МАТЭМАТЫКА

УДК 519.6 + 517.983.54 DOI 10.63874/2218-0303-2025-1-56-72

Олег Викторович Матысик[1], Иван Владимирович Ковальчук[2]
[1]канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]студент 3-го курса физико-математического факультета Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Oleg Matysik[1], Ivan Kovalchuk[2]
[1]Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science of Brest State A. S. Pushkin University
[2]3-rd Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: [1]matysikoleg@mail.ru

ТРЕХСЛОЙНАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для решения линейных операторных уравнений первого рода с положительным ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается явная трехслойная итерационная процедура. Исследована сходимость итерационного метода в случае априорного и апостериорного выбора параметра регуляризации при точной и приближенной правых частях операторного уравнения в исходной норме гильбертова пространства. Доказана сходимость метода итераций в полунорме гильбертова пространства. Предложенным методом решена численная модельная задача. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

Ключевые слова: *некорректное уравнение первого рода, явная трехслойная итерационная процедура, гильбертово пространство, ограниченный и самосопряженный оператор, полунорма, правило останова по невязке.*

Three-Layer Iterative Solution Procedure Ill-Posed Equations of the First Kind in a Hilbert Space

To solve linear operator equations of the first kind with a positive bounded self-adjoint operator in a Hilbert space an explicit three-layer iterative procedure is proposed. The convergence of the iterative method is studied in the case of a priori and a posteriori choice of the regularization parameter for the exact and approximate right-hand sides of the operator equation in the original norm of the Hilbert space. The convergence of the iteration method has been proven in the seminorm of a Hilbert space. The proposed method solves the numerical model problem. The results obtained can be used in theoretical research in solving linear operator equations, as well as in solving applied ill-posed problems.

Key words: *ill-posed equation of the first kind, explicit three-layer iterative procedure, Hilbert space, bounded and self-adjoint operator, seminorm, the rule of stopping by discrepancy.*

Введение

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач. Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике, экономике и управлении, может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{1}$$

с заданным оператором $A: X \to Y$ и элементом y, X и Y – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [1] было введено следующее понятие корректности:

Определение. *Задачу отыскания решения $x \in X$ уравнения* (1) *называют корректной (или корректно поставленной, или корректной по Адамару), если при любой фиксированной правой части $y = y_0 \in Y$ уравнения* (1) *его решение*:

а) существует в пространстве X;

б) определено в пространстве X однозначно;

в) устойчиво в пространстве X, т. е. непрерывно зависит от правой части $y \in Y$. В случае нарушения любого из этих условий задачу называют некорректной (некорректно поставленной); более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть неустойчивой.

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора A^{-1} на всем пространстве Y.

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались. Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения первого рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии и т. д.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [2–12].

В настоящей статье предлагается *явная трехслойная итерационная процедура* решения некорректных задач в гильбертовом пространстве и проведено исследование ее основных свойств. Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным *явным методом итераций Ландвебера* [2] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях.

Рассмотренный в статье трехслойный итерационный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, теории потенциала, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, сейсмике, акустике, спектроскопии и медицине (компьютерной томографии).

1. Постановка задачи

В работе решается операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{2}$$

с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным положительным самосопряженным оператором A, в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако не является его собственным значением.

При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (2) является некорректной. Если решение уравнения (2) все же существует, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные схемы.

В настоящей работе предлагается трехслойная итерационная процедура явного типа

$$x_n = 2(E-\alpha A)x_{n-1} - (E-\alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay, \quad x_0 = x_1 = 0. \tag{3}$$

Здесь E – единичный оператор.

Обычно правая часть уравнения (2) известна с некоторой точностью δ, т. е. известен y_δ, для которого $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо схемы (3) приходится рассматривать приближения

$$x_{n,\delta} = 2(E-\alpha A)x_{n-1,\delta} - (E-\alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta, \; x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \tag{4}$$

Ниже, как обычно, под сходимостью процедуры (4) понимается утверждение о том, что приближения (4) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (2) при подходящем выборе n и достаточно малых δ: $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_n \left\|x - x_{n,\delta}\right\|\right) = 0$.

2. Сходимость метода с априорным выбором числа итераций

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A и формулой (3), по индукции получим $x - x_n = \int\limits_0^M \left[\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^n + n\alpha(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right] dE_\lambda y$, где $M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция оператора A. Так как при $0 < \alpha < 2/M$ имеем $|1-\alpha\lambda| < 1$, то отсюда легко выводится сходимость процесса (3) при $n \to \infty$.

Итерационный процесс (4) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема 1. *Итерационный процесс* (4) *сходится при*

$$\alpha \in \left(0, \frac{5}{4M}\right], \tag{5}$$

если выбирать число итераций n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из [5–6; 8]. При этом по индукции легко показывается оценка:

$$\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| = \left\|A^{-1}\left(E - (E-\alpha A)^n - n\alpha A(E-\alpha A)^{n-1}\right)(y - y_\delta)\right\| =$$
$$= \left\|\int\limits_0^M \lambda^{-1}\left(1-(1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right) dE_\lambda (y - y_\delta)\right\| \le \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta.$$

Скорость сходимости приближений (4) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (2), т. е. $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда $y = A^{s+1}z$, и, следовательно, получим

$$x - x_n = \int_0^M \lambda^s (1-\alpha\lambda)^{n-1} dE_\lambda z + \int_0^M \lambda^{s+1}(1-\alpha\lambda)^{n-1}(n-1)\alpha\, dE_\lambda z.$$

Для оценки нормы $\|x - x_n\|$ найдем максимумы модулей подынтегральных функций $f_1(\lambda) = \lambda^s(1-\alpha\lambda)^{n-1}$ и $f_2(\lambda) = \lambda^{s+1}(1-\alpha\lambda)^{n-1}(n-1)\alpha$.

