такая, что G_i нормальна в группе G и фактор-группа G_i / G_{i-1} изоморфна силовской p_i-подгруппе G_{p_i} из G для всех i.

Группа называется сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов являются простыми числами. Через $\mathfrak{U}$ обозначим класс всех сверхразрешимых групп. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой, а группа с нормальной p'-холловой подгруппой называется p-нильпотентной.

Лемма 2.1 *[9, теорема 1, предложения 1–2]. Пусть $G = AB$ – произведение tcc-перестановочных подгрупп A и B. Тогда для минимальной нормальной подгруппы N группы G справедливы следующие утверждения:*

(1) $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{1, N\}$;

(2) *если $N \le A \cap B$ или $N \cap A = N \cap B = 1$, то $|N| = p$, где p – простое число.*

Лемма 2.2 *[10, теорема 4]. Пусть $G = AB$ является произведением tcc-перестановочных подгрупп A и B. Тогда $[A, B] \le F(G)$.*

Лемма 2.3 *[11, лемма 6]. Предположим, что разрешимая группа $G \notin \mathfrak{U}$, но фактор-группа $G / K \in \mathfrak{U}$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $Z(G) = O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;

(2) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$ для некоторого $p \in \pi(G)$;*

(3) *G – примитивная группа; $G = [N]M$, где M – максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром;*

(4) *N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$;*

(5) *если V – подгруппа группы G и $G = VN$, то $V = M^x$ для некоторого $x \in G$.*

Из леммы 2.3 легко получается следующая

Лемма 2.4 *[12]. Пусть G – минимальная несверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *G разрешима и $|\pi(G)| \le 3$;*

(2) *G имеет единственную нормальную силовскую подгруппу P и $P = G^{\mathfrak{U}}$;*

(3) *$P / \Phi(P)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G / \Phi(P)$ и $|P / \Phi(P)| > p$;*

(4) *если Q – дополнение к P в G, то $Q / Q \cap \Phi(G)$ либо примарная циклическая группа, либо минимальная неабелева группа;*

(5) *если $|\pi(Q)| = 2$, то Q – нециклическая группа с циклическими силовскими подгруппами.*

(6) *если G не является группой Шмидта, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.*

Приведем некоторые свойства tcc-подгрупп.

Лемма 2.5 *Пусть A – tcc-подгруппа группы G и Y – tcc-добавление к A в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *A – tcc-подгруппа в H для каждой подгруппы H группы G такой, что $A \le H$;*

(2) *AN/N – tcc-подгруппа в G/N для каждой нормальной подгруппы N группы G;*

(3) *для каждой нормальной подгруппы A_1 группы A и $X \le Y$ существует $y \in Y$ такой, что $A_1X^y \le G$. В частности, $A_1M \le G$ для некоторой максимальной подгруппы M группы Y и $A_1H \le G$ для некоторой π-холловой подгруппы H разрешимой группы Y и любого $\pi \subseteq \pi(G)$;*

(4) *$A_1K \le G$ для каждой субнормальной подгруппы K в Y и для каждой нормальной подгруппы A_1 группы A;*

(5) *если T нормальная подгруппа в G такая, что $T \le A$ и $T \cap Y = 1$, то T_1 нормальная подгруппа в G для каждой нормальной подгруппы T_1 группы A такой, что $T_1 \le T$;*

(6) *если T нормальная подгруппа в G такая, что $T \cap A = 1$ и $T \le Y$, то $A_1 \le N_G(T_1)$ для каждой нормальной подгруппы T_1 группы T и для каждой нормальной подгруппы A_1 группы A;*

(7) *A^x – tcc-подгруппа группы G и Y^x – tcc-добавление к A^x в G для любого $x \in G$.*

Доказательство.

1. Т. к. Y – tcc-добавление к A в G, то $G = AY$, A и Y – tcc-перестановочные подгруппы из G. По тождеству Дедекинда $H = H \cap AY = A(H \cap Y)$. Т. к. $H \cap Y \le Y$, то для любых $X \le A$ и $Z \le H \cap Y$ существует элемент $u \in \langle X, Z \rangle$ такой, что $XZ^u \le G$. Поэтому A и $H \cap Y$ tcc-перестановочны и, значит, A – tcc-подгруппа в H.

