УДК [517.52+53](07)

И.В. Кирюшин

КОМПЛЕКСНЫЙ ИНТЕГРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ СТУДЕНТОВ ФИЗИЧЕСКИХ И ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ (НА ПРИМЕРЕ РАЗДЕЛА «РЯДЫ»)

Впервые предлагается комплексный интеграционный метод обучения математическому анализу студентов физических и инженерно-технических специальностей вузов, состоящий в синтезе математики и физики, осуществляемом при различных формах организации обучения: 1) в лекционном курсе, 2) в математическом практикуме, 3) на лабораторных работах компьютерного практикума и 4) в управляемой самостоятельной работе студентов. На примере раздела «Ряды» показано, что с помощью математического описания интеграционных объектов исследования или решения физико-технических проблем можно обеспечить подачу теоретического материала на лекциях на уровне так называемого дидактического синтеза; предлагаются типовые физические (межпредметные) задачи для математического и компьютерного практикумов. Метод позволяет создать условия для формирования необходимой профессиональной компетентности специалистов благодаря высокой степени педагогической интеграции, реализованной с его помощью.

Введение

В последнее десятилетие в европейском высшем образовании остро стоит вопрос о подготовке специалистов, обладающих высокой профессиональной компетентностью и способных конкурировать на мировом рынке труда. Решению этой задачи, очевидно, может содействовать усиление вектора профессиональной направленности образования. Развитие образования в нашей стране не должно отставать от общеевропейского, что требует улучшения методики преподавания в вузах многих базовых дисциплин. В частности, это касается курса математического анализа для студентов физических и инженерно-технических специальностей, который является важнейшей общей дисциплиной для физиков и инженеров. Усиление профнаправленности математики обеспечивается интеграцией с профильными предметами [1], то есть с физикой или специальными дисциплинами.

Особенности интеграционных процессов в содержании профессионального образования изучались такими учеными, как М.Н. Берулава, В.А. Далингер, А.Я. Данилюк, Г.Ф. Федорец, Н.К. Чапаев, И.П. Яковлев и др. Выделены специфические функции интеграции общего и профессионального образования (профнаправленности, методологическая, мотивационная, систематизирующая, проблемности и организационная), которые реализуются через обучающую, воспитывающую и развивающую функции процесса обучения [1]. Очевидно, все перечисленные функции интеграции отвечают за формирование профессиональной компетентности выпускников. Так, мотивационная функция может означать повышение мотивации к изучению математики в части ее физических приложений; функция проблемности – содействовать формированию навыков в решении учебных физических проблем математическими способами и т.д.

М.Н. Берулава выделяет в межпредметной интеграции три уровня: 1) целостности (высокий), 2) дидактического синтеза (средний) и 3) межпредметных связей (низкий) [1, с. 118]. Межпредметные связи обеспечивают иллюстрирование математического материала прикладными примерами. Дидактический синтез может означать изучение на интегративной основе нового материала как по математике, так и по интегрированным в нее дисциплинам. Уровень целостности подразумевает создание единой дисциплины взамен интегрируемых. Рассматривают также интеграцию в теории и практике образования.

Межпредметные связи высшей математики и физики в практике обучения осуществляют через физические задачи [2–3], прикладное математическое [4] и прикладное компьютерное [5] моделирование. Анализ учебников и научных публикаций показывает, что теоретическая интеграция сегодня также находится на уровне межпредметных связей. Дидактический синтез математики и физики может быть основан на моделировании физических объектов (явлений) и решении учебных физических проблем в курсе математической теории [6]. Наконец, в современном компьютерном практикуме по математике для студентов инженерно-технических специальностей вузов прикладные задачи, как правило, не фигурируют (например, пособие Е.М. Воробьева для студентов вузов РФ по специальности «Прикладная математика») [7].

Цель статьи – предложить комплексный интеграционный метод обучения математическому анализу (на примере раздела «Ряды») студентов физических и инженерно-технических специальностей. «Ряды» – один из важнейших разделов математики для физиков и инженеров, однако физические задачи для практикума в этой области в литературе (даже в специализированном задачнике В.Т. Ветровой [2]) отсутствуют. Мы рассмотрим интеграционное изучение рядов и интеграла Фурье при различных формах организации обучения: 1) в лекционном курсе, 2) математическом практикуме, 3) на лабораторных работах в компьютерном классе и 4) в управляемой самостоятельной работе студентов.

