$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\|\Delta_m\| = \lim_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = \lim_{\delta,\beta\to 0}\left(\|C^m\Delta_0\| + m(\|B\|\delta + \|C\|\beta)\right) = 0.$$

Итак, доказано, что $\lim_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$ при $m\to\infty$, т. е. метод (3) с правилом останова (4) сходится в исходной норме гильбертова пространства. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерационной процедуры решения линейных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вестник Брестского ун-та. – 2008. – № 1(30). – С. 15–21.
2. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
3. Савчук, В.Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.
4. Матысик, О.В. Об апостериорном выборе числа итераций в неявной итерационной процедуре для решения уравнений I рода / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вестник Брестского ун-та. – 2008. – № 2(31). – С. 11–18.
5. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Наука. – 1971. – 1108 с.

O.V. Matysik, V.F. Savchuk. **On theConvergence of the Implicite Iteration Method with the Rule of Neighboring Approximations for Solving Incorrect Problems**

In the Hilbert space for solving linear operator equations with affirmative limited and non self–conjugate operator the non-explicit iteration method is proposed. The application of the rule of neighboring approximations for the offered method has been proved, which makes the viewed iteration method quite effective even when there are no data about source representability of exact solution. In its initial norm of Gilbert space the convergence of the iteration method is proved and the estimation of the moment of stop is received.

УДК 512.542

В.С. Монахов, А.А. Трофимук

КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ПОРЯДКАМИ ФАКТОРОВ НОРМАЛЬНОГО РЯДА, СВОБОДНЫМИ ОТ КУБОВ

Натуральное число n называется свободным от кубов, если p^3 не делит n для всех простых p. Группа называется A_4-свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4. Изучено строение конечных разрешимых групп с порядками факторов нормального ряда, свободного от кубов. В частности, исследованы группы нечетного порядка и A_4-свободные группы с таким свойством. Получены точные оценки производной длины и p-длины таких групп.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и определения соответствуют [1–2].

Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, а при $m = 3$ – от кубов.

Если порядок группы G свободен от квадратов, то в G существует циклическая холлова подгруппа N такая, что G/N циклическая [2, теорема IV.2.11]. В частности, G сверхразрешима и ее производная длина не превосходит 2.

Группы порядков, свободных от кубов, могут быть неразрешимыми. В работе [3] перечислены все такие группы:

если G – неразрешимая группа порядка, свободного от кубов, то $G = A \times B$, где A – разрешимая подгруппа, $B \cong PSL(2,r)$, r – простое число, $r \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\, 8)$ и числа $r-1$ и $r+1$ свободны от кубов.

Для разрешимой группы G порядка, свободного от кубов, в работе [3] доказаны следующие утверждения:

а) производная длина G не превышает 3;

б) G – дисперсивная группа;

в) $\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре;

г) $2'$-холлова подгруппа метабелева;

д) если G не дисперсивна по Оре, то существует нормальная подгруппа N такая, что G/N изоморфна знакопеременной группе A_4.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

Вполне естественно возникает следующая задача: *исследовать строение разрешимой группы с ограниченными порядками факторов ее нормального ряда.*

Несложно проверить, что если у группы G имеется нормальный ряд, факторы которого имеют порядки, свободные от квадратов, то G сверхразрешима (см. лемму 6 настоящей статьи). В случае, когда факторы имеют порядки, свободные от кубов, доказывается следующая теорема.

Теорема. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от кубов. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Нильпотентная длина G не превышает 4, а производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

2. Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре подгруппу N такую, что G/N сверхразрешима.

3. $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$ и $l_p(G) \le 1$ для всех простых $p > 3$.

4. Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3\}'$-холлову подгруппу.

5. Если G A_4 свободна, то:

5.1) $l_p(G) \le 1$ для любого простого p;

5.2) производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3;

5.3) G дисперсивна по Оре.

6. Если G имеет нечетный порядок, то коммутант G нильпотентен. В частности, $G/\Phi(G)$ метабелева.

Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G, а $l_p(G)$ – ее p-длина. Группа G называется A_4-свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4.

Построены примеры, показывающие, что все оценки, полученные в теореме, являются точными.