2. Т. к. $G = AY$, то $G/N = (AN/N)(YN/N)$. Пусть B/N – произвольная подгруппа из AN/N и X/N – произвольная подгруппа в YN/N. Т. к. $N \le B \le AN$, то по тождеству Дедекинда $B = B \cap AN = (B \cap A)N$.

Аналогично $X = X \cap YN = (X \cap Y)N$. Т. к. $B \cap A \le A$ и $X \cap Y \le Y$, то $(B \cap A)(X \cap Y)^u \le G$ для некоторого $u \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle$. Поэтому

$$(B/N)(X/N)^{uN} = (B \cap A)(X \cap Y)^u N/N \le G/N$$

для

$$uN \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle N/N \subseteq \langle B, X \rangle N/N = \langle B/N, X/N \rangle.$$

Значит, AN/N – tcc-подгруппа в G/N.

3. Т. к. A – tcc-подгруппа группы G, то по определению для каждой нормальной подгруппы A_1 группы A и $X \le Y$ существует $u \in \langle A_1 X \rangle$ такой, что $A_1X^u \le G$. Т. к. $u \in G = AY = YA$, то $u = ya$ для некоторых $y \in Y$ и $a \in A$. Тогда

$$A_1X^u = A_1X^{ya} = A_1(X^y)^a = A_1^a(X^y)^a = (A_1X^y)^a \le G.$$

Поэтому существует подгруппа A_1X^y в группе G для некоторого $y \in Y$. Очевидно, что если X – π-холлова подгруппа группы Y, то $H = X^y$ – π-холлова подгруппа группы Y. Поэтому $A_1H \le G$. Аналогично и в случае, когда X – максимальная подгруппа группы Y. Тогда $M = X^y$ – максимальная подгруппа группы Y и $A_1M \le G$.

4. Поскольку K субнормальная подгруппа в Y, то существует цепь подгрупп

$$Y = K_0 \ge K_1 \ge \ldots \ge K_{n-1} \ge K_n = K,$$

в которой подгруппа K_{i+1} нормальна в K_i для всех i. Применим индукцию по n. По п. (3) существует $y \in Y$ такой, что $A_1K_1^y = A_1K_1 \le G$. Поэтому утверждение справедливо для $n = 0$ и $n = 1$. Значит, $n \ge 2$. Согласно п. (1) A – tcc-подгруппа в AK_1 и K_1 – tcc-добавление к A в AK_1. Т. к. длина субнормальной цепи между K и K_1 меньше, чем n, то по индукции в группе AK_1 существует подгруппа A_1K, а следовательно, $A_1K \le G$.

5. По п. 3 в группе G существует подгруппа T_1Y. Т. к. $T_1 = T \cap T_1Y$ нормальна в T_1Y, то $Y \le N_G(T_1)$ и T_1 нормальна в $G = AY$.

6. Т. к. T_1 субнормальна в Y, то по п. 4 в группе G существует подгруппа $A_1T_1 \le G$ каждой нормальной подгруппы A_1 группы A. Т. к. $T_1 = T \cap A_1T_1$ нормальна в A_1T_1, то $A_1 \le N_G(T_1)$.

7. Т. к. $AY = G$, то $A^xY^x = G$. Пусть $K \le A^x$, $L \le Y^x$. Тогда $K^{x^{-1}} \le A$, $L^{x^{-1}} \le Y$ и существует $u \in \langle K^{x^{-1}}, L^{x^{-1}} \rangle$ такой, что $K^{x^{-1}}(L^{x^{-1}})^u \le G$. Т. к.

$$\langle K^{x^{-1}}, L^{x^{-1}} \rangle = \langle K, L \rangle^{x^{-1}},$$

то существует $v \in \langle K, L \rangle$ такой, что $u = v^{x^{-1}}$.

Поскольку $x^{-1}u = vx^{-1}$, то

$$K^{x^{-1}}(L^{x^{-1}})^u = K^{x^{-1}}L^{vx^{-1}} = (KL^v)^{x^{-1}}.$$

Поэтому $KL^v \le G$. Следовательно, A^x – tcc-подгруппа группы G и Y^x – ее tcc-добавление в G. Лемма доказана.