Лекционный курс

Дидактический синтез математики и физики осуществляется нами в теоретическом курсе математического анализа на основе объектного и проблемного типов интеграции профессионального образования. Источниками интеграции здесь выступают общие объекты исследования или проблемы [1, с. 117]. При этом мы руководствуемся такими важными принципами, как главенство математики; сохранение предмета изучения как математики, так и физики; множественность физических проблем и объектов, используемых при изучении того или иного математического понятия; асинхронность изучения вопросов физики и аналогичных вопросов в курсе математики (опережение во времени или отставание) [6]. В подразделы математического анализа, читаемого «классически», должны быть сделаны соответствующие «вставки» через постановку физических проблем, придающие математическим понятиям тот или иной физический смысл. Это делает курс математики более доступным для понимания.

1) Числовые ряды. В начале лекции ставится задача: найти общее сопротивление (индуктивность) при последовательном соединении бесконечно большого числа резисторов (индуктивностей), а также общую емкость батареи из бесконечного числа конденсаторов, соединенных параллельно. При этом дано, что сопротивление (индуктивность, емкость) an произвольного элемента с номером n равна $a_n = a_1 q^{n-1}$, где q – постоянная (знаменатель геометрической прогрессии). Только если q < 1, искомая величина будет конечной и равной

$$a_{\text{î áù .}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}. \qquad (1)$$

Такая же задача решается для резисторов и индуктивностей при параллельном соединении и конденсаторов – при последовательном, с той лишь разницей, что в расчетах будут фигурировать величины, обратные сопротивлению, индуктивности и емкости. Так, если величины отдельных элементов bn образуют бесконечно возрастающую геометрическую прогрессию (q>1), то общая величина при их соединении равна:

$$b_{\hat{i}\acute{a}\grave{u}.}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}b_1\cdot\frac{q-1}{q}\cdot\frac{q^n}{q^n-1}=b_1\cdot\frac{q-1}{q}. \qquad (2)$$

Таким способом, вводится понятие об элементах числового ряда, сумме ряда и частичной сумме ряда.

Следует обратить внимание студентов на то, что если в математике о гармоническом ряде говорят как о ряде расходящемся, то, например, полное сопротивление цепочки резисторов с сопротивлениями $a_n = 1/n, n = 1, 2, \ldots$ есть величина конечная (поскольку, начиная с некоторого номера, сопротивление резисторов должно стать меньше, чем проводников, их соединяющих; т. е. речь может идти только о конечном числе «различимых» резисторов).

2) Функциональные ряды. Здесь в качестве предмета исследования может выступать процесс переключения напряжения на зажимах в некоторой электрической цепи (когда в момент времени t=1 происходит скачок напряжения U, т.е. наблюдается «ступенька»). Его можно формально описать с помощью функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(t^n-t^{n-1}\right)$, заданного на промежутке $t\in[0;1]$ (скачок от U = –1 (В) до U = 0). Используя данный ряд, можно показать, что, во-первых, любая «ступенька» напряжения, даже самая «резкая», имеет крутизну, отличную от 90°, а во-вторых, что сумма бесконечного числа непрерывных (на отрезке [0;1]) функций может не оказаться функцией непрерывной (она терпит разрыв 1-го рода в точке t = 1 слева). Действительно, $\lim_{t\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(t^n-t^{n-1}\right)=\lim_{t\to 1-0}\left(t^n-1\right)=-1$, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(1)=1$. Это обусловлено тем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)$ не сходится на [0;1] равномерно. Учитывая конечную скорость нарастания напряжения «ступеньку» можно корректно смоделировать n-й частичной суммой функционального ряда: $\sum_{n=1}^{n}u_n(t)=t^n-1$, $t\in[0;1]$.

