то с (12 – 14) следует, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left[f^*(t)\right]_{2\pi}}{t(\beta^2+t^2)}dt = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^{2k+1}\right).$ (15)

При $\beta < \frac{\pi}{2}$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\left[f^*(t)\right]_{2\pi}}{t(\beta^2+t^2)}dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\beta^{2k}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\left[f^*(x)\right]_{2\pi}}{t^{2k+3}}dt\,. \tag{16}$$

Объединяя соотношения (15–16) из (11), получаем (10). Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке ГФФИ Украины (проект Ф25.1/043).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барии, Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Барии. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – 936 с.
2. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : 2 т. / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – Т.1. – 615 с.
3. Sz.-Nagy, B. Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson / B. Sz.-Nagy // Acta Math. Acad. Sei Hungar. – 1950. – 1. – P. 183–188.
4. Степанец, А.И. Методы теории приближения / А.И. Степанец. – Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. – ч. I. – 427 с.
5. Натансон, В. П. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / В.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – 72, № 1. – С. 11–14.
6. Тимман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тимман // Докл. АН СССР. – 1950. – 74, № 1. – С. 17–20.
7. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с задаными прямоугольными матрицами, I / Л.И. Баусов // Изв. вузов. Математика. – 1965. – 46, № 3. – С. 15–31.
8. Жигало, К.М. Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона / К.М. Жигало, Ю.I. Харкевич // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, № 1. – С. 43–52.
9. Жигалло, К.М. Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля-Пуассона / К.М. Жигало, Ю.I. Харкевич // Укр. мат. журн. – 2009. – 61, № 1. – С. 73–82.
10. Титчмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш. – М. – Л. : Гостехиздат, 1948. – 460 с.

K.N. Jigallo, T.V. Jigallo. **Approximational Properties of Poisson's Integrals on the Classes of Conjured Functions**

The theme of this article concerns one of the directions of the theory of approximation of functions, namely, the study of approximational properties of linear methods of summing up Fourier series on the classes of periodical functions. Such direction appeared and was actively developed during the XX th century under the influence of A. N. Kolmogoroff, S.M. Nikolskiy, B. Nagy, I.P. Natanson, V.K. Dzyadyk, S. B. Stechkin, N. P. Korneychuk, A.I. Stepanets, V.P. Motorny and other mathematicians works. The researches concerning the approximational properties of the method of approximation by Poisson's integrals on conjured classes are described in this work. Using the methods developed by I.P. Natanson, A. F. Timan, B. Nagy we have got exact equalities for the upper bounders of defluxions on the classes $\overline{W}^{1}_{\infty}$ of the conjured integrals of Poisson.

УДК 517.5

И.В. Кальчук, Т.А. Степанюк, У.З. Грабова

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ БИГАРМОНИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

В работе проведено исследование вопросов о приближении дифференцируемых в смысле Вейля – Надя функций, которые удовлетворяют условию Липшица порядка α $(0 \le \alpha < 1)$, с помощью бигармонических интегралов Пуассона. Решена задача Колмогорова –Никольского на классах $W_\beta^r H^\alpha$ при приближении бигармоническими интегралами Пуассона в равномерной метрике.

1. Постановка задачи и некоторые дополнительные утверждения. Пусть C – пространство 2π-периодических функций, в котором норма определена равенством $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ – пространство 2π-периодических измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname{ess}\sup\limits_t |f(t)|$; L – пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций, в котором норма определена равенством $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Величину

$$B_\rho(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\rho(k)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad 0 \le \rho < 1, \tag{1}$$

где

$$\lambda_\rho(k) = \left(1 + \frac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\right)\rho^k \cos kt,$$

принято называть бигармоническим интегралом Пуассона функции f. Положив $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, бигармонический интеграл Пуассона запишем в виде

$$B_\delta(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \delta > 0, \tag{2}$$

где

$$\lambda_\delta(k) = \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt.$$

Пусть $r > 0$ и β – фиксированное действительное число. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left[a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right]$$

есть рядом Фурье некоторой суммируемой функции φ, то такую функцию называют (r,β)-производной функции f в смысле Вейля – Надя и обозначают $f_\beta^r(\cdot)$. Множество функций, которые удовлетворяют такому условию, обозначают через W_β^r.