2. Доказательство основного результата

1. Предположим, что лемма неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть N – неединичная нормальная в G подгруппа и M/N – максимальная подгруппа G/N. Тогда M – максимальная подгруппа в G и по лемме 2.5 (2) все фактор-группы G/N наследуют условия теоремы. Поэтому G/N сверхразрешима.

Пусть H – максимальная подгруппа и Y – ее tcc-добавление в G. Если $F(G) \ne 1$, то G разрешима. Поэтому $F(G) = 1$ и по лемме 2.2 $Y \le C_G(H)$. Тогда H нормальна в G и $|G:H|$ – простое число. Т. к. H – произвольная максимальная подгруппа в G, то группа G сверхразрешима, а следовательно, разрешима.

По лемме 2.3 в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что

$$N = C_G(N) = \mathrm{O}_p(G) = F(G)$$

для некоторого $p \in \pi(G)$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$, $G = [N]T$, где T – некоторая максимальная подгруппа группы G.

Пусть U – tcc-добавление к T в G. По лемме 2.1 $N \le U$. Т. к. N – элементарная абелева p-подгруппа, выберем нормальную подгруппу N_1 в N такую, что $|N_1| = p$. Тогда по лемме 2.5 (6) $T \le N_G(N_1)$. Поскольку N_1 нормальна в N, то N_1 нормальна в $G = [N]T$ и $N = N_1$. Противоречие. Лемма доказана.

2. Предположим, что теорема неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. По лемме 2.5 (1) и по теореме 3.1 каждая максимальная подгруппа M будет сверхразрешимой. Поэтому G – минимальная несверхразрешимая группа и применима лемма 2.4. Тогда группа G разрешима, $|\pi(G)| \le 3$ и имеет единственную нормальную силовскую подгруппу $P = G^{\mathfrak{U}}$. Очевидно, что $\Phi(G) = 1$. Поэтому P – минимальная нормальная подгруппа порядка p^n, $n > 1$ и $G = [P]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G.

Если $|\pi(G)| = 3$, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и $M = [T]R$, где $|T| = t$, $|R| = r$, $t, r \in \pi(G)$. Подгруппы T и R являются 2-максимальными подгруппами группы G. Тогда по условию $TY_1 = G = RY_2$, где Y_1 и Y_2 – их tcc-добавления в G. Кроме того, $P \le Y_1$ и $P \le Y_2$. Пусть P_1 – минимальная нормальная подгруппа в P. Тогда по лемме 2.5 (6) $T \le N_G(P_1)$ и $R \le N_G(P_1)$. Тогда P_1 нормальна в $G = PM = PTR$, противоречие.

Таким образом, $|\pi(G)| = 2$. Тогда M – q-группа. Если $|M| > q$, то существует в M максимальная подгруппа M_1 такая, что $M_1 \ne 1$. Очевидно, что $H = [P]M_1$ – максимальная подгруппа в G. Т. к. H сверхразрешима, то в H существует максимальная подгруппа H_1 такая, что $M_1 \le H_1$ и $|H : H_1| = p$. По условию подгруппа H_1 – tcc-подгруппа группы G. Тогда $H_1V = G$, где V – ее tcc-добавление в G. По лемме 2.1 $P \le V$ и $P \cap H_1 = 1$. Тогда по тождеству Дедекинда

$$H_1 = H_1 \cap PM_1 = (H_1 \cap P)M_1 = M_1.$$

Поэтому $|P| = p$. Противоречие.

Значит, $|M| = q$ и P – максимальная подгруппа. Пусть P_1 – максимальная подгруппа в P. Тогда по условию $P_1K = G$, где K – tcc-добавление к P_1 в G. По лемме 2.1 $P \le K$ и $P \cap P_1 = 1$, что возможно только при $|P| = p$. Противоречие. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 320 с.

2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer. – 1967.

3. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

4. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Passaic : Polygonal Publishen House, 1982.

5. Поляков, Л. Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л. Я. Поляков // Конечные группы : сб. – Минск : Наука и техника, 1966. – С. 75–88.

6. Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.