В [6] показано, что при условии (5) $|f(\lambda)| = \left|\lambda^s(1-\alpha\lambda)^{kn}\right| \le s^s(kn\alpha e)^{-s}$. Поэтому $|f_1(\lambda)| \le s^s[(n-1)\alpha e]^{-s}$, $|f_2(\lambda)| \le (s+1)^{s+1}[(n-1)\alpha]^{-s}\, e^{-(s+1)}$. Отсюда получим $\|x - x_n\| \le s^s(s+2)[(n-1)\alpha e]^{-s}\|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности итерационной процедуры (4) запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le s^s(s+2)\left[(n-1)\alpha e\right]^{-s}\|z\| + \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим оценку $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le \left(\frac{5}{4}\right)^{s/(s+1)}(s+1)(s+2)^{1/(s+1)} e^{-s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$ и априорный момент останова $n_{\text{опт}} = 1 + \left(\frac{5}{4}\delta\right)^{-1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} s(s+2)^{1/(s+1)}\alpha^{-1}\|z\|^{1/(s+1)}$. Существенно, что порядок оптимальной оценки есть $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, и, как следует из [3], он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями. Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α, но от него зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, объема вычислительной работы, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию (5), и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in \mathbb{Z}$.

Приведем погрешность итерационной схемы (4) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – значение, полученное по формуле (4), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления γ_n, т. е. $z_n = 2(E-\alpha A)z_{n-1} - (E-\alpha A)^2 z_{n-2} + \alpha^2 A y_\delta + \alpha\gamma_n$, $z_0 = z_1 = 0$. Оценка погрешности итерационного метода (4) в этом случае имеет вид

$$\|x - z_n\| \le s^s(s+2)[(n-1)\alpha e]^{-s}\|z\| + \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta + \frac{(n-1)n}{2}\alpha\gamma,\quad \gamma = \sup_i|\gamma_i|.$$

2. Сходимость метода в полунорме гильбертова пространства при точной и приближенной правой части уравнения

Изучим сходимость итерационного метода (4) в случае единственного решения в *полунорме* (энергетической норме) гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$ [5–6, 8, 12]. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем, что $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = \left(x - x_n\right) + \left(x_n - x_{n,\delta}\right). \tag{6}$$

Тогда запишем первое слагаемое из равенства (6) в виде

$$x - x_n = A^{-1}\left[\left(E - \alpha A\right)^n + n\alpha A\left(E - \alpha A\right)^{n-1}\right]y =$$

$$= A^{-1}(E - \alpha A)^n y + n\alpha(E - \alpha A)^{n-1} y = (E - \alpha A)^n x + n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1} x =$$

$$= (E - \alpha A)^{n-1}(E - \alpha A + n\alpha A)x = (E - \alpha A)^{n-1}[E + (n-1)\alpha A]x.$$

Как было показано в разделе 1, $x - x_n$ бесконечно мало в норме пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки необходима дополнительная информация на гладкость точного решения x – его истокообразная представимость. При использовании полунормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора A имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A\left(E - \alpha A\right)^{n-1}\left[E + \left(n-1\right)\alpha A\right]x, \left(E - \alpha A\right)^{n-1}\left[E + \left(n-1\right)\alpha A\right]x\right) = =$$

$$\left(A\left(E - \alpha A\right)^{2n-2}\left[E + \left(n-1\right)\alpha A\right]^2 x, x\right) = \int\limits_0^M \lambda\left(1 - \alpha\lambda\right)^{2n-2}\left[1 + \left(n-1\right)\alpha\lambda\right]^2 d\left(E_\lambda x, x\right).$$

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции при $\lambda \in [0, M]$. Функция $\varphi(\lambda) = \lambda(1 - \alpha\lambda)^{2n-2}[1 + (n-1)\alpha\lambda]^2 = \left\{\lambda(1 - \alpha\lambda)^{n-1} + \right.$ $\left. + (n-1)\alpha\lambda^2 (1 - \alpha\lambda)^{n-1}\right\}\left\{(1 - \alpha\lambda)^{n-1} + (n-1)\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^{n-1}\right\}$ представляет собой выражение, содержащее частные случаи при $s = 1$ и $s = 2$ функций, оцененных в [6]. Поэтому в нашем случае при условии (5) имеем

$$\max_{\lambda \in [0, M]} |\varphi(\lambda)| \le \left\{[(n-1)\alpha e]^{-1} + 4(n-1)\alpha[(n-1)\alpha e]^{-2}\right\}\left\{1 + (n-1)\alpha[(n-1)\alpha e]^{-1}\right\} =$$

$$= [(n-1)\alpha e]^{-1}\left(1 + 4e^{-1}\right)\left(1 + e^{-1}\right) = (e+1)(e+4)e^{-3}[(n-1)\alpha]^{-1}.$$

