УДК 551.492

А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОДНОЙ ИЗ МОДЕЛЕЙ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА

В работе рассматривается модель многолетних колебаний речного стока, полученная на основе стохастического дифференциального уравнения Орнштейна – Уленбека. Рассматриваемый процесс, который является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с соответствующим коэффициентом сноса и диффузии, дает возможность оценить математическое ожидание и моменты распределения вероятностей изменения речного стока. Эти параметры являются решением системы дифференциальных уравнений второго порядка с краевыми условиями, полученными на основе уравнения Фоккера – Планка и обратного уравнения Колмогорова для переходной плотности вероятности. В отличие от использования численного интегрирования этой системы дифференциальных уравнений в работе получено решение, представленное в виде степенных рядов. Для этого были исследованы функции специального вида, связанные соотношениями с интегралами Эйлера первого и второго рода и неполной гамма-функцией. Приведен пример с использованием предлагаемого решения рассматриваемой модели стохастической гидрологии.

Введение

Рассмотрим марковский процесс для описания колебаний речного стока, используемый в стохастической гидрологии.

Пусть $\overline{V}$ – среднегодовой расход воды, а V_t – расход воды в момент времени *t*. Тогда, полагая $X_t = (V_t - \overline{V})/\overline{V}$, процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью стационарного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Орнштейна – Уленбека с непрерывным временем [1]:

$$dX_t = -kX_t dt + \sigma\, dW_t \qquad (1)$$

где W_t– стандартный винеровский процесс (так что $\dfrac{dW_t}{dt} = W_t'$ – обобщенный случайный процесс белого шума с параметром $\sigma = C_V\sqrt{2k}$), C_V– коэффициент вариации, k^{-1} – время релаксации речного стока.

Орнштейна–Уленбека процесс является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с коэффициентом сноса $a(t,x) = -kx$ и диффузии $\sigma(t,x) = \sigma^2$, переходная плотность вероятности $p(t,\, x, y)$ которого является фундаментальным решением соответствующего уравнения Фоккера – Планка (т. е. прямого уравнения Колмогорова) вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial y}(yp) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

где коэффициент k определяется по формуле $k=-\ln r$, так как автокорреляционная функция колебаний стока имеет вид $e^{-k\tau}$, а r – коэффициент автокорреляции годового стока.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ сток равен x, а x_* – некоторое фиксированное значение стока. Выясним, за какой промежуток времени значение V будет находиться в полуинтервале $[x_*,\infty)$ при условии, что $x\in[x_*,+\infty)$. Решить эту задачу можно с помощью обратного уравнения Колмогорова. Так как случайные колебания стока, описываемые СДУ, однородны по времени, обратное уравнение Колмогорова для процесса (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x,y)=-kx\frac{\partial}{\partial x}p(t,x,y)+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Пусть T – момент времени, в который значение V покинет промежуток $[x_*,+\infty)$. Тогда

$$prob(T\ge t)=G(t,x),G(t,x)=\int_{x_*}^{+\infty}p(t,x,y)dy.$$

Интегрируя (2) по y на интервале от x_* до $+\infty$, получаем

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}=-kx\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial x^2}.$$

Учитывая условия отражения на бесконечности и поглощения в точке $x=x_*$, получим следующие краевые условия:

$$G(t,x)\big|_{x=x_*}=0,\left.\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}\right|_{x=+\infty}=0.$$

Так как функция $1-G(t,x)$ является распределением случайной величины T, то моменты n-ого порядка времени достижения границы x_* определяются соотношениями

$$T_k=-\int_0^{+\infty}t^k\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}dt=\int_0^{+\infty}kt^{k-1}G(t,x)dt$$

Интегрируя по t на интервале от 0 до $+\infty$ соотношение

$nt^{n-1}\dfrac{\partial G(t,x)}{\partial t}=-kx\dfrac{\partial}{\partial x}\left(nt^{n-1}G(t,x)\right)+\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial}{\partial x^2}\left(nt^{n-1}G(t,x)\right)$ и учитывая, что

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}dt=G(+\infty,x)-G(0,x)=-1,$$

получаем следующие уравнения для T_1 и T_n:

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_1}{dx^2}-kx\frac{dT_1}{dx}=-1,\qquad \text{при } \frac{dT_1}{dx}(+\infty)=0,\ T_1(x)\big|_{x=x_*}=0,$$

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_n}{d\,x^2}-kx\frac{dT_n}{dx}=-nT_{n-1},\ \text{при } \frac{dT_n}{dx}(+\infty)=0,\ T_n(x)\big|_{x=x_*}=0.$$

Введя безразмерные величины

$$kT_1 = \theta_1,\ k^2 T_2 = \theta_2,$$

$$x\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x}{C_V} = \xi,\ x_*\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x_*}{C_V} = \xi_*,$$

приходим к системе для оценки математического ожидания T_1 и среднего квадратичного отклонения $\sqrt{T_2 - T_1^2}$:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \quad \frac{d\theta_1}{d\xi}(+\infty) = 0, \theta_1(\xi)\Big|_{\xi=\xi_*} = 0, \\ &\frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_2}{d\xi} = -2\theta_1, \frac{d\theta_2}{d\xi}(+\infty) = 0, \theta_2(\xi)\Big|_{\xi=\xi_*} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Система (3), приведенная в [1], при решении различных прикладных задач, например, в [2], интегрировалась численными методами.