7. Ковалева, В. А. Конечные группы с заданными обобщенно максимальными подгруппами (обзор). I. Конечные группы с обобщеннонормальными *n*-максимальными подгруппами / В. А. Ковалева // ПФМТ. – 2016. – Т. 29, № 4. – С. 48–58.

8. Guo, W. Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, № 3–4. – P. 433–449.

9. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // SEAMS Bull. Math. – 2004. – Vol. 29, № 2. – P. 240–254.

10. Arroyo-Jorda, M. Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda // Journal of Algebra. – 2017. – Vol. 476. – P. 395–414.

11. On conditional permutability and factorized groups / M. Arroyo-Jorda [et al.] // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 2014. – Vol. 193. – P. 1123–1138.

12. Monakhov, V. S. On the supersoluble residual of a product of subnormal supersoluble subgroups / V. S. Monakhov, I. K. Chirik // Siberian Math. J. – 2017. – Vol. 58, № 2. – P. 271–280.

13. Doerk, K. Minimal nicht überauflösbare, endliche gruppen / K. Doerk // Math. Zeitschrift. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.10.2019

Trofimuk A. A., Lukyanenko V. O. **On the Supersolubility of a Group with Given Conditions of Permutability of Maximal Subgroups**

A subgroup A of a group G is called tcc-subgroup of G, if there is a subgroup T of G such that $G = AT$ and for any $X \le A$ and for any $Y \le T$ there exists an element $u \in \langle X, Y \rangle$ such that $XY^u \le G$. In present paper the supersolubility of a group G is obtained in each of the following cases: all maximal subgroups of G are tcc-subgroups in G; all 2-maximal subgroups of G are tcc-subgroups in G.

УДК 513.82

***А. А. Юдов*[1], *Е. В. Кисилюк*[2]**
[1]*канд. физ.-мат. наук, доц.*
доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]*магистрант физико-математического факультета*
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: modelmath@brsu.brest.by

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОГО РИПЕРА ПОДМНОГООБРАЗИЯ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

Изучаются подмногообразия однородного пространства, описывается построение канонического рипера подмногообразия однородного пространства и строится вычислительный аппарат метода построения канонического рипера. Подмногообразие исследуется локально.

1. Построение инвариантного продолжения подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в алгебру Ли

Пусть G – группа Ли, H – ее замкнутая подгруппа Ли, $M = G/H$ – однородное G-пространство,

$$\pi : G \to G/H : a \to aH - \tag{1}$$

каноническая проекция.

Группа G действует в M с помощью левых сдвигов:

$$G \times M \to M : (a, bH) \to abH = a \cdot bH = T_a(bH). \tag{2}$$

Определение: *Подмногообразием* размерности *n* однородного пространства M будем называть пару (D_0, f), где D_0 – окрестность нуля евклидова пространства R_n, f – аналитическое вложение D_0 в M.

Таким образом, подмногообразия однородного пространства изучаются локально. Теория построения канонического репера подмногообразия подробно описана в работе [4]. Ниже излагаются идеи работы [4] и строится канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в алгебру Ли.

Предположим, что $f(0) = \pi(e)$. В противном случае, если $f(0) = \pi(a) \neq \pi(e)$, от подмногообразия (D_0, f) перейдем к ему эквивалентному $(D_0, T_{a^{-1}} \circ f)$. Пусть $\dim G = r$, $\dim H = s$, тогда $\dim M = r - s = m$.

Рассмотрим пространство Γ_1 всех касательных к M *n*-мерных подпространств. Действие группы G на M продолжается в действии на Γ_1, на котором группа G будет действовать с помощью дифференциалов левых сдвигов пространства M:

$$G \times \Gamma_1 \to \Gamma_1 : (a, K) \to dT_a(K) = a \circ K. \tag{3}$$

При этом Γ_1 становится G-пространством, но необязательно однородным. Наряду с G-пространством Γ_1 будем рассматривать его подмножество Q_1, состоящее из *n*-мерных подпространств, касательных к M в точке $\pi(e)$. Q_1 будет H-пространством, тоже необязательно однородным. Между H-орбитами множества Q_1 и G-орбитами множества Γ_1 существует естественное взаимно-однозначное соответствие. Далее будем рассматривать G-орбиты пространства Γ_1. Каждой такой орбите будет сопоставляться класс *n*-мерных подмногообразий пространства M, такой, что все касательные подпространства подмногообразия этого класса попадут в данную орбиту (по крайней мере, в некоторой окрестности). Предположим, что подмногообразие (D_0, f) принадлежит классу с орбитой $O(K_1)=\{a\circ K_1 \mid a\in G\}$, где $K_1 = T_{f(0)}(\operatorname{Im} f)$, $\operatorname{Im} f = f(D_0)$. Пусть H_1 – группа стационарности элемента K_1:

$$H_1 = \{a\in G \mid a\circ K_1 = K_1\}.$$

Приведем основные факты теории вычислительного аппарата метода построения канонического репера.

Рассмотрим множество Q_1 всех n-мерных подпространств, касательных к M в точке $\pi(e)$. Наряду с множеством Q_1 рассмотрим множество

$$Z_1 = \{d\pi_e^{-1}(K) \mid K\in Q_1\}.$$

Множество Q_1 является H-пространством. Множество Z_1 также является H-пространством, причем действие группы H в Z_1 индуцируется присоединенным представлением Ad. H-пространства Q_1 и Z_1 изоморфны. Отсюда, в частности, следует, что

$$H_1 = \{a\in H \mid Ada({K'}_1) = {K'}_1\}, \tag{4}$$

где ${K'}_1 = d\pi_e{}^{-1}(K_1)$.

Пусть $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r\}$ – базис пространства $\overline{G}^*$ дуального к алгебре Ли $\overline{G}$ группы Ли G, $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^t\}$ – базис пространства ${K'_1}^*$, дуального к K'_1, $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^5\}$ – базис пространства $\overline{H}^*$, дуального к $\overline{H}$. При этом $t = s+n$. Тогда система Пфаффа, определяющая пространство K'_1, будет иметь вид:

$$\omega^{t+1}=0,\ \omega^{t+2}=0, \dots,\ \omega^r = 0. \tag{5}$$

Найдем внешние дифференциалы форм системы (5):

$$d\omega^{t+1}=0,\ d\omega^{t+2}=0, \dots,\ d\omega^r = 0. \tag{6}$$

Введем индексы суммирования: $i, j = 1,2,..,r$; $\sigma,\tau = s+1, s+2,\dots,r$; $\varepsilon,\mu = t+1, t+2,\dots,r$; $a,b,c = 1,2,\dots,s_1$; $\alpha,\beta,\gamma = 1,2,\dots,t$; $p,q,l = s_1+1, s_1+2,\dots,s$; $\rho,\delta = s+1, s+2,\dots,t$.

Разложим внешние дифференциалы (6) по базису:

$$d\omega^{t+1} = \Lambda_{ij}^{t+1}\omega^i\wedge\omega^j, \dots, \Lambda_{ij}^{r}\omega^i\wedge\omega^j. \tag{7}$$

Предположим, что подмногообразие (D_0, f) продолжается в пространство $M = G/H$ и $f_1 : D_0 \to M_1$ – соответствующее продолжение, $K_1 = T_{f(0)}(\operatorname{Im} f)$, $K'_1 = d\pi_e^{-1}(K_1)$, $K_2 = T_{f_1(0)}(\operatorname{Im} f_1)$, $K'_2 = d\pi_{1|e}^{-1}(K_2)$.

Лемма 1 [4]. В формулах (7) равны нулю коэффициенты $\Lambda_{\alpha\alpha}^{t+1} \dots \Lambda_{\alpha\alpha}^{r}$; $\Lambda_{p,q}^{t+1}, \dots, \Lambda_{p,q}^{r}$.

Следствие 1. Система форм

$$\begin{cases} \omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0; \\ d\omega^{t+1} = 0, \dots, d\omega^r = 0 \end{cases} \tag{8}$$

эквивалентна системе

$$\omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0; \text{ (а)}$$
$$\omega^p \wedge {\theta^{t+1}}_p = 0, \dots, \omega^p\wedge\theta_p^r = 0. \quad \text{(б)} \tag{9}$$

Пусть H_1 – алгебра Ли группы H_1, тогда

$$H_1 = \{\nu \in H \mid [\nu, K_1'] \subset K_1'\}. \tag{10}$$

Пусть $K_1' = H \oplus N$, $K_2' = H \oplus N$.

