

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zolotarev, V. Stable distributions and their applications. VSP / V. Zolotarev, V. Uchaikin. – M., 1999.
2. Davydov, Yu. More on P-stable convex sets in Banach spaces / Yu. Davydov, V. Paulauskas, A. Rackauskas // J. Theoret. Probab. – 2000. – 13, № 1. – 39–64.

I.I. Komarov, Chen Hailong. The Applicability of DPR Method to the Estimation of Stability Index

The analysis of the economic data interrelation, presented in the form of time series, is a necessary part of modern research. In the number of economic objectives and its supplements, where it is necessary to estimate only the tail of the distribution, the focus is directed to the estimation of the tail index, which is called stability index. This article deals with the DPR method. The possibility to apply the method to the estimation of stability index by the example of modeled stable random quantities is considered.

УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик, В.Ф. Савчук

О СХОДИМОСТИ НЕЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРАВИЛОМ ОСТАНОВА ПО СОСЕДНИМ ПРИБЛИЖЕНИЯМ

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений с положительным ограниченным и несамосопряжённым оператором предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по соседним приближениям, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истощаемости представимости точного решения. В исходной норме гильбертова пространства доказана сходимость итерационного метода, получена оценка для момента останова.

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным несамосопряжённым оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнение имеет единственное решение x . Будем искать его, используя неявный итерационный метод:

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha(A^*A)^k \right)^{-1} \left[\left(E - \alpha(A^*A)^k \right) x_n + 2\alpha(A^*A)^{k-1} A^* y \right], \quad x_0 = 0, k \in N. \quad (2)$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближенно $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, метод итераций (2) примет вид:

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha(A^*A)^k \right)^{-1} \left[\left(E - \alpha(A^*A)^k \right) z_n + 2\alpha(A^*A)^{k-1} A^* y_\delta \right] + \\ + \left(E + \alpha(A^*A)^k \right)^{-1} \left(E - \alpha(A^*A)^k \right) u_n, \quad z_0 = 0, k \in N, \quad (3)$$

где u_n — ошибки в вычислении итераций, причём $\|u_n\| \leq \beta$. Обозначим через

$$C = \left(E + \alpha(A^*A)^k \right)^{-1} \left(E - \alpha(A^*A)^k \right), \quad B = 2 \left(E + \alpha(A^*A)^k \right)^{-1} \alpha(A^*A)^{k-1} A^*.$$

Тогда метод (3) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$.

Ранее [1] была изучена сходимость метода (3) с априорным выбором числа итераций для самосопряженного оператора A . Там доказано, что при условии $\alpha > 0$ метод (3) сходится, и в предположении, что точное решение x уравнения (1) истощепредставимо, получена оценка погрешности.

2. Правило останова по соседним приближениям. В том случае, когда истощепредставимость точного решения неизвестна, метод (3) можно сделать

эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям [2–4]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим неравенствами:

$$\left. \begin{aligned} \|z_n - z_{n+1}\| &> \varepsilon, (n < m), \\ \|z_m - z_{m+1}\| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Покажем, что метод (3) с правилом останова (4) сходится. Аналогично [4] доказываются леммы.

Лемма 1. Пусть приближение ω_n определяется условиями

$$\omega_0 = z_0, \quad \omega_{n+1} = C\omega_n + By + Cu_n, \quad n \geq 0. \quad (5)$$

Тогда справедливо неравенство $\sum_{k=0}^n \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2$.

Лемма 2. При $\forall \omega_0 \in H$ и произвольной последовательности ошибок $\{u_n\}$, удовлетворяющих условию $\|u_n\| \leq \beta$, выполнено неравенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta$.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. Пусть уровень останова $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей $y - y_\delta$ и u_n . Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, то момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ и u_n , удовлетворяющих условиям $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, $\|u_n\| \leq \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, то справедлива оценка

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \rightarrow 0$, $\delta, \beta \rightarrow 0$ и $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$, где $d > 1$, $p \in (0, 1)$, то $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$.

Доказательство.

а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{n-k-1}). \quad (6)$$

При $n = 1$ из $z_n = C z_{n-1} + B y_\delta + C u_{n-1}$ имеем $z_1 = C z_0 + B y_\delta + C u_0$, из (6) получим то же самое, т. е. при $n = 1$ формула (6) верна. Предположим, что (6) верна при $n = p$,

т. е. $z_p = C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1})$, и докажем её справедливость при $n = p + 1$.

Имеем

$$\begin{aligned}
z_{p+1} &= C^p z_p + B y_\delta + C u_p = C \left(C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1}) \right) + B y_\delta + C u_p = \\
&= C^{p+1} z_0 + C^2 (C^{-1} B y_\delta + u_{p-1} + B y_\delta + C u_{p-2} + C B y_\delta + C^2 u_{p-3} + \dots + \\
&\quad + C^{p-2} B y_\delta + C^{p-1} u_0) + B y_\delta + C u_p = C^{p+1} z_0 + C (B y_\delta + C u_{p-1} + \\
&\quad + C B y_\delta + C^2 u_{p-2} + \dots + C^{p-1} B y_\delta + C^p u_0 + C^{-1} B y_\delta + u_p) = \\
&= C^{p+1} z_0 + C \sum_{k=0}^p C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k})
\end{aligned}$$