Если $f \in W_\beta^r$ и при этом $f_\beta^r \in H^\alpha$, то есть f_β^r удовлетворяет условию Липшица порядка α :

$$\left|f_\beta^r(x+h)-f_\beta^r(x)\right|\le|h|^\alpha, \quad h\in R, \quad 0<\alpha\le 1,$$

то говорят, что f принадлежит классу $W_\beta^r H^\alpha$. При $\alpha=0$ полагают, что $W_\beta^r H^0=W_\beta^r$.

Через W^r обозначают множество 2π-периодических функций, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и $\left\|f^{(r)}(t)\right\|_\infty\le 1$. А $\overline{W}^r$ – класс функций, спряженных к функциям из класса W^r.

В данной работе изучается асимптотическое поведение величин

$$\mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha;B_\delta)_C=\sup_{f\in W_\beta^r H^\alpha}\left\|f(x)-B_\delta(f,x)\right\|_C, \quad \delta\to\infty.$$

Если в явном виде найдена функция $g(\delta)=g(B_\delta;\delta)$, такая что при $\delta\to\infty$

$$\mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha;B_\delta)_C=g(\delta)+o(g(\delta)),$$

то, следуя А.И. Степанцу [1], будем говорить, что решена задача Колмогорова – Никольского для бигармонического интеграла Пуассона B_δ на классе $W_\beta^r H^\alpha$ в равномерной метрике.

Аппроксимативные свойства метода приближения бигармоническими интегралами Пуассона на классах дифференцируемых функций исследовались многими учеными.

В 1963 г. С. Каниев в работе [2] установил асимптотическое равенство для величины $\mathcal{E}(W^1;B_\rho)_C$ при $\rho\to 1-$. В этой же работе он установил и точные значения аппроксимативных характеристик $\mathcal{E}(W^r;B_\rho)_C$, $\quad 0\le\rho<1$.

В 1968 г. P. Pych [3] уточнила результаты Каниева для величины $\mathcal{E}(W^1;B_\rho)_C$, получив асимптотическое равенство с более точным порядком остаточного члена.

Позже эти исследования были продлены в работе Л.П. Фалалеева [4], где было получено полное асимптотическое разложение для величины $\mathcal{E}(W^1;B_\rho)_C$ по степеням $1-\rho,\ \rho\to 1-$.

В работе Л.П. Фалалеева и Т.И. Аманова [5] было найдено полное асимптотическое разложение для величины $\mathcal{E}(W^1;B_\delta)_C$, которое формулируется как в терминах $\frac{1}{\delta}$, так и в терминах $1-\rho$.

В работе К.М. Жигалла, Ю.И. Харкевича [6] были найдены полные асимптотические разложение величин $\mathcal{E}(W^r;B_\rho)_C$ по степеням $1-\rho,\ \rho\to 1-$. Позже в работе этих же авторов [7] были получены точные значения верхних граней приближений бигармоническими интегралами Пуассона на классах сопряженных дифференцируемых функций в равномерной и интегральной метриках.

Параллельно проводились исследования величин приближений функций с классов $W_\beta^r H^\alpha$ линейными методами суммирования рядов Фурье. А именно: в 1966 г. Л.И. Баусов [8] получил асимптотическое равенство для точной верхней грани приближения функций из класса $W_\beta^r H^\alpha$ при помощи интегралов Абеля – Пуассона по степеням $1-\rho,\ \rho\to 1-$.

К этому времени аппроксимативные свойства бигармонического интеграла Пуассона на классах $W_\beta^r H^\alpha$ не были исследованы. Поэтому возник вопрос об отыскании асимптотических равенств для точных верхних граней приближений функций с классов $W^r_\beta H^\alpha$ бигармоническими интегралами Пуассона.