Теорема 1.1. [4]. Если выполняется условие

$$[N, N] \subset K_1', \tag{11}$$

то внешние дифференциалы $d\omega^{t+1} = 0, \ldots, d\omega^r = 0$ обращаются в нуль в пространстве K_2'.

Заметим, что условие (11) всегда выполняется для одномерного подмногообразия (D_0, f), а также для подмногообразий любой размерности в случае, когда группа Ли G является полупрямым произведением группы стационарности точки пространства M и абелевой группы, в частности для всех евклидовых и псевдоевклидовых пространств.

Используя лемму Картана, систему (9, б) на пространстве K_2' можно переписать в виде [4]: $\Theta_\rho^{t+1} = \mathrm{A}_{\rho\delta}^{t+1}\widetilde{\omega}^\delta, \ldots, \Theta_\rho^r = \mathrm{A}_{\rho\delta}^r \widetilde{\omega}^\delta$, $\mathrm{A}_{\rho\delta}^\varepsilon = \mathrm{A}_{\delta\rho}^\varepsilon, \varepsilon = t+1, \ \ldots, r$ ($\widetilde{\omega}^\delta$ – ограничение формы ω^δ на пространство K_2'), а систему (9) в виде:

$$\omega^{t+1} = 0, \ldots, \omega^r = 0;$$

$$\Omega_\rho^{t+1} \equiv \Theta_\rho^{t+1} - \mathrm{A}_{\rho\delta}^{t+1}\widetilde{\omega}^\delta = 0, \ldots, \Omega_\rho^r \equiv \Theta_\rho^r - \mathrm{A}_{\rho\delta}^r\widetilde{\omega}^\delta = 0. \tag{12}$$

Теорема 1.2. [4]. Система 1-форм

$$\omega^{t+1} = 0, \ldots, \omega^r = 0, \ \Omega_\rho^{t+1} = 0, \ldots, \Omega_\rho^r = 0 \tag{13}$$

есть система форм Пфаффа, определяющая подпространство K'_2.

Теорема 1.3. Система форм

$$\Omega_\rho^{t+1} = 0, \ldots, \Omega_\rho^r = 0, \ p = s+1, \ldots, t, \tag{14}$$

рассматриваемая как алгебраическая система относительно форм $\omega^{s_1+1} = 0, \ldots, \omega^s = 0$, разрешима относительно этих форм. При этом получается выражение форм $\omega^{s_1+1}, \ldots, \omega^s$ через формы $\omega^{s_1+1}, \ldots, \omega^t$.

Разрешив систему (14) относительно форм $\omega^{s_1+1} = 0, \ldots, \omega^s = 0$, найдем

$$\omega^{s_1+1} = \lambda_\rho^{s_1+1}\omega^\rho, \ldots, \omega^s = \lambda_\rho^s \omega^\rho. \tag{15}$$

Система (15) эквивалентна системе (14). Тогда систему (13) можно переписать в виде:

$$\omega^{t+1} = 0, \ldots, \omega^r = 0, \ \omega^{s_1+1} - \lambda_\rho^{s_1+1}\omega^\rho = 0, \ldots, \omega^s - \lambda_\rho^s\omega^\rho = 0. \tag{16}$$

Коэффициенты $\lambda_\rho^{s_1+1}, \ldots, \lambda_\rho^s$, $\rho = s+1, \ldots, t$ называются *дифференциальными инвариантами подмногообразия* (D_0, f), *полученными при первом продолжении.* Может быть, среди полученных дифференциальных инвариантов есть зависимость. Чтобы получить независимые инварианты первого продолжения, надо подействовать на подмногообразие (D_0, f) преобразованием h_1 группы H_1. При этом подмногообразие (D_0, f) перейдет в $(D_0, h_1 \circ f)$, а подпространство K_1 (а следовательно, и K_1') не изменится, а подпространство K_2 и, соответственно, K_2' изменится. При этом надо так подобрать элемент h_1, чтобы K_2' привелось к возможно более простому виду. В соответствии с этим и система (13), определяющая K_2', приведется к более простому виду и оставшиеся коэффициенты будут независимыми дифференциальными инвариантами первого продолжения.