3) Ряд Тейлора следует вводить при моделировании упругого и математического маятников, деформирования абсолютно упругого стержня и установлении взаимосвязи массы и энергии. Сначала рассмотрим горизонтальный пружинный маятник, совершающий колебания без диссипации энергии. Запишем его потенциальную энергию $U(x)$ в виде степенного ряда $U(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$, где x – координата, отмечаемая на оси, параллельной направлению колебаний (x_0 – положение равновесия), a_k – постоянные, не все равные нулю. Последовательно дифференцируя это выражение и каждый раз подставляя значение $x = x_0$, найдем значения коэффициентов a_k. Тогда получим, что $U(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{U^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Пусть в равновесии x_0 = 0, тогда, очевидно, $U(0)=0$ и $U'(0)=0$ (в частности, поскольку $F(x)=-U'(x)$ есть возвращающая сила). Из соображений симметрии вытекает также, что $U(x)$ – четная функция, значит, все слагаемые с нечетными степенями x равны нулю. Итак, $U(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U^{(2n)}(0)}{(2k)!}x^{2k}$. Тогда $F(x)=-U'(x)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U^{(2n)}(0)}{(2k-1)!}x^{2k-1}$ (нечетная функция). Ограничившись в этих разложениях первым членом, получим: $U = kx^2/2,\ F = -kx\ (k = U''(0))$. Последние выражения известны студентам еще из школьного курса физики, но представление энергии и силы в виде ряда вызывает у них полезное изумление.

В указанном приближении второй закон Ньютона даст нам: $F = ma$, $-kx(t) = mx''(t),\ x''(t) + \omega^2 x(t) = 0,$ где $\omega^2 = \sqrt{k/m},\ m$ – масса тела. Уравнение движения тогда имеет вид: $x(t) = a\cos(\omega t + \alpha)$, где a – амплитуда, ω – циклическая частота, α – начальная фаза колебаний. Период колебаний T будет равен: $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Перейдем к анализу математического маятника. Возвращающая сила в этом случае равна $F = -mg\sin\varphi,$ где φ – угол отклонения маятника от вертикали, g – ускорение силы тяжести. Второй закон Ньютона дает: $\varphi''(t) + \omega^2\sin\varphi(t) = 0,$ где $\omega^2 = g/l,\ l$ – длина маятника. Представим $\sin\varphi$ в виде степенного ряда: $\sin\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\varphi - \varphi_0)^k$. Последовательно дифференцируя и полагая каждый раз, что $\varphi = \varphi_0$, получим: $\sin\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin^{(k)}\varphi_0}{k!}(\varphi - \varphi_0)^k$. Считая, что $\varphi_0 = 0$, найдем: $\sin\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin^{(k)}0}{k!}\varphi^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(k)}}{(2k+1)!}\varphi^{2k+1}$. Ограничившись первым членом ряда ($\sin\varphi \approx \varphi$), запишем дифференциальное уравнение колебаний: $\varphi''(t) + \omega^2\varphi(t) = 0,$ в общем виде совпадающее с уравнением для упругого маятника. Его решение: $\varphi(t) = a\cos(\omega t + \alpha)$; период колебаний: $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$. От угловой координаты φ легко перейти к линейной: $x = l\varphi$. Тогда найдем: $F = -mgx/l,\ \ U(x) = -\int_0^x F(x)dx = mgx^2/(2l),$ что аналогично выражениям для упругого маятника при $k = mg/l$.

Рассмотрим теперь абсолютно упругий металлический стержень сечения S и длины l, деформируемый вдоль своей оси. Потенциальная энергия $U(x)$ взаимодействия соседних атомов в кристаллической решетке металла определяет величину силы между ними: $f(x) = -dU(x)/dx$. Представляя $f(x)$ в виде степенного ряда и поступая аналогично тому, как это делалось выше, получим, что $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\Delta x^k$ (мы учли, что $f(x_0) = 0$). Для малых Δx можно ограничиться первым элементом ряда: $f(x) = -f'(x_0)\cdot\Delta x = -K\cdot\Delta x$. Если величина деформации стержня $\Delta l << l$, то, очевидно, $\Delta x/x_0 = \Delta l/l$. Полная сила F упругого взаимодействия в стержне равна $F = f\cdot n_0\cdot S = -K\cdot\Delta x\cdot n_0\cdot S = -K\cdot x_0\left(\Delta l/l\right)n_0\cdot S,$ где n_0 – число атомов на единицу площади поперечного сечения стержня. Обозначим $K\cdot x_0\cdot n_0 = E$ (модуль Юнга). Тогда напряжение σ в стержне будет равно $\sigma = -F/S = E\Delta l/l, \Delta l/l = \sigma/E$. Мы получили закон Гука.