Для бигармонического интеграла Пуассона введем функцию

$$\tau(u)=\begin{cases}\left(1-[1+\gamma u]e^{-u}\right)\delta^r, & 0\le u\le \dfrac{1}{\delta},\\ (1-[1+\gamma u]e^{-u})u^{-r}, & u\ge \dfrac{1}{\delta},\end{cases} \tag{3}$$

где $\gamma=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\delta$, преобразование Фурье которой

$$\hat{\tau}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du \tag{4}$$

суммируемо на всей числовой оси (этот факт доказан в работе [9]).

Рассмотрим функцию

$$F^r_{\beta,\delta}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)-f^r_\beta\left(x\right)\right)\hat{\tau}_\beta(t)dt,\quad \delta>0,\ x\in R,$$

где интеграл следует понимать как разность интегралов по симметричным промежуткам, которые расширяются. Эта функция периодическая и суммируемая. Повторяя рассуждения, приведенные в работе [8, с. 9], несложно убедится в том, что коэффициенты Фурье функции $F^r_{\beta,\delta}(x)$ можно представить в виде

$$a_k\left(F^r_{\beta,\delta}(x)\right)=k^r\tau\left(\frac{k}{\delta}\right)a_k(f),\qquad b_k\left(F^r_{\beta,\delta}(x)\right)=k^r\tau\left(\frac{k}{\delta}\right)b_k(f)$$

(тут $a_k(f)$ и $b_k(f)$ – коэффициенты Фурье функции f). Тогда

$$S\left[F^r_{\beta,\delta}(x)\right]=S\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)-f^r_\beta\left(x\right)\right)\hat{\tau}_\beta(t)dt\right]=\sum_{k=0}^{\infty}k^r\tau\left(\frac{k}{\delta}\right)A_k(f,x), \tag{5}$$

где

$$A_k(f,x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)\,.$$

Учитывая формулу (5), для $\forall f\in W^r_\beta H^\alpha$ получаем:

$$S\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)-f^r_\beta\left(x\right)\right)\hat{\tau}_\beta(t)dt\right]=\delta^r S\left[f(x)-B_\delta(f;x)\right], \tag{6}$$

где $B_\delta(f;x)$ – бигармонический интеграл Пуассона вида (2). Из равенства (6) следует, что для $\forall f\in W^r_\beta H^\alpha$ в каждой точке $x\in R$ имеет место равенство

$$f(x)-B_\delta(f;x)=\frac{1}{\delta^r}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)-f^r_\beta\left(x\right)\right)\hat{\tau}_\beta(t)dt,\qquad \delta>0. \tag{7}$$

Приведем некоторые дополнительные определения и утверждения, которые будут необходимы нам для дальнейшей работы.

Определение 1΄[8]. Пусть функция $\tau(u)$ задана на $[0;\infty)$, абсолютно непрерывна, $\tau(\infty)=0$ и $0\le\alpha\le 1$. Говорят, что функция $\tau(u)\in\mathcal{E}_\alpha$, если производную $\tau'(u)$ в тех точках, где она не существует, можно доопределить так, чтобы существовали интегралы:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|, \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left|u-1\right|^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|, \qquad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\left|d\tau'(u)\right|.$$

Далее договоримся через $K, K_i, \ i=1,2,...$ – обозначать постоянные, вообще говоря, не одни и те же в разных соотношениях.

Теорема 1´[7]. Пусть $\tau(u)\in\mathcal{E}_\alpha \quad (0\le\alpha<1)$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\tau(0)=0$ и

$$\xi(A,B)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}|A|, & |B|\le|A|,\\ |A|\arcsin\left|\dfrac{A}{B}\right|, & |B|>|A|.\end{cases}$$

Для сходимости интеграла $A(\alpha,\tau)$ *вида*

$$A(\alpha,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|t|^{\alpha}\left|\int_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы сходились интегралы

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^{\infty}\frac{\tau(u)}{u^{1+\alpha}}du, \qquad \int_0^1\frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u^{1+\alpha}}du;$$

