8. Пугачев, В.С. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. / В. С. Пугачев, И. Н. Синицын – М., 1990.

T.I. Karimava, A.L. Yablonski. **System of Nonautonomous Stochastic Differentials Equations in Algebra of Generalized Stochastic Processes**

The paper deals with stochastic differentials equations in the algebra of generalized stochastic processes. According to this approach one has to investigate limiting behavior of solutions of corresponding finite difference equations with averaging. The main goal of the article is to find necessary and sufficient conditions implying convergence of solutions of nonautonomous multidimensional finite difference equations with averaging. The rate of convergence is estimated.

УДК 517.925.6

И.Н. Климашевская, Д.В. Грицук

УСЛОВИЯ АЛГЕБРОИДНОСТИ РЕШЕНИЙ С ЗАДАННЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ СВОЙСТВОМ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе рассматриваются автономные системы двух дифференциальных уравнений. Найдены достаточные условия отсутствия у таких систем решений с заданным предельным свойством и трансцендентными компонентами. Эти условия легко проверяются на практике. Полученные результаты могут быть применены как в самой аналитической теории дифференциальных уравнений, так и в многочисленных ее приложениях.

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dz}=\frac{P(x,y)}{R(x,y)},\ \ \frac{dy}{dz}=\frac{Q(x,y)}{S(x,y)}, \tag{1}$$

где x, y и z – комплексные переменные, P, R, Q и S – многочлены по x и y с постоянными коэффициентами. Пусть представления многочленов P, R, Q и S имеют вид

$$P(x,y)=\sum_{i=0}^{p_1}P_i(y)x^{p_1-i},\ R(x,y)=\sum_{i=0}^{r_1}R_i(y)x^{r_1-i},$$

$$Q(x,y)=\sum_{i=0}^{q_1}Q_i(y)x^{q_1-i},\ S(x,y)=\sum_{i=0}^{s_1}S_i(y)x^{s_1-i},$$

где $P_i(y)=\sum\limits_{j=0}^{l_i}p_{ij}y^{l_i-j}$, $R_i(y)=\sum\limits_{j=0}^{t_i}r_{ij}y^{t_i-j}$, $Q_i(y)=\sum\limits_{j=0}^{k_i}q_{ij}y^{k_i-j}$, $S_i(y)=\sum\limits_{j=0}^{d_i}s_{ij}y^{d_i-j}$.

Обозначим $\max\{l_i\}=p_2\ \left(i=\overline{0,p_1}\right)$, $\max\{t_i\}=r_2\ \left(i=\overline{0,r_1}\right)$, $\max\{k_i\}=q_2\ \left(i=\overline{0,q_1}\right)$, $\max\{d_i\}=s_2\ \left(i=\overline{0,s_1}\right)$.

Ставится задача: найти условия, при выполнении которых система (1) имеет только алгеброидные решения $(x(z),\mathrm{y(z)})$ со свойством

$$x(z)\to\infty,\ y(z)\to\infty \text{ при } z\to z_0. \tag{2}$$

Разделив первое уравнение системы (1) на второе, получим уравнение:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{p_1}\left(\sum\limits_{j=0}^{l_i}p_{ij}y^{l_i-j}\right)x^{p_1-i}\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=0}^{s_1}\left(\sum\limits_{j=0}^{d_i}s_{ij}y^{d_i-j}\right)x^{s_1-i}\right)}{\left(\sum\limits_{i=0}^{r_1}\left(\sum\limits_{j=0}^{t_i}r_{ij}y^{t_i-j}\right)x^{r_1-i}\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=0}^{q_1}\left(\sum\limits_{j=0}^{k_i}q_{ij}y^{k_i-j}\right)x^{q_1-i}\right)}, \tag{3}$$

решение $x(y)$ которого обладает свойством

$$x(y)\to\infty \text{ при } y\to\infty. \tag{4}$$

Сделав в уравнении (3) замену $y=\dfrac{1}{v}$, приведем его к виду:

$$\frac{dx}{dv}=-\frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{p_1}\left(\sum\limits_{j=0}^{l_i}p_{ij}v^{p_2-l_i+j}\right)x^{p_1-i}\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=0}^{s_1}\left(\sum\limits_{j=0}^{d_i}s_{ij}v^{s_2-d_i+j}\right)x^{s_1-i}\right)}{\left(\sum\limits_{i=0}^{r_1}\left(\sum\limits_{j=0}^{t_i}r_{ij}v^{r_2-t_i+j}\right)x^{r_1-i}\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=0}^{q_1}\left(\sum\limits_{j=0}^{k_i}q_{ij}v^{q_2-k_i+j}\right)x^{q_1-i}\right)}\cdot v^{q_2+r_2-p_2-s_2-2}\equiv\frac{M(x,v)}{N(x,v)}, \qquad (5)$$

где M и N многочлены по x и v.