Обсудим, наконец, связь массы и энергии. Релятивистская масса тела равна $m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$, где m_0 – масса покоя, v – скорость тела, c – световая скорость. Деление здесь представим как умножение на выражение вида $(1+x)^\alpha$. Представляя его в виде степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и последовательно дифференцируя при $x = 0$, найдем значения коэффициентов a_k:

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(k-1))}{k!} x^k .$$

Тогда для $\alpha = -1/2$, $x = -(v/c)^2$ получим $m = m_0\left(1+v^2/(2c^2)+o(v^2/c^2)\right)$. Это значит, что приращение массы $\Delta m = m - m_0$ прямо пропорционально кинетической энергии $m_0 v^2/2$. Полагая, что $m_0 c^2$ есть энергия покоя, установим закон взаимосвязи массы m и энергии E: $E = mc^2$. Таким способом вводится понятие о ряде Тейлора и методе вычисления его коэффициентов.

4) Тригонометрический ряд и интеграл Фурье. Понятие о ряде Фурье можно вводить, исходя из задачи раскладывания периодических прямоугольных и пилообразных импульсов напряжения, подаваемых на осциллограф. Следует сообщить студентам, что такие периодические сигналы могут, например, играть роль тестовых при исследовании конструкции различных частотных фильтров, «обрезающих» определенные частоты, а само разложение в ряд Фурье широко используется в радиотехнике и теории связи. Периодические прямоугольные импульсы получают при разложении в ряд Фурье функций 1) $u(t) = 0\ (-\pi \le t < 0)$, $u(t) = 1\ (0 \le t \le \pi)$; 2) $u(t) = -1\ (-\pi \le t < 0)$, $u(t) = 1\ (0 \le t \le \pi)$, а пилообразные – раскладывая функцию $u(t) = t\ (-\pi \le t \le \pi)$, где t – время. Соответствующие коэффициенты a_n и b_n находят по методу Эйлера–Фурье в предположении, что разложение $u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)$ имеет место.

В свою очередь, из физических задач, ведущих к понятию интеграла Фурье, можно рассмотреть спектральный анализ цуга волны – ограниченного во времени гармонического колебания. Сначала раскладываем в ряд Фурье периодическую (с периодом T) последовательность цугов $f(t) = a\cos\omega_* t$ (a – амплитуда, ω_* – циклическая частота) длительности τ каждый (середина одного из цугов совпадает с началом координат). Функция $f(t)$ – четная, поэтому $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) nt$, причем амплитуда n-й гармоники равна:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(z)\cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) nz dz \quad (n = 0,1,...) .$$

Пренебрегая слагаемым $\frac{a_0}{2}$ при достаточно больших T, записываем f в виде:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega\left(\frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(z)\cos\omega_n z dz\right)\cos\omega_n t,$$

где $\omega_n = 2\pi n/T$, $\Delta\omega = 2\pi/T$. Это разложение есть интегральная сумма, которая при $T \to +\infty$ (т. е. в случае одиночного цуга) переходит в интеграл Фурье четной функции:

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \cos\omega t d\omega\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\omega z dz\right) = \int_0^{+\infty} A(\omega)\cos\omega t d\omega.$$

Здесь спектральная плотность амплитуды $A(\omega)$ составляет:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\omega z dz=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\tau/2} a\cos\omega_{*}z\cdot\cos\omega z dz.$$

Отмечают, что величина $A(\omega)$ аналогична коэффициентам Фурье a_n. Далее подобные рассуждения проводят для функции $f(t)=a\sin\omega_{*}t$ и приходят к интегралу Фурье для нечетной функции. Общий вид интеграла Фурье получают путем простого суммирования обоих случаев. Одним из достоинств такого способа представления интеграла Фурье является демонстрация того, что он может записываться не только для непериодических функций, но также и для функций периодических «в малом» (т.е. в узком диапазоне $t\in[-\tau/2;\tau/2]$).