при этом справедливы оценки:

$$\left|A(\alpha,\tau)-\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\xi\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau(u),\left|\tau(a+u)-\tau(a-u)\right|\right)\frac{du}{u^{1+\alpha}}\right|\le KH(\alpha,\tau);$$

$$\left|A(\alpha,\tau)-\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du\right|\le K\left(\int_0^1\frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u^{1+\alpha}}du+H(\alpha,\tau)\right); \tag{9}$$

$$\left|A(\alpha,\tau)-\frac{4}{\pi^2}\int_0^1\frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u^{1+\alpha}}du\right|\le K\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du+H(\alpha,\tau)\right);$$

где

$$H(\alpha,\tau)=|\tau(0)|+|\tau(1)|+\int_0^{\frac{1}{2}}u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}|u-1|^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|+\int_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\left|d\tau'(u)\right|.$$

2. Приближение функций из классов $W_\beta^r H^\alpha$ бигармоническими интегралами Пуассона.

В принятых выше обозначениях имеет место следующая теорема:

Теорема. При $r>2$, $0\le\alpha<1$ и $\delta\to\infty$ имеет место асимптотическое равенство:

$$\mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha;B_\delta)_C=\frac{1}{\delta^2}\sup_{f\in W_\beta^r H^\alpha}\left\|\frac{f_0^{(2)}(x)}{2}+f_0^{(1)}(x)\right\|_C+O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}}+\frac{1}{\delta^3}\right), \tag{10}$$

где $f_0^{(1)}(x)$ *и* $f_0^{(2)}(x)$ *– соответственно (1,0)-производная и (2,0)-производная в смысле Вейля – Надя.*

Доказательство. Представим функцию $\tau(u)$, заданную при помощи соотношения (3), в виде $\tau(u)=\varphi(u)+\mu(u)$, где

$$\varphi(u)=\begin{cases}\left(\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u}{\delta}\right)\delta^r, & 0\le u<\dfrac{1}{\delta},\\ \left(\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u}{\delta}\right)u^{-r}, & u\ge\dfrac{1}{\delta},\end{cases} \tag{11}$$

$$\mu(u)=\begin{cases}\left(1-[1-\gamma u]e^{-u}-\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{u}{\delta}\right)\delta^r, & 0\le u<\dfrac{1}{\delta},\\ \left(1-[1-\gamma u]e^{-u}-\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{u}{\delta}\right)u^{-r}, & u\ge\dfrac{1}{\delta}.\end{cases} \tag{12}$$

Для сходимости интеграла $A(\alpha,\varphi)$ согласно теореме 1' достаточно показать сходимость интегралов

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\,|d\varphi'(u)|,\qquad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}\,|d\varphi'(u)|,\qquad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\,|d\varphi'(u)|, \tag{13}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^{\infty}\frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du,\qquad \int_0^1\frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du. \tag{14}$$

Оценим первый интеграл из (13). Так как при $u\in\left[0;\dfrac{1}{\delta}\right]$

$$\varphi'(u)=\delta^r\left(u+\frac{1}{\delta}\right),\quad \varphi''(u)=\delta^r>0,$$

то

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha}\,|d\varphi'(u)|=\int_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha}d\varphi'(u)=\delta^r\int_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha}du=O\left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right).$$

При $u\in\left[\dfrac{1}{\delta};\dfrac{1}{2}\right]$, учитывая, что $r>2$, получаем:

$$\varphi'(u)=\frac{2-r}{2}u^{1-r}+\frac{1-r}{\delta}u^{-r},$$

$$\varphi''(u)=\frac{(2-r)(1-r)}{2}u^{-r}-\frac{(1-r)r}{\delta}u^{-r-1}>0, \tag{15}$$

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\,|d\varphi'(u)|=\int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}d\varphi'(u)=O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right).$$

Итак,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\,|d\varphi'(u)|=O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right). \tag{16}$$

Оценим второй интеграл из (13). Так как на $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ подынтегральная функция непрерывная, а значит, ограниченная, то

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| = O(1). \tag{17}$$

Оценим третий интеграл из (13). Учитывая (15), а также то, что $r > 2$, получаем:

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1)|d\varphi'(u)| \le \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u d\varphi'(u) = O(1).$$