Следовательно, при выполнении условия (5) справедлива следующая оценка

$$\|x - x_n\|_A \le (e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2} e^{-3/2}[(n-1)\alpha]^{-1/2}\|x\|.$$

Оценим второе слагаемое в (6). Как показано в разделе 1, имеет место равенство $x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A\right)^n - n\alpha A\left(E - \alpha A\right)^{n-1}\right]\left(y - y_\delta\right)$. Тогда справедливо

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \left(A\left(x_n - x_{n,\delta}\right),\, x_n - x_{n,\delta}\right) = \left(\left[E - \left(E - \alpha A\right)^n - n\alpha A\left(E - \alpha A\right)^{n-1}\right]\left(y - y_\delta\right),\right.$$

$$\left. A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A\right)^n - n\alpha A\left(E - \alpha A\right)^{n-1}\right]\left(y - y_\delta\right)\right) =$$

$$= \left(A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A\right)^n - n\alpha A\left(E - \alpha A\right)^{n-1}\right]^2\left(y - y_\delta\right), y - y_\delta\right) =$$

$$= \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \left(1 - \alpha\lambda\right)^n - n\alpha\lambda\left(1 - \alpha\lambda\right)^{n-1}\right]^2 d\left(E_\lambda\left(y - y_\delta\right), y - y_\delta\right).$$

Обозначим через $\xi_n(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху при условии (5). Сначала методом математической индукции докажем, что при (5) $|\omega_n(\lambda)| = \left|\lambda^{-1}[1-(1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}]\right| \le (n-1)\alpha$.

При $n = 1$ получим $\omega_1(\lambda) = 0 \le 0$, т. е. при $n = 1$ рассматриваемое неравенство справедливо. Предположим, что доказываемое неравенство верно при $n = k$, т. е. выполняется $\omega_k(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^k - k\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{k-1}\right] \le (k-1)\alpha$, и докажем его справедливость при $n = k+1$. Итак, получим

$$\omega_{k+1}(\lambda) = \omega_k(\lambda) + \omega_{k+1}(\lambda) - \omega_k(\lambda) \le (k-1)\alpha + \omega_{k+1}(\lambda) - \omega_k(\lambda) =$$
$$= (k-1)\alpha + \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{k+1} - (k+1)\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^k\right] -$$
$$-\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^k - k\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{k-1}\right] = (k-1)\alpha + \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k\left[1-(1-\alpha\lambda)\right] -$$
$$-k\alpha(1-\alpha\lambda)^k - \alpha(1-\alpha\lambda)^k + k\alpha(1-\alpha\lambda)^{k-1} = (k-1)\alpha + k\alpha(1-\alpha\lambda)^{k-1} - k\alpha(1-\alpha\lambda)^k =$$
$$= (k-1)\alpha + k\alpha(1-\alpha\lambda)^{k-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)\right] = (k-1)\alpha + k\alpha^2\lambda(1-\alpha\lambda)^{k-1}.$$

Покажем, что $|\gamma(\lambda)| = \left|k\alpha^2\lambda(1-\alpha\lambda)^{k-1}\right| < \alpha$. Обозначим $\alpha\lambda = t$, получим $\gamma(t) = k\alpha t(1-t)^{k-1}$. Тогда имеем $\gamma'(t) = k\alpha(1-t)^{k-1} + k\alpha t(k-1)\,(-1)(1-t)^{k-2} = k\alpha(1-t)^{k-2}\left[1-t-t(k-1)\right] = k\alpha(1-t)^{k-2}(1-tk)$. Приравняем $\gamma'(t)$ нулю: $k\alpha(1-t)^{k-2}(1-tk) = 0$, $k\alpha \ne 0$ и $(1-t)^{k-2} \ne 0$, т. к. иначе $\gamma(t) = 0$, поэтому $1-tk = 0$, следовательно, $t_* = \frac{1}{k}$ – стационарная точка $\gamma(t)$. А так как $\gamma''(t_*) = -k^2\alpha(1-t_*)^{k-2} = -k^2\alpha\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-2} < 0$, то $t_* = \frac{1}{k}$ – точка локального максимума функции $\gamma(t)$. Найдем этот максимум. Имеем $|\gamma(t_*)| = \left|k\alpha t_*(1-t_*)^{k-1}\right| = \alpha\left|\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-1}\right| < \alpha$, т. к. при $k > 1$ $\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-1} < 1$. Нетрудно показать, что $\left|\gamma\left(\frac{5}{4}\right)\right| < \alpha$ $\left(5k < 4^k,\, k > 1\right)$, и, следовательно, получим $|\gamma(\lambda)| = \left|k\alpha^2\lambda(1-\alpha\lambda)^{k-1}\right| < \alpha$. Поэтому по индукции справедливость рассматриваемого неравенства доказана. Следовательно, при (5) выполняется $|\omega_n(\lambda)| \le (n-1)\alpha$.