Решение уравнений модели.

Найдем точное решение первого уравнения системы (3).

Введя замену $\dfrac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\dfrac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$ с начальным условием $f_1(\xi)\Big|_{\xi=+\infty} = 0$.

Тогда $f_1(\xi) = (C - \int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{df}{d\xi} - \xi f = -1$.

Заметим, что $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$. Тогда, учитывая начальное условие $f_1(\xi)\Big|_{\xi=+\infty} = 0$, имеем $f_1(\xi) = \left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

Используя разложение функции e^z в ряд Маклорена, имеем:

$$e^{\frac{\xi^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} \text{ и } e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}.$$

Тогда $\int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}$ и, следовательно, $f_1(\xi)$ можно представить в виде $f_1(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)} \right) \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\xi^{2n}}{2^n n!} \right)$.

Тогда, используя правило Коши умножения рядов, получим

$$f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} \right) \frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!}.$$

Докажем следующее утверждение.

Утверждение. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m} = \frac{(2n)!!(m-1)!!}{(2n+1+m)!!}$ для любого натурального m .

Доказательство. Используя бином Ньютона, $x^m (1-x^2)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{2k+m}$ и интегрируя, имеем

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x^2)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{2k+m} dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m}.$$

Заметим, что, с другой стороны,

$$I_{m,n} = \left. \frac{x^{m+1}(1-x^2)^n}{m+1} \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} d(1-x^2)^n = \frac{2n}{m+1} I_{m+2,n-1}.$$

Тогда $I_{m,n} = \dfrac{(2n)!!}{\prod\limits_{k=1}^{n} (m+2k-1)} I_{m+2n,0}$.

Учитывая, что $I_{m+2n,0} = \int\limits_0^1 x^{m+2n} dx = \left. \dfrac{x^{m+2n+1}}{m+2n+1} \right|_0^1 = \dfrac{1}{m+2n+1}$, имеем

$I_{m,n} = \dfrac{(2n)!!}{\prod\limits_{k=1}^{n+1} (m+2k-1)}$ и $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m} = \dfrac{(2n)!!(m-1)!!}{(2n+1+m)!!}$ для любого натурального m и $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

Заметим также, что значения $I_{m,n}$ связаны с бета-функцией $\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$ соотношением:

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x^2)^n dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^n dt = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, n+1 \right).$$

Тогда, используя свойства бета-функции $\mathrm{B}(p,q)$ и гамма-функции $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ – интегралов Эйлера первого и второго рода, получим

$$I_{m,n} = I_{2i,n} = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(i + \frac{1}{2}, n+1 \right) = \frac{\Gamma\left(i + \frac{1}{2} \right) \Gamma(n+1)}{2\Gamma\left(i + \frac{1}{2} + n + 1 \right)} =$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{i}\left(i+\frac{1}{2}-j\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)n!}{2\prod_{j=1}^{i+n+1}\left(i+\frac{1}{2}+n+1-j\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{i}\prod_{j=1}^{i}\left(i+\frac{1}{2}-j\right)2^{n}n!}{2^{i+n+1}\prod_{j=1}^{i+n+1}\left(i+\frac{1}{2}+n+1-j\right)} =$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{i}(2i+1-2j)(2n)!!}{\prod_{j=1}^{i+n+1}(2i+1+2n+2-2j)} = \frac{(2i-1)!!(2n)!!}{(2i+1+2n)!!} = \frac{(m-1)!!(2n)!!}{(m+1+2n)!!}$$

$$I_{m,n} = I_{2i-1,n} = \frac{\mathrm{B}(i,n+1)}{2} = \frac{\Gamma(i)\Gamma(n+1)}{2\Gamma(i+n+1)} = \frac{2^{i-1}(i-1)!2^{n}n!}{2^{i+n}(i+n)!} =$$

$$= \frac{(2i-2)!!(2n)!!}{(2i+2n)!!} = \frac{(m-1)!!(2n)!!}{(m+2n+1)!!}.$$

Утверждение доказано.

Следовательно, $f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^{n}n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}$.

Так как $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$, то

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{2^{n}n!(2n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)} + C \; -$$

решение уравнения $\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_1}{d\xi} = -1$.