Определения и вспомогательные результаты

Говорят, что группа G дисперсивна, если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Дисперсивной по Оре называют группу G порядка $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, где $p_1 > p_2 > \dots > p_k$, у которой имеется нормальный ряд (1) такой, что $m = k$ и для каждого $i = 1,2,\dots,k$ фактор G_i/G_{i-1} изоморфен силовской p_i-подгруппе группы G.

Если все факторы ряда (1) абелевы и m – наименьшее среди всех нормальных рядов с абелевыми факторами, то значение m называют производной длиной группы G и обозначают через $d(G)$.

Если все факторы ряда (1) нильпотентны и m – наименьшее среди всех нормальных рядов с нильпотентными факторами, то значение m называют нильпотентной длиной группы G и обозначают через $n(G)$.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1; 4]. Пусть F – некоторая формация групп и G – группа. Тогда G^{F} – F-корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathsf{F}$. Произведение $\mathsf{FH} = \{G \in G \mid G^{\mathsf{H}} \in \mathsf{F}\}$ формаций F и H состоит из всех групп G, для которых H-корадикал принадлежит формации F. Как обычно, $\mathsf{F}^2 = \mathsf{FF}$. Формация F называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathsf{F}$ следует, что $G \in \mathsf{F}$. Формации всех нильпотетных и абелевых групп обозначают через N и A соответственно.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. [5, леммы 4,5] Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$. Тогда:

1. Если $n=2$, то $H \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^4$.

2. Если $n=3$, то $H \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^5$.

Лемма 2. Если H – подгруппа группы $GL(3,2)$, то $H \in \{1,\ GL(3,2),\ Z_2,\ Z_3,\ Z_7,\ Z_2 \times Z_2,\ Z_4,\ D_8,\ S_3,\ A_4,\ S_4,\ [Z_7]Z_3\}$.

Доказательство. По теореме II.6.14. [2] группа $GL(3,2) \cong PSL(2,7)$, а по теореме II.8.27 [2] подгруппа H из заключения леммы.

Лемма 3. Пусть H – A_4-свободная p'-подгруппа группы $GL(2,p)$. Тогда H метабелева.

Доказательство. В теореме 3.4 [6] перечислены все виды подгрупп группы $GL(2,p)$. Согласно этой теореме любая подгруппа в группе $GL(2,p)$ сопряжена с подгруппой G одного из следующих типов:

1) G циклическая;

2) $G = QM$, где Q – p-подгруппа,

$$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix} \mid \tau \in GF(q) \rangle,$$

$M \subseteq N_G(Q)$ и M – подгруппа группы D всех диагональных матриц;

3) $G = \langle Z_u, s \rangle$, где u делит q^2-1, $y^s = y^q$ для всех $y \in Z_u$, и s^2 – скалярный 2-элемент в Z_u;

4) $G = \langle M, s \rangle$, где $M \subseteq D$ и $|G:M| = 2$;

5) $G = \langle SL(2,p^\beta), V \rangle$ или $G = \langle SL(2,p^\beta), V, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \varepsilon b \end{pmatrix} \rangle$,

где V – скалярная матрица, ε – образующий элемент $(GF(p^\beta))^*$, $p^\beta > 3$, β делит α. Во втором случае $|G : \langle SL(2,p^\beta), V \rangle| = 2$;

6) $G/\langle -E \rangle$ изоморфна $S_4 \times Z_u$, $A_4 \times Z_u$ или $A_5 \times Z_u$, если $p \neq 5$, где Z_u – скалярная подгруппа $GL(2,q)/\langle -E \rangle$, а E – единичная матрица;

7) G не является группой из пункта (6), но $G/\langle -E \rangle$ содержит $A_4 \times Z_u$ в качестве подгруппы индекса 2 и A_4 в качестве подгруппы с циклической фактор-группой, Z_u – группа такая, как в пункте (6), где u – четное число.

Подгруппа из п. 1 абелева. Порядок подгруппы из п. 2 делится на p. Учитывая, что группа всех диагональных матриц является абелевой, получим, что в пп. 3–4 подгруппа H метабелева. Подгруппа из пп. 5–7 не является A_4-свободной. Итак, если H – A_4-свободная p'-подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева. Лемма доказана.

Лемма 4. Если G – метанильпотентная группа, то $l_p(G) \leq 1$ для любого простого p.