Вернемся к оценке положительной функции $\xi_n(\lambda)$, имеем

$$\xi_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right]^2 =$$
$$= \left|\lambda^{-1}[1-(1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}]\right| \; \left|1-(1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right| \le$$
$$\le (n-1)\alpha\left(1 + \left|(1-\alpha\lambda)^n\right| + \left|n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right|\right) \le 3(n-1)\alpha,$$

т. к. при условии (5) справедливо $|1-\alpha\lambda|<1$. Итак, для любых $n\ge 1$ $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \le 3(n-1)\alpha\delta^2$, поэтому $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le 3^{1/2}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ n\ge 1$.

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \|x-x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \|x-x_n\|_A + 3^{1/2}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ n\ge 1$ и при $n\to\infty$ $\|x-x_n\|_A \to 0$, то для сходимости $\|x-x_{n,\delta}\|_A \to 0$, $n\to\infty$, достаточно, чтобы $\sqrt{n-1}\,\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$. Таким образом, если в процедуре (4) выбрать число итераций $n=n(\delta)$, зависящих от δ так, чтобы $\sqrt{n-1}\,\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$, то получим регуляризующий метод, обеспечивающий сходимость к точному решению уравнения (2) в полунорме гильбертова пространства. Итак, доказана

Теорема 2. *Итерационная процедура* (4) *при условии* (5) *сходится в полунорме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать так, чтобы* $\sqrt{n-1}\,\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (4):

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}\left[(n-1)\alpha\right]^{-1/2}\|x\| + 3^{1/2}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ n\ge 1. \quad (7)$$

Оптимизируем полученную оценку (7) по n, т. е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв к нулю производную по n от правой части равенства (7), получим $\alpha^{-1/2}(e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}\|x\| = 3^{1/2}\alpha^{1/2}\delta(n-1)$, отсюда

$$n_{\text{опт}} = 1 + 3^{-1/2}(\alpha\delta)^{-1}(e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}\|x\|. \quad (8)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (7), найдем ее оптимальное значение:

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2\cdot 3^{1/4}(e+1)^{1/4}(e+4)^{1/4}e^{-3/4}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}. \quad (9)$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *При условии* (5) *оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса* (4) *в полунорме гильбертова пространства имеет вид* (9) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (8).

Отметим тот факт, что для сходимости метода (4) в полунорме достаточно выбирать число итераций $n=n(\delta)$ так, чтобы $\sqrt{n-1}\,\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O\left(\delta^{-1}\right)$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-1}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода итераций (4).

Ответ на вопрос, когда из сходимости в полунорме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H, дает

Теорема 4. *Если выполнены условия*: 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, $0<\varepsilon<\|A\|$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в полунорме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Доказательство.

Из 1) и 2) имеем $\int_{0}^{\varepsilon} \frac{1}{\lambda} d\left(E_{\lambda}\left(x-x_{n,\delta}\right), A\left(x-x_{n,\delta}\right)\right)=0$.

Отсюда

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|^2=\int_{0}^{M} d\left(E_{\lambda}\left(x-x_{n,\delta}\right), x-x_{n,\delta}\right)=\int_{0}^{M} \frac{1}{\lambda} d\left(E_{\lambda}\left(x-x_{n,\delta}\right), A\left(x-x_{n,\delta}\right)\right)=$$

$$=\int_{0}^{\varepsilon} \frac{1}{\lambda} d\left(E_{\lambda}\left(x-x_{n,\delta}\right), A\left(x-x_{n,\delta}\right)\right)+\int_{\varepsilon}^{M} \frac{1}{\lambda} d\left(E_{\lambda}\left(x-x_{n,\delta}\right), A\left(x-x_{n,\delta}\right)\right)=$$

$$=\int_{\varepsilon}^{M} \frac{1}{\lambda} d\left(E_{\lambda}\left(x-x_{n,\delta}\right), A\left(x-x_{n,\delta}\right)\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{M} d\left(E_{\lambda}\left(x-x_{n,\delta}\right), A\left(x-x_{n,\delta}\right)\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{M} d\left(E_{\lambda}\left(x-x_{n,\delta}\right), A\left(x-x_{n,\delta}\right)\right)=\frac{1}{\varepsilon}\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A^2 .$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 1. *Так как* $x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^n-n\alpha A(E-\alpha A)^{n-1}\right]y_{\delta}$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_{\varepsilon}x_{n,\delta}=0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_{\varepsilon}y_{\delta}=0$. *Таким образом, если решение x и приближенная правая часть* y_{δ} *таковы, что* $E_{\varepsilon}x=0$ *и* $E_{\varepsilon}y_{\delta}=0$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к x в полунорме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства и, следовательно, для сходимости приближений* (4) *в норме пространства H не требуется предположения истоко-представимости точного решения.*

Приведем погрешность схемы (4) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (4), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления β_n, т. е.

$$z_n=2(E-\alpha A)z_{n-1}-(E-\alpha A)^2 z_{n-2}+\alpha^2 Ay_{\delta}+\alpha\beta_n,\ z_0=z_1=0. \qquad (10)$$

Если обозначим $\varepsilon_n=z_n-x_{n,\delta}$, то вычитая из (10) равенство (4), получим

$$\varepsilon_n=2(E-\alpha A)\varepsilon_{n-1}-(E-\alpha A)^2\varepsilon_{n-2}+\alpha\beta_n,\ \varepsilon_0=\varepsilon_1=0,\ \beta_0=\beta_1=0. \qquad (11)$$