Математический практикум

Приведем типовые задачи с физическим содержанием для тем, связанных с изучением числовых и степенных рядов, рядов Фурье и интеграла Фурье.

1) Найдите сопротивление цепочки резисторов, если сопротивление первого резистора равно R_1 = 10 Ом, а каждого последующего – вдвое меньше. Сопротивление последнего резистора пренебрежимо мало. Сколько всего резисторов может быть в цепочке?

2) Скорость тела, движущегося прямолинейно, изменяется по закону $v=0,5t^3$ (м/с). Разложите ее по степеням (t – 1), т.е. в точке t_0 = 1 (с).

3) Периодическая сила совершает работу $A=-3\cos(2\pi t)$ (Дж). Разложите ее в степенной ряд при а) t = 0; б) при t = 1 (с).

4) Поток вектора магнитной индукции зависит от времени по закону $\Phi(t)=10^{-3}\cos(3\pi t)+2\cdot 10^{-3}\sin(5\pi t)$ (Вб). Разложите $\Phi(t)$ в ряд Маклорена.

5) Интенсивность при многолучевой интерференции равна $I(\delta)=I_0\dfrac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$, где I_0 – интенсивность, создаваемая каждым из N лучей в отдельности; δ – фазовый сдвиг между соседними лучами. С помощью разложения в ряд найдите значение I при $\delta=2\pi n$ (n = 0, ±1, ±2...) в так называемых главных максимумах.

6) Период T колебаний математического маятника длины l с угловой амплитудой φ_0 равен $T(\varphi_0)=4\sqrt{\dfrac{l}{g}}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$, $k=\sin\left(\dfrac{\varphi_0}{2}\right)$, где g – ускорение силы тяжести, α – переменная. Разложите подинтегральную функцию в ряд по степеням sinα, а) используя биномиальный ряд; б) пользуясь формулой Валлиса: $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n}\alpha d\alpha=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$, проинтегрируйте полученный ряд и найдите $T(\varphi_0)$.

7) Период колебаний математического маятника длины l равен:

$T(\varphi_0)=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}\left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\dfrac{\varphi_0}{2}\right)+\left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\left(\dfrac{\varphi_0}{2}\right)+\ldots\right)$, где g – ускорение силы тяжести, φ_0 – амплитуда маятника (рад.). а) Используя разложение синуса в ряд Маклорена, запишите период $T(\varphi_0)$, ограничившись слагаемым с φ_0^2; б) Для φ_0 = π/6 оцените погрешность, возникающую при переходе от данной формулы к обычной для математического маятника.

8) Лучеиспускательная способность $\varphi(\lambda, T)$ абсолютно черного тела температуры T (формула Планка): $\varphi(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/kT\lambda)-1}$, где λ – длина волны излучения, h, k – постоянные Планка и Больцмана. Пользуясь разложением экспоненты в ряд по степеням $hc/kT\lambda$, получите выражение для $\varphi(\lambda, T)$ при $hc<<kT\lambda$, ограничившись двумя первыми членами (закон Рэлея–Джинса).

9) Известно, что при падении тела массы m с учетом силы сопротивления воздуха ($F_{\text{сопр.}} = - av^2$, a – постоянная, v – скорость тела) его скорость зависит от времени по закону: $v(t)=\sqrt{\frac{mg}{a}}th\left(\sqrt{\frac{ag}{m}}t\right)$, где g – ускорение силы тяжести, $thx=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ – функция гиперболического тангенса. Установите: а) как выглядит закон при малых значениях t, т.е. когда скорость невелика и сопротивлением воздуха можно пренебречь; б) величину предельной скорости (при $t\to\infty$); в) зависимость $v(t)$, когда скорость еще невелика, но сопротивлением воздуха пренебречь уже нельзя.