Для того, чтобы оценить первый интеграл из (14), разобьем промежуток $[0;\infty)$ на три части: $\left[0;\frac{1}{\delta}\right]$, $\left[\frac{1}{\delta};1\right]$ и $[1;\infty)$. Тогда

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \delta^r \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{\left(\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\delta}\right)}{u^{1+\alpha}} du = O\left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right), \tag{18}$$

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{\left(\frac{u^{2-r}}{2}+\frac{u^{1-r}}{\delta}\right)}{u^{1+\alpha}} du = O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right), \tag{19}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_1^{\infty} \frac{\left(\frac{u^{2-r}}{2}+\frac{u^{1-r}}{\delta}\right)}{u^{1+\alpha}} du = O(1). \tag{20}$$

Учитывая (18) – (20), получим:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du == O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right). \tag{21}$$

Оценим второй интеграл из (14). Нетрудно убедится, что

$$\int_0^1 \frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_0^1 \frac{\varphi(1+u)-\varphi(1-u)}{u^{1+\alpha}} du = O\left(\frac{1}{\delta^{1-(r+\alpha)}}\right).$$

Таким образом, в силу теоремы 1′ преобразование Фурье функции $\varphi(u)$, заданной в виде (11), суммируемо на всей числовой оси.

Для того, чтобы оценить величину $A(\alpha,\mu)$, согласно сформулированной выше теореме 1′, достаточно найти оценку следующих интегралов:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)|, \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\mu'(u)|, \qquad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1)|d\mu'(u)|, \tag{22}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \left|\int_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du\right|, \qquad \int_0^1 \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du. \tag{23}$$

Для этого сначала покажем, что

$$d\mu'(u) \le 0, \qquad \mu(u) \le 0. \tag{24}$$

Обозначим

$$\overline{\mu}(u) = 1 - e^{-u} - \gamma u e^{-u} - \frac{u}{\delta} - \frac{u^2}{2}.$$

Учитывая, что имеют место неравенства

$$\gamma < 1, \qquad 1-\gamma < \frac{1}{\delta}, \qquad -1+\gamma+\frac{1}{\delta} < \frac{2}{3\delta^2}, \tag{25}$$

$$1-e^{-u}-\gamma u e^{-u} < \frac{u}{\delta}+u^2, \quad e^{-u} \le 1-u+\frac{u^2}{2}, \quad e^{-u} \ge 1-u, \quad u \ge 0, \tag{26}$$

получим:

$$\left|\overline{\mu}(u)\right| < \frac{2}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{u^3}{2},$$

$$\left|\overline{\mu}'(u)\right| < \frac{2}{3\delta^2}+\frac{2}{\delta}u+\frac{3}{2}u^2,$$

$$\left|\overline{\mu}''(u)\right| < \frac{2}{\delta}+3u.$$

Учитывая то, что при $u \in \left[0;\frac{1}{\delta}\right]$ $\mu(u)=\delta^{r}\,\overline{\mu}(u)$, получим неравенства (24) в случае $u \in \left[0;\frac{1}{\delta}\right]$.

Для доказательства неравенств (24) при $u \ge \frac{1}{\delta}$ исследуем функцию

$$\tilde{\mu}(u)=\frac{1}{u^2}-\frac{e^{-u}}{u^2}-\gamma\frac{e^{-u}}{u}-\frac{1}{2}-\frac{1}{u\delta}.$$

Так как

$$\tilde{\mu}(u)=\frac{\overline{\mu}(u)}{u^2},$$

$$\tilde{\mu}'(u)=-\frac{2}{u^3}+\frac{2e^{-u}}{u^3}+\frac{e^{-u}}{u^2}+\gamma\frac{e^{-u}}{u^2}+\gamma\frac{e^{-u}}{u}+\frac{1}{u^2\delta}=$$

$$=\frac{1}{u^3}\left(-2+2e^{-u}+(1+\gamma)ue^{-u}+\gamma u^2e^{-u}+\frac{u}{\delta}\right),$$

$$\tilde{\mu}''(u)=\frac{6}{u^4}-\frac{6e^{-u}}{u^4}-\frac{4e^{-u}}{u^3}-\frac{e^{-u}}{u^2}-\gamma\frac{2e^{-u}}{u^3}-2\gamma\frac{e^{-u}}{u^2}-\gamma\frac{e^{-u}}{u}-\frac{2}{u^3\delta}=$$

$$=\frac{1}{u^4}\left(6-6e^{-u}-(4+2\gamma)ue^{-u}-(1+2\gamma)u^2e^{-u}-yu^3e^{-u}-\frac{2u}{\delta}\right),$$