Нетрудно доказать, что $\varepsilon_n=\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)(E-\alpha A)^{n-i}\alpha\beta_i$. Получим оценку погрешности метода (4) при счете с округлениями в полунорме гильбертова пространства. Имеем

$$\left\|\varepsilon_n\right\|_A^2=\left(A\varepsilon_n,\varepsilon_n\right)=\left(A\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)(E-\alpha A)^{n-i}\alpha\beta_i,\ \sum_{i=2}^{n}(n-i+1)(E-\alpha A)^{n-i}\alpha\beta_i\right)=$$

$$= \left(A\left[\sum_{i=2}^{n} (n-i+1)(E-\alpha A)^{n-i} \right]^2 \alpha^2 \beta_i, \beta_i \right) = \alpha \int_0^M \alpha\lambda \left[\sum_{i=2}^{n} (n-i+1)(1-\alpha\lambda)^{n-i} \right]^2 d\left(E_\lambda \beta_i, \beta_i\right).$$

Так как $\alpha\lambda \in \left(0, 5/4\right]$, то $\|\varepsilon_n\|_A^2 \le \alpha\beta^2 \frac{5}{4}\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2$, где $\beta = \sup_i |\beta_i|$. Отсюда имеем $\|\varepsilon_n\|_A = \|z_n - x_{n,\delta}\|_A \le \frac{(n-1)n}{4}(5\alpha)^{1/2}\beta$.

Таким образом, с учетом вычислительных погрешностей получим оценку погрешности трехслойной итерационной процедуры (4) в полунорме гильбертова пространства

$$\|x - z_n\|_A \le \|x - x_{n,\delta}\|_A + \|x_{n,\delta} - z_n\|_A \le$$
$$\le (e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2} e^{-3/2}\left[(n-1)\alpha\right]^{-1/2}\|x\| + 3^{1/2}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta + \frac{(n-1)n}{4}(5\alpha)^{1/2}\beta, \quad n \ge 1.$$

3. Сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций

Априорный выбор числа итераций $n_{\text{опт}}$ в исходной норме гильбертова пространства получен в предположении, что точное решение x истокопредставимо. Однако не всегда имеются сведения об элементе z и степени истокопредставимости s. Тем не менее метод (4) становится вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке [3; 5; 6; 8]. Определим момент m останова итерационного процесса (4) условием

$$\left.\begin{aligned} &\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m),\\ &\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \tag{12}$$

Покажем возможность применения правила останова (12) к итерационному методу (4). Ниже метод итераций (4) с остановом (12) является сходящимся, если $\lim_{\delta\to 0}\left(\inf_m \|x - x_{m,\delta}\|\right) = 0$. Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right]$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le \frac{5}{4}(n-1)\alpha, \quad n \ge 1, \ M = \|A\|, \ 0 < \alpha \le \frac{5}{4M}, \tag{13}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le 2, \ 0 < \alpha \le \frac{5}{4M}, \tag{14}$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0, \ n \to \infty, \ \forall\lambda \in (0, M], \ 0 < \alpha < 2/M, \tag{15}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le (s+2)\left(\frac{s}{\alpha e}\right)^s (n-1)^{-s}, \ n \ge 1, \ 0 \le s < \infty, \ 0 < \alpha \le \frac{5}{4M}. \tag{16}$$

Аналогично [5; 6; 8] доказываются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$. *Тогда для любого* $w \in H$ $\left(E - Ag_n(A)\right)w \to 0, \quad n \to \infty.$

Лемма 2. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. *Тогда для любого* $v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $(n-1)^s \left\| A^s \left(E - Ag_n(A) \right) v \right\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, $0 \leq s < \infty$.

Лемма 3. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. *Если для некоторой подпоследовательности* $n_k < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k \to \infty$ *имеем* $\omega_k = A\left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0 \to 0$, то *т* $v_k = \left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0 \to 0$.

Используем эти леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 5. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (4) *выбирается по правилу* (12), *тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство.

По индукции нетрудно показать, что $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^n - n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1} \right] y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)\left(y_\delta - y\right) - \left(E - Ag_n(A)\right)x. \tag{17}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A\left[E - Ag_n(A)\right]x - \left(E - Ag_n(A)\right)\left(y_\delta - y\right). \tag{18}$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\left\| \left(E - Ag_n(A)\right)x \right\| \to 0, \ n \to \infty, \tag{19}$$

$$\sigma_n = (n-1)\left\| A\left(E - Ag_n(A)\right)x \right\| \to 0, \ n \to \infty. \tag{20}$$

Кроме того, из (13) и (14) следует, что

$$\left\| g_n(A)\left(y_\delta - y\right) \right\| \leq \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta, \tag{21}$$

$$\left\| E - Ag_n(A) \right\| \leq 2. \tag{22}$$

Применим правило останова (12). Тогда $\left\| Ax_{m,\delta} - y_\delta \right\| \leq b\delta, b > 1$ и из (18) и (22) получим

$$\left\| A\left(E - Ag_m(A)\right)x \right\| \leq \left\| Ax_{m,\delta} - y_\delta \right\| + \left\| \left(E - Ag_m(A)\right)\left(y_\delta - y\right) \right\| \leq (b+2)\delta. \tag{23}$$