Доказательство. Пусть N – нильпотентная нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой нильпотентна. Для любого простого p группа $N = N_p \times N_{p'}$, где N_p – силовская p-подгруппа группы N, а $N_{p'}$ – ее дополнение. Так как $N_{p'} \lhd G$, то $G_pN_{p'} \triangleleft G$, где G_p – силовская p-подгруппа группы G, поэтому $l_p(G) \le 1$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть n – натуральное число и группа G обладает нормальным рядом с факторами порядков, свободных от n-х степеней.

1. Если H – подгруппа группы G, то H обладает нормальным рядом с факторами порядков, свободных от n-х степеней.

2. Если N – нормальная подгруппа группы G, то G/N обладает нормальным рядом с факторами порядков, свободных от n-х степеней.

Доказательство. Доказательство – простая проверка.

Лемма 6. Если у группы G имеется нормальный ряд с факторами порядков, свободных от квадратов, то G сверхразрешима. В частности, G дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен, нильпотентная длина группы G не выше 2, а производная длина $G/\Phi(G)$ не выше 2.

Доказательство. Пусть ряд (1) является нормальным рядом с силовскими подгруппами простого порядка в факторах. Согласно теореме Цассенхауза [2, теорема IV.2.11], коммутант каждого фактора ряда (1) является циклической холловой подгруппой, фактор-группа по которой также циклическая. Поэтому ряд (1) можно уплотнить до нормального ряда с циклическими факторами. Теперь G сверхразрешима, а из свойств сверхразрешимых групп следует дисперсивность по Оре группы G и нильпотентность ее коммутанта. Последнее также означает, что нильпотентная длина группы G не выше 2. Так как коммутант G' нильпотентен, то он содержится в подгруппе Фиттинга $F(G)$ и $G/F(G) \cong (G/G')/(F(G)/G')$ абелева группа. Но в любой группе $F(G)/\Phi(G)$ абелева и $(G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G)) \cong G/F(G)$. Теперь $G/\Phi(G)$ имеет производную длину не выше 2.

Доказательство теоремы

Пусть ряд (1) является нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от кубов. Без ограничения общности можно считать, что $G_1 \ne 1$. Воспользуемся индукцией по порядку группы G и покажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Здесь $\mathfrak{N}_{2'}$ – формация всех нильпотентных групп нечетного порядка, $\mathfrak{N}_2$ – формация всех 2-групп, а $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{U}$ – формации всех абелевых, нильпотентных и сверхразрешимых групп соответственно. Хорошо известно, что формационные произведения $\mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$ являются насыщенными формациями, поэтому $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. В силу леммы 5 собственные подгруппы и фактор-группы группы G обладают нормальными рядами с факторами порядков, свободных от кубов. Поэтому на них распространяется индукция и они принадлежат $\mathfrak{F}$. Значит, можно считать, что $\Phi(G)=1$ и $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Кроме того, $F = C_G(F)$. Ясно, что $F \subseteq G_1$, поэтому F является подгруппой некоторой силовской p-подгруппы группы G_1 и порядок F равен p или p^2 для некоторого простого p.

Пусть сначала $|F| = p$. Тогда G/F – циклическая группа как группа автоморфизмов группы простого порядка p и G сверхразрешима. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(2,p)$. Из п. 1 леммы 1 следует, что $G/F \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^4$, поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Если $p = 2$, то из включения $G/F \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ следует, что $G \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Если $p \neq 2$, то из включения $G/F \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ следует, что $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Итак, в любом случае $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$.

1. Поскольку сверхразрешимые группы имеют нильпотентный коммутант, то из включения $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ следует, что нильпотентная длина группы G не превышает 4. Из включения $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$ получаем, что производная длина $G/F(G)$ не превышает 4. Но в любой разрешимой группе G фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ абелева. Значит, производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

2. Из включения $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ следует, что сверхразрешимый корадикал $G^{\mathfrak{U}}$ принадлежит формации $\mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2$. Поэтому $G^{\mathfrak{U}} = [H]P$, где H – $2'$-холлова подгруппа, P – силовская 2-подгруппа. Так как $H \in \mathfrak{N}_{2'}$, то H нильпотентна нечетного порядка и $G^{\mathfrak{U}}$ будет дисперсивной по Оре.

