1-формы θ в G по отношению к разложению $\overline{G}=\overline{H}+m$ определяет связность в расслоении G (G/H, H), инвариантную под действием левых сдвигов из G.

(2) Обратно, любая связность в G (G/H, H), инвариантная под действием левых сдвигов из G (если она существует), определяет такое разложение $\overline{G}=\overline{H}+m$ и может быть получена так, как это описано в (1).

Инвариантная связность в главном расслоении *P(M, G)=G* (G/H, H), заданная теоремой 3, называется канонической связностью.

Согласно теореме Понтрягина, однородное пространство задается как множество точек-образов начальной точки (опорного элемента). В качестве опорного элемента для пространства G/G_i будем брать образ стационарности подгруппы Ли G_i. Имеет место теорема.

Теорема 4. [1, с.180]. *Пусть G/H редуктивное однородное пространство и m – редуктивное дополнение. Для канонической связности этого пространства выполняются следующие условия*:

1) *для каждого* $X \in m$ *пусть* $f_t = exp(t)\ X$ *в* G *и* $x_t = f_t(o)$, *где* o – *начальный элемент однородного пространства* G/H. *Тогда параллельный перенос касательных векторов в* o *вдоль кривой* x_t, $0 \le t \le s$, *совпадает с дифференциалом от* f_s, *действующим на* G/H;
2) *для каждого* $X \in m$ *кривая* $x_t = f_t(o)$ *есть геодезическая. Обратно, каждая геодезическая, исходящая из* o, *имеет вид* $f_t(o)$ *для некоторого* $X \in m$;
3) *каноническая связность полна.*

Среди однородных редуктивных пространств с двумерными группами стационарности флаговый образ стационарности имеют группы G_{14} и G_{15}: (R_2, R_0) и $({}^1R_2, R_0)$ соответственно. Будем задавать ${}^2R_4$ как φ-пространство. Тогда евклидова плоскость, точка R_0 (начало координат) и псевдоевклидова плоскость будут задаваться соответственно матрицами:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^1R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим редуктивные однородные пространства G/G_{14}, G/G_{15}. Редуктивные дополнения для них имеют соответственно вид: $\{ i_1, i_2, i_3, i_4, i_6, i_7, i_8, i_9\}$; $\{ i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_7, i_8, i_{10}\}$.

Однопараметрическая группа Ли, соответствующая оператору i_k $(k=1, 2, 3\ldots10)$, состоит из элементов вида:

$$e^{t i_k} = E + t i_k + \frac{t^2 i_k^{\,2}}{2!} + \frac{t^3 i_k^{\,3}}{3!} + \ldots \quad . \tag{1}$$

Приведем пример нахождения геодезических линий на примере оператора i_5.

$$i_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad i_5^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad i_5^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad i_5^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Исходя из формулы (1) получим:

$$e^{t i_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^3}{6} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}-\ldots & t-\frac{t^3}{6}+\ldots & 0 & 0 \\ -t+\frac{t^3}{6}-\ldots & 1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}-\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$e^{-t i_5} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ – обратная матрица.

Начальную точку однородного пространства G/G_{15} будем задавать с помощью матрицы вида $\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$, где левый верхний блок задает точку R_0, а правый нижний блок при произвольных λ, μ задает псевдоевклидову плоскость. Элемент группы $e^{t i_5}$ действует одновременно на точку и плоскость и определяет таким образом траекторию флага (геодезическую линию).

Геодезические линии, соответствующие оператору i_5, имеют, таким образом, вид:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\cos t&\sin t&0&0&0&0&0&0&0\\0&-\sin t&\cos t&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\cos t&\sin t&0&0\\0&0&0&0&0&0&-\sin t&\cos t&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\times\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\times$$

$$\times\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\cos t&-\sin t&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sin t&\cos t&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\cos t&-\sin t&0&0\\0&0&0&0&0&0&\sin t&\cos t&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda\cos t&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&-\lambda\sin t&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

Аналогично получаем геодезические линии, соответствующие остальным операторам:

$$i_7=i_7^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix};\ i_7^2=i_7^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};\ e^{t i_7}=\begin{bmatrix}cht&0&0&sht\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\sht&0&0&cht\end{bmatrix};\ e^{-t i_7}=\begin{bmatrix}cht&0&0&-sht\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-sht&0&0&cht\end{bmatrix}.$$

Геодезические линии, соответствующие операторам i_7, i_8, i_{10}, i_1, i_2, i_3, i_4, имеют вид:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda cht&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&\lambda sht&0&0&0&1\end{array}\right];\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&\mu sht&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&\mu cht&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right];\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&\mu\cos t&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&-\mu\sin t&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ t&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right];\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ t&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right];\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ t&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ t&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$ соответственно.

Начальную точку однородного пространства G/G_{14} будем задавать с помощью матрицы вида $$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right].$$

Таким образом, геодезические линии, соответствующие операторам i_6, i_7, i_8, i_9, i_1, i_2, i_3, i_4, будут иметь вид:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda cht&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda sht&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right];\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda cht&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda sht&0&0&0&1\end{array}\right];\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu cht&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu sht&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu cht&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&\mu sht&0&0&0&1\end{array}\right];\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ t&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right];\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ t&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\t&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right];\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\t&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$ соответственно.

Геодезические линии, соответствующие линейным комбинациям базисных векторов из редуктивного дополнения, получаются в соответствии со свойствами отображения exp в результате перемножения матриц, полученных для базисных операторов. Таким образом, получены всевозможные геодезические линии рассматриваемых редуктивных однородных пространств (Теорема 3, усл. 2).

Аналогичные задачи решены для редукивных однородных пространств с одномерной, трехмерной и четырехмерной группами стационарности О.Н. Курочкой, Н.В. Пугач.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Параметр t на вышеопределенных геодезических линиях является каноническим.*

Доказательство.

Параметр t на геодезической $x_i=x_i(t)$, для которого $\frac{dx_i}{dt}$ есть параллельно переносимый касательный вектор, называется каноническим параметром. Согласно теореме Номидзу и Кобаяси (Теорема 3, усл.1), параллельный перенос касательных векторов вдоль кривой $x(t)$ совпадает с дифференциалом от T_s, где T_s – движение в рассматриваемом однородном пространстве, индуцированное левыми сдвигами фундаментальной группы. Имеет место формула $\pi\circ L_s= T_s\circ\pi$ и, соответственно, для дифференциалов: $d\pi\circ dL_s= dT_s\circ d\pi$. Для однопараметрической подгруппы $e^{t\,i_k}$ вектор i_k является параллельно переносимым при помощи dL_s касательным вектором. Касательный вектор геодезической линии $x_i=x_i(t)=\pi(e^{t\,i_k})$ также переносится параллельно вдоль геодезической в силу задания движений в однородном пространстве. Теорема 5 доказана.

Имеют место теоремы.

Теорема 6. [4, с. 424]. *Линейная связность без кручения полностью определяется заданием геодезических линий и канонических параметров на них.*

Тензоры кручения T канонической связности в однородных пространствах G/G_{14}, G/G_{15} равны нулю. Учитывая теорему 6, получаем следующую теорему:

Теорема 7. *Геодезические линии, полученные выше, полностью характеризуют каноническую связность в редуктивных однородных пространствах G/G_{14}, G/G_{15}.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.

2. Курочка, О. Н. Подгруппы группы движений четырехмерного псевдоевклидового пространства ${}^2R_4$ нулевой сигнатуры, имеющие флаговый образ стационарности / О. Н. Курочка // Вестник БрГУ. – 2002. – № 6. – С. 18–28.