Пусть

$$M=\sum_{i=0}^{m}M_i(v)x^{m-i},\ N=\sum_{j=0}^{n}N_j(v)x^{n-j},$$

$M_i(v)=v^{m_i}\overline{M}_i(v)$, $N_j(v)=v^{n_j}\overline{N}_j(v)$, где $m_i\ge 0$, $n_j\ge 0$ – целые числа, а $\overline{M}_i(v)$ и $\overline{N}_j(v)$ – многочлены по v, причем $\overline{M}_i(0)\ne 0$, $\overline{N}_j(0)\ne 0$ ($i=\overline{0,m}$, $j=\overline{0,n}$).

Очевидно, что если имеют место соотношения

$$p_1+s_1\ge q_1+r_1+2,\ q_2+r_2\ge p_2+s_2+2, \qquad (6)$$

то будут выполнены условия

$$m\ge n+2,\ N(x,0)\quad 0. \qquad (7)$$

В работе [1] доказано, что при выполнении условий (7), уравнение (5) всегда имеет решение $x(v)$, обладающее свойством

$$x(v)\to\infty \text{ при } v\to 0, \qquad (8)$$

причем для этого решения точка $v=0$ является полюсом, обычным или критическим. В следствие этого система (1) всегда имеет решение $(x(z),\mathrm{y}(\mathrm{z}))$ со свойством (2), для функций $x(z)$ и $\mathrm{y}(\mathrm{z})$ которого точка z_0 является полюсом, обычным или критическим [2].

Для построения решений уравнения (5) со свойством (8) используется диаграмма Пьюизо, суть которой заключается в следующем. В прямоугольной декартовой системе координат xOy отметим точки $A_i(i,m_i+1)$ $(i=\overline{0,m})$, $B_j(m-n-1+j,n_j)$ $(j=\overline{0,n})$. Если выполнены условия (7), то самой левой из отмеченных точек будет точка $A_0(0,m_0+1)$, расположенная на оси Oy, и все остальные точки A_i будут находиться в первом квадранте. Кроме того, существует число k – первое в ряду чисел 0, 1, …, n, для которого $n_k=0$, поэтому точка B_k будет находиться на оси Ox. Все остальные точки B_j будут расположены на оси Ox правее точки B_k, или в первом квадранте. Чтобы получить диаграмму Пьюизо, надо соединить точки A_0 и B_k ломаной, выпуклой к началу координат и с вершинами в отмеченных точках так, чтобы никакая другая из точек A_i и B_j не была ниже этой ломаной.

Построенная ломаная может содержать звенья только следующих трех типов:

1) звенья, на которых есть как точки A_i, так и точки B_j;
2) звенья, на которых расположены только точки B_j;
3) звенья, на которых расположены только точки A_i.

Очевидно, что в частном случае диаграмма Пьюизо может состоять из одного звена первого типа $\overline{A_0B_k}$. При выполнении условий (7) диаграмма Пьюизо будет содержать хотя бы одно звено, на котором есть как точки A_i, так и точки B_j.

Известно [1], что только звенья первого типа диаграммы Пьюизо для уравнения (5) дают полярные решения этого уравнения, которые порождают алгеброидные решения системы (1), обладающие свойством (2). Однако при выполнении условий (6) система (1), вообще говоря, может иметь решения $(x(z), \mathrm{y}(\mathrm{z}))$ со свойством (2), для которых точка z_0 будет являться подвижной трансцендентной особой точкой. Это возможно лишь в тех случаях, когда диаграмма Пьюизо кроме звеньев первого типа будет содержать звенья второго или третьего типа. Если же диаграмма Пьюизо состоит лишь из одного звена $\overline{A_0 B_k}$ или только из звеньев первого типа, то система (1) при выполнении соотношений (6) всегда будет иметь только алгеброидные решения, обладающие свойством (2).

Укажем условия, при которых диаграмма Пьюизо для уравнения (5) будет состоять только из одного звена $\overline{A_0 B_k}$.

Имеют место

<u>Теорема 1</u>. Если выполнены условия

$$l_0 = p_2,\ d_0 = s_2, \tag{9}$$

$$p_1 + s_1 \geq q_1 + r_1 + 2, \tag{10}$$

$$q_2 + r_2 = p_2 + s_2 + 2, \tag{11}$$

то система (1) имеет только алгеброидные решения со свойством (2).