3. Из леммы 4 получаем, что $l_p(G) \le 2$ для любого простого $p \in \pi(G)$. Докажем, что $l_p(G) \le 1$ для любого простого $p > 3$. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. По лемме VI.6.9 [2] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G)$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G) = C_G(F)$ – единственная минимальная нормальная p-подгруппа, обладающая дополнением M в группе G. Поэтому силовская p-подгруппа $G_p = [F](G_p \cap M) = [F]M_p$, где M_p – некоторая силовская p-подгруппа в M. Если $M_p = 1$, то $F = G_p$ и $l_p(G) \le 1$. Пусть $M_p \neq 1$. Так как $F \le G_1$, то F является подгруппой силовской p-подгруппы группы G_1 и порядок F равен p, p^2. Если $|F| = p$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $Aut(F)$ группы F, порядок которой равен $p-1$. Отсюда $G_p = F$, противоречие. Пусть $|F| = p^2$. Тогда фактор-группа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,p)$, порядок которой равен $(p^2 - p)(p^2 - 1)$. Поэтому порядок силовской подгруппы G_p равен p^3. Так как $F = C_G(F)$, то G_p неабелева и изоморфна по теореме I.14.10 [2] либо метациклической группе

$$M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle = [\langle a \rangle]\langle b \rangle,$$

либо группе экспоненты p. Поскольку подгруппа $\Omega_1(M_3(p))$, порожденная элементами порядка p, является элементарной абелевой подгруппой порядка p^2, то она не дополняема в $M_3(p)$. Поэтому изоморфизм G_p с подгруппой $M_3(p)$ исключается, и G_p является подгруппой экспоненты p. Если порядок группы нечетен или p – не простое число Ферма, то по теореме IX.4.8 [7] $l_p(G) \le 1$. Но теперь, согласно утверждению $b)$ теоремы IX.5.5 [7], $l_p(G) \le 1$ для $p > 3$.

4. Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы, а G_p – её силовская p-подгруппа. Предположим, что $p > 3$. Используя индукцию по порядку

группы, покажем, что подгруппа G_p нормальна в группе G, т. е. $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Здесь $\mathfrak{N}_p$ – формация всех p-групп, а $\mathfrak{E}_{p'}$ – формация всех p'-групп. Хорошо известно, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ – насыщенная формация, поэтому можно считать, что $\Phi(G)=1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа $F = F(G)$. Кроме того, $F = C_G(F)$, фактор-группа G/F изоморфна подгруппе группы автоморфизмов F. Так как F является подгруппой силовской p-подгруппы группы G_1, то порядок F равен q, q^2, где q – некоторое простое число. При $p=q$ с учетом утверждения из п. 3, получаем, что G_p нормальна в G. Поэтому считаем, что $p>q$. Пусть сначала $|F|=q$, тогда G/F – циклическая группа порядка, делящего $q-1$. Ввиду того, что p – наибольший простой делитель порядка группы G, этот случай исключается. Пусть теперь $|F|=q^2$. Тогда фактор-группа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,q)$, порядок которой равен $(q^2-q)(q^2-1)$. Поэтому, учитывая $p>q$, получим, что p делит $q+1$, что возможно только при $p=3$, а $q=2$. Противоречие.

Итак мы доказали, что силовская подгруппа G_p нормальна в группе G для наибольшего простого $p \in \pi(G)$ при условии, что $p>3$.

Теперь положим $\pi = \pi(G)\setminus\{2,3\}$ и покажем, что π-холлова подгруппа G_π нормальна в группе G. Так как класс всех π-замкнутых групп является насыщенной формацией, то по индукции $O_\pi(G)=1$ и подгруппа Фиттинга $F = C_G(F)$ является является минимальной нормальной подгруппой, которая будет элементарной абелевой p-подгруппой порядка, делящего 2^2 или 3^2. Фактор-группа G/F изоморфна подгруппе $GL(n,p)$ для $p\in\{2,3\}$ и $n\le 2$. Так как $\pi(GL(n,p))\subseteq\{2,3\}$ для этих значений n и p, то G – π'-группа.

Итак мы доказали, что π-холлова подгруппа G_π нормальна в группе для $\pi=\pi(G)\setminus\{2,3\}$. Если p – наибольшее из π, то G_p нормальна в G_π по доказанному. По индукции фактор-группа G_π/G_p дисперсивна по Оре, откуда следует, что подгруппа G_π дисперсивна по Оре.