Учитывая начальное условие $\theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0$, получаем, что

$$\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*), \qquad (4)$$

где $S_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$ или

$S_1(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\frac{(-1)^{k-1}\xi^{k}}{(k-1)!!k}$, а $.\{t\}$ – дробная часть числа t.

Используя предлагаемую методику, найдем решение уравнения:

$$\frac{d^2G}{d\xi^2} - \xi\frac{dG}{d\xi} = -S_1(\xi), \quad \left.\frac{dG}{d\xi}\right|_{\xi=+\infty} = 0, \quad G(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0.$$

Введя замену $\frac{dG}{d\xi} = f_2(\xi)$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{df_2}{d\xi} - \xi f_2 = -S_1(\xi)$, с начальным условием $f_2(\xi)\big|_{\xi=+\infty} = 0$.

Аналогично, как и для первого уравнения системы (3), получим $f_2(\xi) = (C - \int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t)dt)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $\frac{df_2}{d\xi} - \xi f_2 = -S_1(\xi)$.

Учитывая начальное условие $f_2(\xi)\big|_{\xi=+\infty} = 0$, имеем $f_2(\xi) = (\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t)dt - \int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t)dt)e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

Учитывая, что $S_1(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}$, найдем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t)dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}}{(k-1)!!k} \int\limits_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Заметим, что для любого $n \geq 2$ выполняется

$$J_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^n dt = -t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg|_0^{+\infty} + (n-1)\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{n-2} dt = (n-1)J_{n-2}.$$

Учитывая, что, $J_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $J_1 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} tdt = -e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg|_0^{+\infty} = 1$, имеем $J_{2k} = (2k-1)!!J_0 = (2k-1)!!\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $J_{2k+1} = (2k)!!J_1 = (2k)!!$, для любого натурального k.

Заметим, что значения J_n связаны с гамма-функцией соотношением:

$$J_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^n dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-p}(2p)^{\frac{n-1}{2}} dp = \sqrt{2^{n-1}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Тогда, используя свойства гамма-функции, получим

$$J_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ J_1 = \Gamma(1) = 0! = 1 \text{ и}$$

$$J_{2k} = \frac{2^k}{\sqrt{2}}\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{2^k}{\sqrt{2}}\prod_{i=1}^{k}\left(i + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(2k+1)!!,$$

$$J_{2k+1} = 2^k\,\Gamma(k+1) = 2^k k! = (2k)!!.$$

Следовательно, $J_k = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k-1}{2}\right\}}(k-1)!!$ и

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\theta_1(t)dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}J_k}{(k-1)!!k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln 2,$$ так как $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

Таким образом, $f_2(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln 2 - \int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t)dt\right)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – решение дифференциального уравнения $\frac{df_2}{d\xi} - \xi f_2 = -S_1(\xi)$, удовлетворяющее начальному условию $f_2(\xi)\big|_{\xi=+\infty} = 0$.

Заметим, что

$$J_k(\xi) = \int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} t^k dt = \int\limits_0^{\frac{\xi^2}{2}} e^{-x}(2x)^{\frac{k-1}{2}}dx = \sqrt{2^{k-1}}\,\Gamma_{\frac{\xi^2}{2}}\left(\frac{k+1}{2}\right),$$ где

$\Gamma_z\left(p\right) = \int\limits_0^{z} e^{-t}t^{p-1}dt$ – неполная гамма-функция.

Используя разложение функции e^z в ряд Маклорена, имеем

$$J_k(\xi) = \int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} t^k dt = \int\limits_0^{\xi}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m t^{2m}}{2^m m!}\right)t^k dt = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m \xi^{2m+1+k}}{(2m)!!(2m+1+k)}$$ и

$$\int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}\theta_1(t)dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}}{(k-1)!!k}\int\limits_0^{\xi} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}J_k(\xi)}{(k-1)!!k}$$

Тогда $f_2(\xi) = e^{\frac{\xi^2}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln 2 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}J_k(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}}}{(k-1)!!k}$.

Используя правило Коши умножения рядов, получим

$$J_m(\xi)\cdot e^{\frac{\xi^2}{2}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\xi^{2n+1+m}}{2^n n!(2n+1+m)}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\xi^{2n+1+m}}{2^k k!(2k+1+m)2^{n-k}(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m}\right)\frac{\xi^{2n+1+m}}{2^n n!}.$$

Следовательно, используя утверждение, для любого натурального m выполняется $J_m(\xi)\cdot e^{\frac{\xi^2}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m}\right)\frac{\xi^{2n+1+m}}{2^n n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(m-1)!!\xi^{2n+1+m}}{(2n+1+m)!!}$.