то, учитывая, что $\gamma > \frac{1}{\delta}$ и $e^{-u} \ge 1-u$, получим:

$$\tilde{\mu}(u) < 0,$$

$$\tilde{\mu}'(u) > \frac{1}{u^3}\left(-2+2-2u+\left(1+1-\frac{1}{\delta}\right)(u-u^2)+yu^2e^{-u}+\frac{u}{\delta}\right)=$$

$$=\frac{1}{u^3}\left(\frac{u^2}{\delta}+\gamma u^2 e^{-u}\right)>0,$$

$$\tilde{\mu}''(u)<\frac{1}{u^4}\left(6-6+6u-\left(4+2-\frac{2}{\delta}\right)(u-u^2)-(1+2\gamma)u^2e^{-u}-\gamma u^3e^{-u}-\frac{2u}{\delta}\right)=$$

$$=\frac{1}{u^4}\left(-\frac{2u^2}{\delta}-(1+2\gamma)u^2e^{-u}-\gamma u^3e^{-u}\right)<0.$$

Следовательно, при $u\geq\frac{1}{\delta}$ имеем

$$\mu''(u)=\left(u^{2-r}\tilde{\mu}(u)\right)''=(2-r)(1-r)u^{-r}\tilde{\mu}(u)+2(2-r)u^{1-r}\tilde{\mu}'(u)+u^{2-r}\tilde{\mu}''(u)<0.$$

Отсюда делаем вывод, что неравенства (24) справедливы при всех $u\geq 0$.

Используя первое неравенство из (24), оценим интегралы из (22):

$$\int_0^{\frac{1}{2}}u^{1-\alpha}\left|d\mu'(u)\right|<\int_0^{\frac{1}{2}}\left|d\mu'(u)\right|=-\int_0^{\frac{1}{2}}d\mu'(u)=O(1), \tag{27}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left|u-1\right|^{1-\alpha}\left|d\mu'(u)\right|\leq\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left|d\mu'(u)\right|=-\mu'(u)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=O(1), \tag{28}$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\left|d\mu'(u)\right|\leq\int_{\frac{3}{2}}^{\infty}u\left|d\mu'(u)\right|=-u\mu'(u)\Big|_{\frac{3}{2}}^{\infty}+\int_{\frac{3}{2}}^{\infty}\mu'(u)du=O(1). \tag{29}$$

Для того, чтоб оценить первый интеграл из (23), разобьем промежуток $[0;\infty)$ на три части: $\left[0;\frac{1}{\delta}\right]$, $\left[\frac{1}{\delta};1\right]$ и $[1;\infty)$. Учитывая сначала равенство (12) и второе неравенство из (24), а потом (25), (26), получаем:

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}}\frac{\left|\mu(u)\right|}{u^{1+\alpha}}du=-\int_0^{\frac{1}{\delta}}\frac{\mu(u)}{u^{1+\alpha}}du=\delta^r\int_0^{\frac{1}{\delta}}\left(-1+e^{-u}-\gamma ue^{-u}+\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\delta}\right)\frac{du}{u^{1+\alpha}}\leq$$

$$\leq\delta^r\int_0^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{1}{\delta}+\gamma-1+(1-\gamma)u+\frac{\gamma}{2}u^2\right)\frac{du}{u^{\alpha}}\leq\delta^r\int_0^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{2}{3\delta^2}+\frac{u}{\delta}+\frac{u^2}{2}\right)\frac{du}{u^{\alpha}}=O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \tag{30}$$