Таким образом, справедливость (6) доказана. Отсюда

$$\begin{aligned}
\omega_n &= C^n \omega_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} B y + u_{n-k-1}) = C^n \omega_0 + (E + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) B y + \\
&\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n \omega_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1} (A^* A)^{-1} (E - C) A^* y + \\
&\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n \omega_0 + A^{-1} (E - C^n) y + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $z_0 = \omega_0$, получим

$$\begin{aligned}
z_n - z_{n+1} &= C^n z_0 + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} z_0 + A^{-1} (E - C^{n+1}) y_\delta - C \sum_{k=0}^n C^k u_{n-k} = \\
&= C^n \omega_0 + A^{-1} (E - C^n) y - A^{-1} (E - C^n) y + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + \\
&\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} \omega_0 - A^{-1} (E - C^{n+1}) y + A^{-1} (E - C^{n+1}) y - A^{-1} (E - C^n) y_\delta - \\
&\quad - C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k} = \omega_n - \omega_{n+1} + A^{-1} (E - C)(y_\delta - y) = \omega_n - \omega_{n+1} + C^n B(y - y_\delta).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \leq \|\omega_n - \omega_{n+1}\| + \|C^n B(y - y_\delta)\|. \quad (7)$$

Обозначим $\sigma = B(y - y_\delta)$, тогда

$$\begin{aligned}
\|C^n B(y - y_\delta)\| &= \|C^n \sigma\| = \left\| \int_0^{\|A^* A\|} \left(\frac{1 - \alpha \lambda^k}{1 + \alpha \lambda^k} \right)^n dE_\lambda \sigma \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \left(\frac{1 - \alpha \lambda^k}{1 + \alpha \lambda^k} \right)^n dE_\lambda \sigma \right\| + \\
&\quad + \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A^* A\|} \left(\frac{1 - \alpha \lambda^k}{1 + \alpha \lambda^k} \right)^n dE_\lambda \sigma \right\| \leq \|E_{\varepsilon_0} \sigma\| + q^n \|\sigma\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \varepsilon_0 \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

так как при $\alpha > 0$, $\lambda \in (0, \|A^* A\|]$ имеем $\left| \frac{1 - \alpha \lambda^k}{1 + \alpha \lambda^k} \right| \leq q < 1$.

Поэтому (см. лемму 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta$.

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых $y_\delta, \|y - y_\delta\| \leq \delta$ и $u_n, \|u_n\| \leq \beta$.

б) Рассмотрим последовательность (5) и определим момент останова m' условием

$$\left. \begin{aligned} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| &> \varepsilon - \|B\|\delta, \quad (n < m'), \\ \|\omega_{m'} - \omega_{m'+1}\| &\leq \varepsilon - \|B\|\delta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из (7) следует, что $m \leq m'$. Из леммы 1 при $n = m'$ получим неравенство $\sum_{k=0}^{m'} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$, поэтому справедливо записать $\sum_{k=0}^{m'-1} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$. Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m'-1} (\|\omega_k - \omega_{k+1}\| - \|C\|\beta)^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Так как по (8) при $n < m'$ имеем $\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta$, то $m'(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta)^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2$. Учитывая, что $\omega_0 = z_0$ и $m \leq m'$, из последнего неравенства получим оценку для момента останова:

$$m \leq m' \leq \|z_0 - x\|^2 ((\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta))^{-1}.$$

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y. \quad (9)$$

Предположим, что (9) верно, тогда $x - C^n x = B(E + C + C^2 + \dots + C^{n-1})y$, $(E - C^n)x = B(E - C^n)(E - C)^{-1}y$, $(E - C^n)x = A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1}Ax$, $(E - C^n)x = (E - C^n)x$. Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (9) доказана. Из (6) вычтем (9), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}]. \quad (10)$$

Отсюда $\Delta_n = C^n \Delta_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$.

Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \leq \|C^n \Delta_0\| + (\|B\|\delta + \|C\|\beta)n. \quad (11)$$

В частности, (11) справедливо и при $n = m$. Если $m \rightarrow \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \rightarrow 0$, тогда, как показано ранее, $\|C^m \Delta_0\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$. Поэтому для доказательства $\|z_m - x\| \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ достаточно показать, что $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$. Из (10) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n(E - C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n B(y_\delta - y) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C)u_{n-k-1}. \quad (12)$$

Так как спектр оператора $C = \left(E + \alpha(A^* A)^k\right)^{-1} \left(E - \alpha(A^* A)^k\right)$ принадлежит $[0, 1]$, то можно доказать, что

$$\|C^n(E - C)\| \leq \frac{1}{n+1}. \quad (13)$$

Поэтому из (12) получим при $n = m - 1$:

$$\begin{aligned} \|z_{m-1} - z_m\| &\leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)(z_0 - x) \right\| + \|C^{m-1} B(y_\delta - y)\| + \|Cu_{m-1}\| + \\ &+ \left\| C \sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C)u_{m-k-2} \right\| \leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (E - C) \right\| \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|C\|\beta + \|B\|\delta + \\ &+ \|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m), \end{aligned}$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln m$ [5].

Так как по условию теоремы $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$, $d > 1$, $p \in (0, 1)$, то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому

из б) получим $m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$. Поскольку $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$, то

$$\varepsilon \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta. \text{ Отсюда получим, что } m \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}.$$

Умножим обе части последнего равенства на $\|B\|\delta + \|C\|\beta$, получим

$$m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| (\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta \left[2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)} \right]}. \text{ При } m \rightarrow \infty \text{ множитель}$$

$$2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| \rightarrow 0, \text{ а } \frac{2(\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta \left[2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)} \right]}$$

ограничена при $\delta, \beta \rightarrow 0$. Поэтому $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0$, при $m \rightarrow \infty$, $\delta, \beta \rightarrow 0$. Отсюда и из неравенства (11) при $m \rightarrow 0$