<u>Доказательство</u>. Предположим, что условия (9) имеют место, тогда многочлены $P(x,y)$ и $S(x,y)$ имеют доминирующие члены $p_{00}x^{p_1}y^{p_2}$ и $s_{00}x^{s_1}y^{s_2}$ соответственно. Если выполнено условие (11), то в числителе правой части уравнения (5) имеется член $p_{00}s_{00}x^{p_1+s_1}$. Этому члену на координатной плоскости будет соответствовать точка $A_0(0,1)$. Все остальные точки A_i $(i = \overline{1, p_1 + s_1})$ будут лежать правее на прямой $y = 1$ или выше нее. Пусть первой из точек B_j $(j = \overline{0, q_1 + r_1})$ на оси Ox находится точка B_k. Все точки B_j $(j = \overline{0, k-1})$ лежат выше звена $\overline{A_0 B_k}$. В нашем случае диаграмма Пьюизо состоит из одного звена $\overline{A_0 B_k}$. При выполнении условий (9), (10) и (11) система (1) всегда имеет хотя бы одно решение со свойством (2), для обеих компонент которого точка z_0 является полюсом. Но так как диаграмма Пьюизо состоит только из одного звена $\overline{A_0 B_k}$, то других решений, отличных от полярных, система (1) не имеет. Следовательно, при выполнении условий теоремы система (1) имеет только алгеброидные решения со свойством (2).

<u>Теорема 2</u>. Если выполнены условия

$$k_0 = q_2,\ t_0 = r_2, \tag{12}$$

$$q_2 + r_2 \geq p_2 + s_2 + 2, \tag{13}$$

$$p_1 + s_1 = q_1 + r_1 + 2, \tag{14}$$

то система (1) имеет только алгеброидные решения со свойством (2).

<u>Доказательство</u>. Будем считать, что условия (12) выполнены. Это значит, что функции $Q(x,y)$ и $R(x,y)$ имеют доминирующие члены $q_{00}x^{q_1}y^{q_2}$ и $r_{00}x^{r_1}y^{r_2}$ соответственно. Тогда после замены $y = \dfrac{1}{v}$ уравнение (5) будет иметь в знаменателе

правой части член $q_{00}r_{00}x^{q_1+r_1}$. Этому члену на координатной плоскости будет соответствовать точка $B_0(p_1+s_1-r_1-q_1-1,0)$. Таким образом, первой из точек B_j $(j=\overline{0,q_1+r_1})$ на оси Ox будет находиться точка B_0. При выполнении условия (14) точка B_0 имеет координаты $(1,0)$. Все остальные точки B_j $(j=\overline{1,q_1+r_1})$ будут лежать либо на оси Ox, но правее точки B_0, либо правее и выше нее. Все точки A_i $(i=\overline{1,p_1+s_1})$ будут лежать выше и правее точки B_0 (A_1 находится на одной прямой, но выше). Итак, при выполнении условий (12), (13) и (14) система (1) всегда имеет хотя бы одно решение со свойством (2), для обеих компонент которого точка z_0 является полюсом. Кроме того, диаграмма Пьюизо в нашем случае будет состоять только из одного звена $\overline{A_0B_0}$. Поэтому других решений, обладающих свойством (2), кроме полярных, у системы (1) не будет. Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай системы (1), а именно систему вида

$$\frac{dx}{dz}=\frac{P(x,y)}{R(x,y)},\ \frac{dy}{dz}=\frac{Q(x,y)}{R(x,y)}. \tag{15}$$

Уравнение (5) в этом случае имеет вид:

$$\frac{dx}{dv}=-\frac{\sum\limits_{i=0}^{p_1}\left(\sum\limits_{j=0}^{l_i}p_{ij}v^{p_2-l_i+j}\right)x^{p_1-i}}{\sum\limits_{i=0}^{q_1}\left(\sum\limits_{j=0}^{k_i}q_{ij}v^{q_2-k_i+j}\right)x^{q_1-i}}\cdot v^{q_2-p_2-2}. \tag{16}$$

Имеют место

Теорема 3 [3]. При выполнении условий (7) и

$$m_i\ge m_0-iR\ \left(i=\overline{0,m}\right),$$
$$n_j\ge (k-j)R\ \left(j=\overline{0,k-1}\right), \tag{17}$$

где $R=\dfrac{m_0+1}{m-n-1+k}$ (k – первое в ряду чисел 0, 1, …, n, для которого $n_k=0$), диаграмма Пьюизо для уравнения (5) состоит только из одного звена $\overline{A_0B_k}$.

Применяя теорему 3 к уравнению (16), для системы (15) получим следующее утверждение:

Теорема 4. Если выполнены условия:

$$p_1\ge q_1+2,\ q_2\ge p_2+2,$$
$$l_i\le l_0+iR\ \left(i=\overline{0,p_1}\right), \tag{18}$$
$$q_2-k_i\ge (k-j)R\ (i=\overline{0,q_1},\ j=\overline{0,k-1}), \tag{19}$$

где $R=\dfrac{p_2-l_0+1}{p_1-q_1-1+k}$ (k – наименьшее значение индекса i, при котором $q_2-k_i=0$), то система (15) имеет только алгеброидные решения со свойством (2).

Доказательство. Если выполнены условия (18), то система (15) всегда имеет хотя бы одно решение со свойством (2), для компонент $x(z)$ и $y(z)$ которого точка z_0 является полюсом. При выполнении соотношений (19) диаграмма Пьюизо для