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{\left|\mu(u)\right|}{u^{1+\alpha}}du\leq\int_{\frac{1}{\delta}}^{1}\left(\frac{1}{\delta}+\gamma-1+(1-\gamma)u+\frac{\gamma}{2}u^2\right)u^{-r-\alpha}du=O\left(1+\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \tag{31}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{\left|\mu(u)\right|}{u^{1+\alpha}}du=\int_1^{\infty}\left(e^{-u}-1+\gamma ue^{-u}+\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\delta}\right)\frac{du}{u^{1+r+\alpha}}\leq\int_1^{\infty}\left(-1+u+\gamma+\frac{1}{\delta}\right)\frac{du}{u^{r+\alpha}}=O(1). \tag{32}$$

Из (30) – (32) получим

$$\int_0^{\infty}\frac{\left|\mu(u)\right|}{u^{1+\alpha}}du=\left(1+\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right). \tag{33}$$

Для того, чтобы оценить второй интеграл из (23), отметим, что при $\bar{\lambda}(u)=[1+\gamma u]e^{-u}+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u}{\delta}$ и $\delta\to\infty$ имеет место равенство:

$$\int_0^1 \frac{\left|\mu(1-u)-\mu(1+u)\right|}{u^{1+\alpha}}du=\int_0^1 \frac{\left|\bar{\lambda}(1-u)-\bar{\lambda}(1+u)\right|}{u^{1+\alpha}}du+$$

$$+\left(\left|\mu(0)+\mu(1)\right|+\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\mu'(u)\right|+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left|u-1\right|^{1-\alpha}\left|d\mu'(u)\right|+\int_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\left|d\mu'(u)\right|\right).$$

И так как

$$\int_0^1 \frac{\left|\bar{\lambda}(1-u)-\bar{\lambda}(1+u)\right|}{u^{1+\alpha}}du=O(1),$$

то, учитывая соотношения (27) – (29), получаем

$$\int_0^1 \frac{\left|\mu(1-u)-\mu(1+u)\right|}{u^{1+\alpha}}du=O\left(1\right). \tag{34}$$

Подставляя (27) – (29), (33) – (34) в (9), получим:

$$A(\alpha,\mu)=O\left(1+\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right). \tag{35}$$

Учитывая интегральное представление (7) и то, что $f(x)\in W^r_\beta H^\alpha$, получим:

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha;B_\delta)_C=\sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\left\|\frac{1}{\delta^r}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x+\tfrac{t}{\delta}\right)-f^r_\beta(x)\right)\hat{\tau}_\beta(t)dt\right\|_C=$$

$$=\sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\left\|\frac{1}{\delta^r}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x+\tfrac{t}{\delta}\right)-f^r_\beta(x)\right)\left(\hat{\varphi}_\beta(t)+\hat{\mu}_\beta(t)\right)dt\right\|_C\le$$

$$\le\sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\left\|\frac{1}{\delta^r}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x+\tfrac{t}{\delta}\right)-f^r_\beta(x)\right)\hat{\varphi}_\beta(t)dt\right\|_C+\frac{1}{\delta^{r+\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}|t|^\alpha\left|\hat{\mu}_\beta(t)\right|dt. \tag{36}$$

Отсюда, учитывая (8), будем иметь:

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha;B_\delta)_C=\sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\left\|\frac{1}{\delta^r}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x+\tfrac{t}{\delta}\right)-f^r_\beta(x)\right)\hat{\varphi}_\beta(t)dt\right\|_C+$$

$$+O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}}A(\alpha,\mu)\right),\quad \delta\to\infty. \tag{37}$$

Согласно соотношению (5), ряд Фурье функции

$$f_\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)-f^r_\beta(x)\right)\hat{\varphi}(t)dt$$

имеет вид:

$$S[f_\varphi]=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{2\delta^{2-r}}+\frac{k}{\delta^{2-r}}\right)\left(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right).$$

Поэтому

$$f_\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)-f^r_\beta(x)\right)\hat{\varphi}_\beta(t)dt=\frac{1}{\delta^{2-r}}\left(\frac{f_0^{(2)}(x)}{2}+f_0^{(1)}(x)\right). \tag{38}$$

Подставляя (38) в (37), получаем, что при $\delta\to\infty$