5.1. Пусть G A_4-свободна. Воспользуемся индукцией по порядку группы и докажем, что $l_p(G)\le 1$ для $p\in\{2,3\}$. По лемме VI.6.9 [2] можно считать, что $O_{p'}(G)=\Phi(G)=1$, а подгруппа Фиттинга $F=F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа порядка p^α, где $\alpha\le 2$ для $p=2$ и $p=3$, так как $F\le G_1$. В частности, $C_G(F)=F$. Если $|F|=p$, то G/F имеет порядок $p-1$ и $l_p(G)\le 1$.

Если $|F|=4$, то $Aut(F)\cong GL(2,2)\cong S_3$ и либо $G/F\cong Z_3$, либо $G/F\cong S_3$. Если $G/F\cong Z_3$, то $G\cong A_4$. Если $G/F\cong S_3$, то $G\cong S_4$. В любом случае группа не A_4-свободна. Противоречие.

Пусть $|F|=9$. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы $GL(2,3)$ и $O_3(G/F)=1$. Известно, что $H\in\{1,Z_2,Z_4,Z_8,Z_2\times Z_2,D_8,Q_8,SD_{16},SL(2,3),GL(2,3)\}$. Во всех случаях, кроме $G/F\cong SL(2,3)$ и $G/F\cong GL(2,3)$, подгруппа F является силовской 3-подгруппой в G. Поэтому $l_3(G)\le 1$. Так как $SL(2,3)$ и $GL(2,3)$ не являются A_4-свободными, то они из рассмотрения исключаются.

Итак, $l_p(G)\le 1$ для $p\in\{2,3\}$. Из п. 3 следует, что $l_p(G)\le 1$ для $p>3$. Утверждение 5.1. доказано полностью.

5.2. Пусть G A_4-свободна. Воспользуемся индукцией по порядку группы G и докажем, что $G\in\mathrm{NA}^2$. Можно считать, что $\Phi(G)=1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга F. Ввиду п. 5.1. $l_p(G)\le 1$ для всех $p\in\pi(G)$, поэтому F – силовская p-подгруппа группы G. Кроме того, $F=C_G(F)$. Так как $F\le G_1$, то порядок $|F|$ равен p или p^2, где p – простое число.

Если $|F|=p$, то G/F – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка p, поэтому G/F абелева. Пусть $|F|=p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой p'-подгруппе H группы $GL(2,p)$. По лемме 3 подгруппа H метабелева, т. е. $G/F\in\mathrm{A}^2$.

Итак, в любом случае $G/F\in\mathrm{A}^2$. Так как $F/\Phi(G)$ абелева и $(G/\Phi(G))/(F/\Phi(G))\cong G/F$, то $G/\Phi(G)\in\mathrm{A}^3$ и производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

5.3. Предположим, что G не является $\{2,3\}$-группой. По доказанному в п. 4 π-холлова подгруппа G_π нормальна в G и дисперсивна по Оре для $\pi=\pi(G)\setminus\{2,3\}$. Пусть R – силовская r-подгруппа в G для наибольшего простого $r\in\pi(G)$. Тогда $r>3$, $R\le G_\pi$ и R нормальна в G. Для фактор-группы G/R условия теоремы выполняются и G/R дисперсивна по Оре по индукции. Из того, что r – наибольший простой делитель порядка группы G следует, что группа G дисперсивна по Оре.

Пусть теперь G – $\{2,3\}$-группа. Так как класс всех дисперсивных по Оре групп является насыщенной формацией, то группа G примитивна, а по теоремам 4.40–4.42 [1] $G=[F(G)]H$, где $F(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G, H – максимальная подгруппа. Так как по п. 5.1. $l_2(G)\le 1$, то $F(G)$ – силовская 2-подгруппа группы G. Теперь $|F(G)|=4$ и H – подгруппа группы $GL(2,2)\cong S_3$. Поскольку $F(G)$ – силовская 2-подгруппа группы G, то $|H|=3$ и $G\cong A_4$, противоречие. Утв. 5.3. доказано.