10) Ответьте на вопросы, аналогичные тем, которые были заданы в предыдущей задаче, если падение тела происходит в жидкости ($F_{\text{сопр.}} = - av$) и скорость равна: $v(t)=\frac{mg}{a}\left(1-e^{-at/m}\right)$.

11) Функция распределения Максвелла молекул газа по скоростям v при температуре T (плотность вероятности) имеет вид: $f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/(2kT)}$, где m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана. Доля p молекул газа, имеющих скорости меньше v равна: $p=\int_0^v f(v)dv$. Напишите разложение величины p в ряд по степеням v и рассмотрите случай $mv^2/2<<kT$.

12) Разложите в ряд Фурье напряжение $U(t)$ на выходе двухполупериодного выпрямителя: $U(t)=\left|U_0\cos t\right|$, где t – время, U_0 – амплитуда. Найдите величину постоянной составляющей выпрямленного напряжения и коэффициент пульсаций K, равный отношению амплитуды первой гармоники к постоянной составляющей. Примите значения: а) $U_0 = 2$ (В); б) $U_0 = 10$ (В).

13) Дана периодическая последовательность униполярных прямоугольных импульсов напряжения амплитуды $U_0 = 1$ (В). Длительность отдельного импульса равна $\tau = 0{,}1$ (с), а период повторения импульсов – $T = 1$ (с). Найдите среднее значение напряжения (постоянную составляющую) и спектр данной периодической последовательности (зависимость амплитуды гармонических составляющих от частоты).

14) Определите спектр периодической последовательности цугов гармонического колебания $U_0\cos\omega_0 t$ с длительностью цуга $\tau = 5$ (с) и периодом $T = 10$ (с). Известно, что $U_0 = 1$ (В), $\omega_0 = 10$ (рад/с).

15) Определите спектральную плотность амплитуды $A(\omega)$ одиночного униполярного сигнала прямоугольной формы амплитуды 1 В и длительности 2 с.

Лабораторные работы в компьютерном классе

Компьютерное моделирование физических процессов удобно проводить в простой системе «MathCad», которая легко осваивается прямо в ходе лабораторных работ. При изучении числовых рядов можно рассчитывать общую величину сопротивления, емкости и индуктивности в зависимости от числа n элементов по формулам (1–2), а также соответствующие остатки рядов. При изучении функциональных рядов можно моделировать ступеньку напряжения различными частичными суммами формального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(t^n - t^{n-1}\right)$, заданного на промежутке времени $t \in [0;1]$.

При освоении степенных рядов следует рассмотреть разложение в ряд Тейлора гармонических колебаний и экспоненциального падения напряжения U на конденсаторе емкости C при его разряде через сопротивление R: $U(t) = U_0 \exp(-t/(RC))$. Можно также рассмотреть падение тела с учетом силы сопротивления воздуха (задача № 9). Решение дифференциального уравнения движения $mv' = mg - av^2$ с учетом начальных условий $v(0) = 0$ имеет, как известно, вид: $v(t) = v_\infty th(gt/v_\infty)$, где $v_\infty = \sqrt{mg/a}$ – установившаяся скорость. Построением графиков $v = v(t)$ для различных порядков аппроксимации гиперболического тангенса первыми членами его разложения в ряд Маклорена и графиков $\varepsilon = \varepsilon(t)$ соответствующих остатков завершается данная работа. Аналогичная задача (№ 10), связанная с разложением в ряд простой экспоненты, также может обеспечить рост мотивации к изучению математики благодаря моделированию.

При изучении приложения степенных рядов к вычислению интегралов полезно смоделировать распределение молекул по скоростям (задача № 11) с построением как аппроксимационных кривых для $f(v)$ и $p(v)$, так и соответствующих остатков. Другой «мотивирующей» задачей является моделирование ангармонических колебаний математического маятника (задача № 6). Из закона сохранения энергии следует, что $mv^2/2 = mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$, где m – масса маятника, v – его скорость, φ – угол отклонения от вертикали. Учитывая, что $v = ld\varphi/dt$ (t – время), получим уравнение движения: $d\varphi/dt = \sqrt{2g(\cos\varphi - \cos\varphi_0)/l}$. После простых тригонометрических преобразований, переходя к новой переменной α с помощью выражения $\sin(\varphi/2) = \sin(\varphi_0/2)\cdot\sin\alpha$, найдем уже приведенное соотношение для зависимости периода $T(\varphi_0)$ колебаний от амплитуды φ_0 через эллиптический интеграл 1-го рода. Разложив подинтегральную функцию в биномиальный ряд по степеням $\sin\alpha$ и пользуясь формулой Валлиса, получим выражение $T(\varphi_0)$ через ряд, данное в задаче № 7. Более общая запись, как известно, имеет вид:

$$T(\varphi_0) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \sin^{2n}\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right).$$