Для любых $n < m$ справедливы неравенства $\left\| Ax_{n,\delta} - y_\delta \right\| > \varepsilon$. Поэтому $\left\| A\left(E - Ag_n(A)\right)x \right\| \geq \left\| Ax_{n,\delta} - y_\delta \right\| - \left\| \left(E - Ag_n(A)\right)\left(y - y_\delta\right) \right\| \geq (b-2)\delta.$ Итак, для любых $n < m$

$$\left\| A\left(E - Ag_n(A)\right)x \right\| \geq (b-2)\delta. \tag{24}$$

Из (20) и (24) при $n = m - 1$ получаем $\frac{\sigma_{m-1}}{m-2} = \left\| A\left(E - Ag_{m-1}(A)\right)x \right\| \geq (b-2)\delta$ или, что то же самое, $(m-2)\delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{b-2} \to 0$, $\delta \to 0$ (так как из (20) $\sigma_m \to 0, m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$, то, используя равенство (17), получим

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\| \le \left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|+\left\|g_m(A)\left(y_\delta-y\right)\right\| \le \left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|+ +\frac{5}{4}\alpha\left(m-1\right)\delta \to 0,\ m\to\infty,\ \delta\to 0,$$

т. к. из (19) вытекает $\left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\| \to 0, m\to\infty.$

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x,\ \delta_n \to 0.$

Действительно, из (23) имеем $\left\|A\left(E-Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| \le (b+2)\delta_n \to 0, \delta_n \to 0.$

Следовательно, $A\left(E-Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0,\ \delta_n \to 0,$ и по лемме 3 получаем, что $\left(E-Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0,\ \delta_n \to 0.$ Отсюда имеем $\left\|x_{m(\delta_n),\delta_n}-x\right\| \le \left\|\left(E-Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| + +\frac{5}{4}\alpha\left(m\left(\delta_n\right)-1\right)\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0$. Теорема 5 доказана. Имеет место

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5 *и пусть* $x=A^s z,\ s>0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta) \le 2+\frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\left\|x_{m(\delta),\delta}-x\right\| \le 2^{1/(s+1)}\left[(b+2)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+\frac{5}{4}\alpha\left\{1+\frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \quad (25)$$

Доказательство.

Имеем $\left\|A\left(E-Ag_{m-1}(A)\right)x\right\| = \left\|\int\limits_0^M \lambda^{s+1}\left(1-\lambda g_{m-1}(\lambda)\right)dE_\lambda z\right\| \le (s+3)(s+1)^{s+1}\left[(m-2)\alpha e\right]^{-(s+1)}\|z\|.$

Тогда, воспользовавшись (24), получим $(b-2)\delta \le (s+3)(s+1)^{s+1}\left[(m-2)\alpha e\right]^{-(s+1)}\|z\|,$ откуда имеем $m \le 2+\frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\| = \left\|A^s\left(E-Ag_m(A)\right)z\right\| \le$$

$$\le \left\|A^{s+1}\left(E-Ag_m(A)\right)z\right\|^{s/(s+1)}\left\|\left(E-Ag_m(A)\right)z\right\|^{1/(s+1)} \le 2^{1/(s+1)}\left\|A(E-Ag_m(A))x\right\|^{s/(s+1)} \times$$

$$\times\|z\|^{1/(s+1)} \le 2^{1/(s+1)}\left[(b+2)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} \text{ (см. (23)).}$$

Теперь, поскольку соотношение (17) справедливо для любых n, то

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\| \le \left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\| + \left\|g_m(A)\left(y_\delta-y\right)\right\| \le$$

$$\le 2^{1/(s+1)}\left[(b+2)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha(m-1)\delta \le$$

$$\le 2^{1/(s+1)}\left[(b+2)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+\frac{5}{4}\alpha\left\{1+\frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta.$$

Теорема 6 доказана.

Замечание 2. *Порядок оценки* (25) *есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из* [3], *он оптимален в классе решений* $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 3. *В формулировке теоремы* 6 *предполагается, что точное решение истокопредставимо, но знание истокопредставимости не потребуется на практике, т. к. при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку решения.*

4. Численная модельная задача

Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ задачу в виде уравнения

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad 0 \le t \le 1 \tag{26}$$

с симметричным положительным ядром $K(t, s) = \begin{cases} t(1-s), & t \le s, \\ s(1-t), & t > s, \end{cases}$ точной правой частью $y(t) = \dfrac{(t-1)(t^2-t-1)}{12}$. В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию $x(t) = t(1-t)$.

Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение.

Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i$, $i = \overline{1,m}$, полученные следующим образом $\tilde{y}_i = [\, y(t_i)\cdot 10^k + 0{,}5] \,/\, 10^k$, квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 4$.

При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}\cdot$ Действительно, $\int_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^{m} [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \le mh\left(10^{-k}\right)^2 = 10^{-2k}$.

Заменим интеграл в уравнении (26) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников с узлами $s_j = jh, \ \ j = \overline{1,m}, \ \ h = 1/m,$ т. е. $\int_0^1 K(t,s)x(s)ds \approx \sum_{j=1}^{m} K\left(t, s_j\right) h x_j$.