Тогда $f_2(\xi) = e^{\frac{\xi^2}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln 2 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} J_k(\xi) e^{\frac{\xi^2}{2}}}{(k-1)!!k} =$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{(2n)!!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \xi^{2n+1+k}}{(2n+1+k)!!k}.$$

Производя преобразования повторного ряда, получим

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \xi^{2n+1+k}}{(2n+1+k)!!k} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m} \right) \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m-1} \right) \frac{\xi^{2n}}{(2n)!!}.$$

Тогда

$$f_2(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\ln 2 - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m-1} \right) \frac{\xi^{2n}}{(2n)!!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m} \right) \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Так как $\frac{dG}{d\xi} = f_2(\xi)$, то, учитывая начальное условие $G(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0$, получаем, что $G(\xi) = S_2(\xi) - S_2(\xi_*)$,

где $S_2(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\ln 2 - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m-1} \right) \frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} +$

$+\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m} \right) \frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$ или

$$S_2(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \left(\ln\left(2 - 2\left\{\frac{k-1}{2}\right\}\right) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{1}{m - \left\{\frac{k}{2}\right\}} \right) \frac{(-1)^{k-1} \xi^k}{(k-1)!!k},$$

а $[t]$ и $\{t\}$ – целая и дробная части числа t соответственно.

Так как, учитывая (4), $H(\xi) = -S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)$ – решение уравнения $\frac{d^2H}{d\xi^2} - \xi\frac{dH}{d\xi} = S_1(\xi_*),\ \frac{dH}{d\xi}(+\infty) = 0,\ H(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0$, то

$$\theta_2(\xi) = 2\left(S_2(\xi) - S_2(\xi_*) - S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)\right), \tag{5}$$

Таким образом, соотношения (4), (5) – решение системы дифференциальных уравнений (3).

Примеры и выводы.

Рассмотрим пример, приведенный в [1]. Пусть среднегодовой сток Волги $\overline{V} = 239$ км^3/год (объем выборки $n = 113$), среднеквадратичное отклонение равно 46 км^3/год. Тогда $C_v = 0{,}19$. Если коэффициент корреляции r между смежными значениями стока равен 0,42, тогда $k = -\ln 0{,}42 \cong 0{,}9$ год$^{-1}$, $\sigma = 0{,}257$ год$^{-0.5}$,

$\sigma^2 = 0{,}066$ год$^{-1}$. Предположим, что в начальный момент времени $V = 377$ км^3/год. Через сколько лет сток достигнет 101 км^3/год, т.е. уменьшится на шесть среднеквадратичных отклонений (276 км^3/год)? В данном случае $\xi_* = -3$ (это отклонение от среднегодового значения стока, взятое в долях C_V), а времени перехода стока от одного состояния к другому соответствует $\xi = 3$.

Таблица – Решение системы (3)

ξ_*	ξ					
	-2	-1	0	1	2	3
-3	76,5 (85,6)	84,8 (86,1)	86,9 (86,2)	87,8 (86,2)	88,4 (86,2)	**88,7** (**86,2**)
-2		8,3 (10,0)	10,4 (10,3)	11,3 (10,3)	11,9 (10,3)	12,2 (10,3)
-1			2,1 (2,4)	3,0 (2,6)	3,5 (2,6)	3,9 (2,6)
0				0,9 (0,9)	1,4 (1,0)	1,8 (1,1)

В соответствии с таблицей 1, полученной с использованием решения системы (3), $\theta_1 = 88{,}7$, а размерное время составляет $m_T = \dfrac{\theta_1}{k} = 88{,}7 : 0{,}9 \approx 99$ лет. Так как $\sigma_T = \dfrac{\sqrt{\theta_2 - \theta_1^2}}{k} = 86{,}2 : 0{,}9 \approx 95{,}8$, то доверительный интервал $(m_T - t\dfrac{\sigma_T}{\sqrt{n}}; m_T + t\dfrac{\sigma_T}{\sqrt{n}})$ для оценки математического ожидания с надежностью $\gamma = 0{,}95$ ($t = 1{,}96$, $\Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \dfrac{\gamma}{2}$) определяется неравенством $81 < m < 117$.

По известным значениям C_V и r можно исследовать большой цикл задач стохастической гидрологии [1, 2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Найденов, В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – Т. 29, № 1. – М., 2002. – С. 62–67.

2. Волчек, А.А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / А.А. Волчек, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – 2006. – № 5 – С. 56–60.

3. Волчек, А.А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – 2008. – № 5 – С. 83–87.

A.A. Volchek, L.P. Makhnist, V.S. Rubanov. **About the Solution to the Set of Differential Equations, One of the Models of Several Years' Fluctuation of the River Flow**

The article deals with the model of several years' fluctuation of the river flow, which was received by applying the stochastic differential equation of Ornstein-Uhlenbeck. The process under