6. Пусть G имеет нечетный порядок. Проверим, что коммутант группы G нильпотентен. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Без ограничения общности можно считать, что $\Phi(G)=1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга $F=F(G)$ и является элементарной абелевой p-подгруппой для некоторого простого числа p. Так как $F\le G_1$, то порядок $|F|$ равен p или p^2. В силу п. 5.1. $l_p(G)=1$, поэтому F – силовская p-подгруппа группы G и G/F является p'-подгруппой. В разрешимых группах подгруппа Фиттинга содержит свой централизатор, поэтому фактор-группа G/F является группой автоморфизмов группы F. Если $|F|=p$, то G/F – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка p и коммутант $G'\subseteq F$. Пусть $|F|=p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой p'-подгруппе нечетного порядка группы $GL(2,p)$. По теореме 3.4 [6] G/F абелева и $G'\subseteq F$. Итак, в любом случае коммутант группы G нильпотентен. Поскольку $F/\Phi(G)$ абелева, то $G/\Phi(G)$ метабелева. Теорема доказана полностью.

Следующие примеры показывают, что все оценки, полученные в теореме, являются точными.

Пример 1. Пусть E_{7^2} – элементарная группа порядка 7^2. Ее группой автоморфизмов является полная линейная группа $GL(2,7)$ с циклическим центром $Z = Z(GL(2,7))$ порядка 6. Выберем в группе Z подгруппу C порядка 2. Очевидно, что C нормальна в $GL(2,7)$. Вычисления в компьютерной системе GAP показывают, что в $GL(2,7)$ существует подгруппа S порядка 48 такая, что фактор-группа S/C изоморфна симметрической группе S_4 степени 4. Полупрямое произведение $G=[E_{7^2}]S$ является группой порядка $2352 = 2^4 7^2 3$, причем $\Phi(G)=1$. Нильпотентная длина группы G равна 4, производная длина равна 5. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset E_{7^2} \subset [E_{7^2}]Z_2 \subset [E_{7^2}]Q_8 \subset [E_{7^2}]SL(2,3) \subset [E_{7^2}]S = G$$

с факторами порядка, свободного от кубов:

$$E_{7^2}, ([E_{7^2}]Z_2)/(E_{7^2}) \cong Z_2, ([E_{7^2}]Q_8)/([E_{7^2}]Z_2) \cong E_4,$$
$$([E_{7^2}]SL(2,3))/([E_{7^2}]Q_8) \cong Z_3, (G/[E_{7^2}]SL(2,3)) \cong Z_2.$$

Кроме того, 2-длина данной группы равна 2.

Пример 2. Пусть S – экстраспециальная группа порядка 27. Вычисления в компьютерной системе GAP показали, что ее группой автоморфизмов является группа $[E_{3^2}]GL(2,3)$. Полупрямое произведение $G=[S]GL(2,3)$ является группой порядка $1296 = 2^4 3^3$ с подгруппой Фраттини $\Phi(G) \cong Z_3$. Производная длина группы G равна 6, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ равна 5. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset Z_3 \subset S \subset [S]Z_2 \subset [S]Q_8 \subset [S]SL(2,3) \subset G$$

с факторами порядка, свободного от кубов:

$$Z_3, S/Z_3 \cong E_{3^2}, ([S]Z_2)/S \cong Z_2, ([S]Q_8)/([S]Z_2) \cong E_{2^2},$$
$$([S]SL(2,3))/([S]Q_8) \cong Z_3, G/([S]SL(2,3)) \cong Z_2.$$

Кроме того, 2-длина и 3-длина данной группы равна 2.

Пример 3. Пусть E_{5^2} – элементарная абелева группа порядка 5^2. Её группой автоморфизмов является полная линейная группа $GL(2,5)$, в которой имеется подгруппа, изоморфная симметрической группе S_3 степени 3. Полупрямое произведение $G=[E_{5^2}]S_3$ является A_4-свободной группой с единичной подгруппой Фраттини. Производная длина группы G равна 3. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset E_{5^2} \subset [E_{5^2}]Z_3 \subset [E_{5^2}]S_3 = G$$

с факторами порядка, свободного от кубов:

$$E_{5^2}, ([E_{5^2}]Z_3)/(E_{5^2}) \cong Z_3, ([E_{5^2}]S_3)/([E_{5^2}]Z_3) \cong Z_2.$$

Кроме того, группа G является дисперсивной по Оре, а p-длина данной группы равна 1 для произвольного $p \in \{2,3,5\}$.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Ф 08Р-230).