Следует построить графики аппроксимационных зависимостей $T = T(\varphi_0)$ (не раскладывая $\sin(\varphi_0/2)$ в ряд), а также соответствующие остатки. Этот пример показывает, как простой физический процесс может потребовать использования сложной математической модели, что демонстрирует важность математики. Наконец, при изучении рядов и интеграла Фурье проводят аппроксимацию и спектральный анализ разного вида периодических импульсов напряжения, волновых цугов, а также изолированных импульсов и одиночных цугов волн (например, задачи № 12–15).

Управляемая самостоятельная работа

Управляемая самостоятельная работа студентов охватывает не только традиционные задания, связанные с проработкой вопросов математической теории или практикума, но также и задания, посвященные компьютерному моделированию физических приложений, где применяются математические знания по изучаемой теме (в том числе изучаемой самостоятельно). Используются задания, аналогичные приведенным при обсуждении компьютерного моделирования.

Заключение

Предлагаемый комплексный интеграционный метод обучения математическому анализу студентов физических и инженерно–технических специальностей вузов состоит в синтезе математики и физики, осуществляемом при различных формах организации обучения: 1) в лекционном курсе; 2) в математическом практикуме; 3) на лабораторных работах компьютерного практикума и 4) в управляемой самостоятельной работе студентов.

На примере раздела «Ряды» показано, как с помощью математического описания интеграционных объектов исследования или решения физико–технических проблем можно обеспечить подачу теоретического материала на лекциях на уровне так называемого дидактического синтеза; предлагаются типовые физические (межпредметные) задачи для математического и компьютерного практикумов.

Метод позволяет создать благоприятные условия для формирования необходимой профессиональной компетентности специалистов за счет высокой степени педагогической интеграции, реализованной с его помощью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берулава, М.Н. Интеграция содержания образования / М.Н. Берулава. – М. : Педагогика, 1993. – 170 с.
2. Ветрова, В.Т. Сборник физических задач по общему курсу высшей математики : учеб. пособие для вузов / В.Т. Ветрова. – Минск : Вышэйшая школа, 1997. – 202 с.
3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : АСТ, 2008. – 558 с.
4. Беломестнова, В.Р. Математическое моделирование как средство интеграции курса математики с физическими дисциплинами при обучении студентов физических специальностей / В.Р. Беломестнова // Омский научный вестник. – 2006. – № 7 (43). – С. 192–201.
5. Кирюшин, И.В. Построение межпредметных связей математики и физики в курсе математического анализа с использованием компьютерного моделирования физических процессов / И.В. Кирюшин // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2009. – № 4. – С. 16–21.
6. Кирюшин, И.В. Теоретическая интеграция математики и физики в курсе математического анализа / И.В. Кирюшин // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2010. – № 2. – С. 34–39.
7. Воробьев, Е.М. Компьютерный практикум по математике. Математический анализ. Линейная алгебра : учеб. пособие / Е.М. Воробьев. – М. : КДУ, 2009. – 604 с.

Kiryushin I.V. **Complex Integration Method of the Training in Mathematical Analysis for Students of Physical and Engineering Specialties (on example of the section «Series»)**

A new integrated method in teaching mathematical analysis for high school students of physical and engineering specialties (on the example of the section «Series») is offered. The root of the method is a syntheses mathematics and physics in various types of organizing the training: 1) in the lecture course, 2) in practical work, 3) in the computer-based practical work and 4) in controlling independent work. The method can effectively create favorable conditions to form professional competence of specialists due to high degree of the pedagogical integration.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 30.10.2010