Тогда получим равенство $\sum_{j=1}^{m} K\left(t, s_j\right) h x_j + \rho_m(t) = y(t)$, где $\rho_m(t)$ – остаток квадратурной замены.

Записав последнее равенство в точках $t_i,\ i=\overline{1,m},$ получим уравнения $\sum\limits_{j=1}^{m} K(t_i,s_j)hx_j + \rho_m(t_i) = y(t_i)$, $i=\overline{1,m}.$

Точные значения $y(t_i)$ мы не знаем, а знаем лишь приближения $\tilde{y}_i$ и, отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближенного решения

$$\sum_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)hx_j = \tilde{y}_i,\ i=\overline{1,m}. \tag{27}$$

Выберем для определенности m = 32 и будем решать систему (27) методом итераций (4), который в дискретной форме запишется:

$$x_i^{(n)} = 2x_i^{(n-1)} - 2\alpha\sum_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)hx_j^{(n-1)} - x_i^{(n-2)} + 2\alpha\sum_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)hx_j^{(n-2)} -$$

$$-\alpha^2\sum_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)h\left(\sum_{l=1}^{m} K\left(t_j,s_l\right)hx_l^{(n-2)}\right) + \alpha^2\sum_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)\tilde{y}_j,\quad x_i^{(0)} = x_i^{(1)} = 0,\quad i=\overline{1,m}.$$

Затем система (27) решалась методом Ландвебера [2], который в данном случае запишется: $x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha\left[\tilde{y}_i - \sum\limits_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)hx_j^{(n)}\right]$, $x_i^{(0)} = 0$, $i=\overline{1,m}.$ При счете выбиралось $\alpha = 0{,}8$. Задача была решена при $\delta = 10^{-4}$. При решении задачи итерационными методами (4) и [2] на каждом шаге итерации вычислялись: $\left\|Ax^{(n)} - \tilde{y}\right\|_m = \left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left[\sum\limits_{j=1}^{m} K\left(t_i,s_j\right)hx_j^{(n)} - \tilde{y}_i\right]^2 h\right\}^{1/2}$ – дискретная норма невязки, $\left\|x^{(n)}\right\|_m = \left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left[x_i^{(n)}\right]^2 h\right\}^{1/2}$ – норма приближенного решения и дискретная норма разности между точным и приближенным решениями: $\left\|x - x^{(n)}\right\|_m = \left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left[x(t_i) - x_i^{(n)}\right]^2 h\right\}^{1/2}$.

Таблица – Результаты счета итераций разными методами

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближенные решения	
			Метод [2] $\delta = 10^{-4}$	Метод (4) $\delta = 10^{-4}$
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,03125	0,00260	0,03027	0,02652	0,02700
0,06250	0,00517	0,05859	0,05399	0,05437
0,09375	0,00768	0,08496	0,07869	0,07999
0,12500	0,01011	0,10938	0,10152	0,10421
0,15625	0,01243	0,13184	0,12330	0,12737
0,18750	0,01463	0,15234	0,14487	0,14982
0,21875	0,01668	0,17090	0,16698	0,17186
0,25000	0,01855	0,18750	0,18575	0,19128
0,28125	0,02025	0,20215	0,20184	0,20836

0,31250	0,02175	0,21484	0,21586	0,22335
0,34375	0,02304	0,22559	0,22364	0,23392
0,37500	0,02411	0,23438	0,23490	0,24530
0,40625	0,02495	0,24121	0,24067	0,25258
0,43750	0,02555	0,24609	0,25057	0,26093
0,46875	0,02592	0,24902	0,25886	0,26289
0,50000	0,02604	0,25000	0,26012	0,26354
$\left\Vert Ax^{(n)} - \tilde{y} \right\Vert_m$			0,00013	0,00009
$\left\Vert x^{(n)} \right\Vert_m$			0,18116	0,18276
$\left\Vert x - x^{(n)} \right\Vert_m$			0,00454	0,00542

Количество итераций 26 24

В обоих случаях для решения задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (12), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. Итак, при $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ для достижения оптимальной точности при счете методом итераций (4) потребовалось 24 итераций, при счете методом Ландвебера [2] – 26 итераций. Результаты счета приведены в таблице.

Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (4) при $\delta = 10^{-4}$, приведены на рисунке.

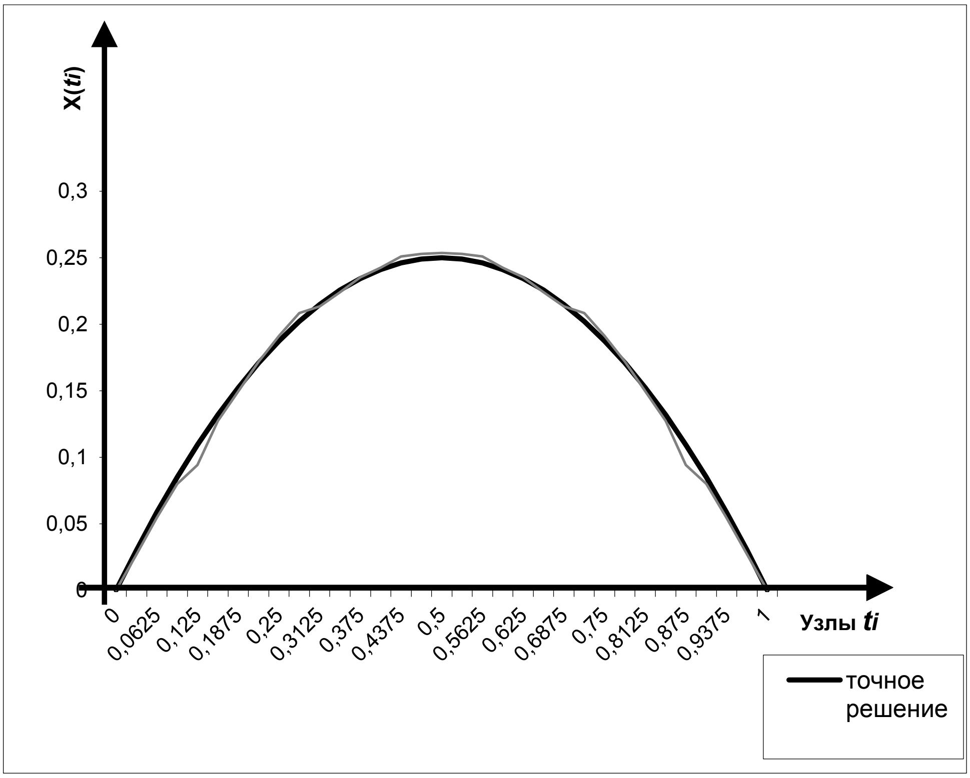

Рисунок – Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (4) при $\delta = 10^{-4}$

Листинг фрагмента кода программы

```
import java.awt.geom.RectangularShape;
import java.io.BufferedReader;
import java.io.File;
import java.io.FileNotFoundException;
import java.io.FileWriter;
import java.io.IOException;
import java.io.PrintWriter;
import java.util.Scanner
static void metod{//Метод итерации явного типа трехслойный
        int it=0;
        for(int i = 0; i < m; i++){
                x[i][0] = 0;
                x[i][1] = 0;
        }
        while(true){
                it++;
                for(int i = 0; i < m; i++){
                        double c1 = 0, c2 = 0, c3 = 0;
                        for(int j = 0; j < m; j++){
                                c1 += A(t[i],s[j]) * h * (x[j][1]-x[j][0]);
                                c2 += A(t[i], s[j]) * h * y[j];
                                double temp = 0;
                                for(int k = 0; k < m; k++){
                                        temp += A(t[j], s[k]) * h * x[k][0];
                                }
                                c3 += A(t[i], s[j]) * h * temp;
                        }
x[i][2] = 2*x[i][1]  - x[i][0] - 2 * alpha * c1 + alpha * alpha * c2  - alpha * alpha * c3;
                                c3 = 0;
                        for(int j = 0; j < m; j++){
                                c3 +=  A(t[i],s[j]) * h * x[j][2];
                                }
                nev1+=norma(c3,y[i]);          // Норма невязки
                prib1+=norma(x[i][2],0.0);      // Норма приближенного решения
                disc1+=norma(X(t[i]),x[i][2]); //Погрешность
                        }
                for(int i = 0; i < m; i++){
                        x[i][0] = x[i][1];
                        x[i][1] = x[i][2].
```

Заключение

В настоящей статье изучены некоторые свойства предложенной явной схемы итераций решения некорректных задач:

1) доказана сходимость приближений с априорным и апостериорным выбором параметра регуляризации (останов по невязке) в исходной норме гильбертова пространства в случае ограниченного самосопряженного оператора, получены оценки погрешностей и оценки для моментов останова;

2) исследована сходимость метода в полунорме гильбертова пространства;

3) решена численная некорректная модельная задача.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.

2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.

3. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

4. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

5. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2008. – 196 с.

6. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.

7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – Nr 2 (116). – P. 89–95.

8. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.

9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr 3. – P. 373–389.

10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr 2 (119). – P. 33–41.

11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.

12. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr 416. – P. 1–12.

REFERENCES

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.

2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.

3. Vajnikko, G. M. Iteracionnyje procedury v niekorriektnykh zadachakh / G. M. Vajnikko, A. Ju. Vierietiennikov. – M. : Nauka, 1986. – 178 s.

4. Samarskij, A. A. Chisliennyje mietody reshenija obratnykh zadach matiematichieskoj fiziki / A. A. Samarskij, P. N. Vabishchievich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.

5. Savchuk, V. F. Rieguliarizacija opieratornykh uravnienij v gilbiertovom prostranstvie / V. F. Savchuк, O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2008. – 196 s.

6. Matysik, O. V. Javnyje i niejavnyje iteracionnyje procedury reshenija niekorriektno postavliennykh zadach / O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2014. – 213 s.

7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – Nr 2 (116). – P. 89–95.

8. Matysik, O. V. Iteracionnaja rieguliarizacija niekorriektnykh zadach / O. V. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 s.

9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr 3. – P. 373–389.

10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr 2 (119). – P. 33–41.

11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.

12. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr 416. – P. 1–12.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.04.2025