$$\lim_{\alpha\to 2-0}\frac{p^{(2-\alpha)m+\alpha-3}}{p^{(\alpha-1)n}}=\lim_{\alpha\to 2-0}\frac{p^{-1}}{p^{n}}=\frac{1}{p^{n+1}}.$$

Отсюда видно, что пределы слева и справа в точке $\alpha=2$ совпадают и равняются значению функции ошибки в той же самой точке $\alpha=2$ (теорема 3 соотношение 2), т. е.

$$\max_{x\in\mathbb{Z}_p}|I_{B[a,p^{-m}]}(x)-L_{n,m}(x,2)|_p=\frac{1}{p^{(n+1)}},\ где\ \alpha=2.$$

Это эквивалентно утверждению 3 теоремы.

Покажем, что при $\alpha=1$ выражение

$$\left|I_{B[a,p^{-m}]}(x)-L_{n,m}(x,1)\right|_p$$

не стремится к нулю. Для этого достаточно привести хотя бы один контрпример. Пусть $m=0$. Тогда

$$\lambda_j=\sum_{k=0}^{n}b_k p^k=\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}a_i p^i}\ \text{для всех}\ j=1,\ldots,p^n$$

и с учетом формул (3) и (4) справедлива оценка

$$\left|\sum_{i=0}^{n}a_i p^i\right|_p=\left|p^{n-1}(n(p-1)-1)\right|_p\le p^{-n+1}\left|n(p-1)-1\right|_p\le p^{-n+1},$$

из которой следует соотношение:

$$\left|\lambda_j\right|_p\ge p^{n-1}. \tag{33}$$

Используя (33) в правой части формулы (9), получим:

$$\max_{k=1,\ldots p^n}\left|\lambda_k\right|_p\cdot\frac{1}{p^n}\ge\frac{p^{n-1}}{p^n}=\frac{1}{p}. \tag{34}$$

Это эквивалентно утверждению 4 теоремы.

Пусть $0<\alpha<1$. В этом случае значение p-адического модуля для коэффициентов из формул (3) и (4) будет равно:

$$|a_i|_p=p^{-\alpha(n+m-i-1)},\quad i=0,1,\ldots,n+m-1,\quad |a_{n+m}|_p=1. \tag{35}$$

Вычислим p-адический модуль от слагаемых в (14), используя формулы (35).

Тогда $|a_i p^i|_p=p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)i}$, $i=0,1,\ldots,n+m-1$, и т. к. $|a_0|_p>|a_1 p|_p>\ldots>|a_{n+m-1}p^{n+m-1}|_p$, то

$$\left|\sum_{i=0}^{n}a_i p^i\right|_p=\left|a_0\right|_p=p^{-\alpha(n+m-1)}, \tag{36}$$

откуда

$$\left|\frac{1}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}\right|_p = p^{\alpha(n+m-1)} = p^{\alpha n+\alpha(m-1)}. \tag{37}$$

Чтобы найти p-адические модули коэффициентов $|b_k|_p$, вычислим p-адические модули следующих выражений для случая, когда $0<\alpha<1$:

$$\left|\sum_{i=0}^{k} a_i p^i\right|_p = |a_0|_p = p^{-\alpha(n+m-1)},\ k=0,1,\ldots n+m-1.$$

В итоге значение p-адического модуля для $|b_k|_p$ примет вид:

$$|b_k|_p = \left|\frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{k} a_i p^i}\right|_p = p^{\alpha(n+m+k-1)},\ \textit{где}\quad k=n+1,\ldots,n+m-1. \tag{38}$$

Далее вычислим $|b_{n+m}|_p$, для чего нужно вычислить суммы

$$\left|\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i\right|_p = |a_0|_p = p^{-\alpha(n+m-1)}.$$

$$\left|\sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i\right|_p = \left|\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i + a_{n+m} p^{n+m}\right|_p = \max\left\{p^{-\alpha(n+m-1)}, |a_{n+m} p^{n+m}|_p\right\} =$$
$$= \max\left\{p^{-\alpha(n+m-1)}, p^{-n-m}\right\} = p^{-\alpha(n+m-1)}.$$

В результате получим:

$$|b_{n+m}|_p = \left|\frac{-1}{\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i}\right|_p = p^{2\alpha(n+m-1)}. \tag{39}$$

Если $0<\alpha<1$, то $|b_{n+1}|_p < |b_{n+2}|_p < \ldots < |b_{n+m-1}|_p = |b_{n+m}|_p$. Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m}\right|_p \le \max\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k\right|_p, |b_{n+m}|_p\right\} =$$
$$= \max\left\{p^{2\alpha(n+m-1)}, p^{2\alpha(n+m-1)}\right\} = p^{2\alpha(n+m-1)} = |b_{n+m-1}|_p.$$

Отсюда

$$\left|p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p \le p^{-n}\cdot|b_{n+m-1}|_p = p^{-n}\cdot p^{2\alpha(n+m-1)} = p^{(2\alpha-1)n+2\alpha(m-1)}. \tag{40}$$

Поскольку p-адический модуль (37) больше p-адического модуля (40) для достаточно больших n $\left(n>\frac{\alpha(m-1)}{1-\alpha}\right)$, то

$$\max_{k=1,\ldots p^{n+m}} |\lambda_k|_p = p^{\alpha(n+m-1)}. \tag{41}$$

Подставляя (41) в (9), имеем:

$$\max_{x\in\mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha) \right|_p = p^{\alpha(n+m-1)} \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}} = \frac{1}{p^{\alpha}}, \tag{42}$$

что эквивалентно утверждению 5 теоремы.

Согласно теореме 1, любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить локально постоянной функцией. Исследуемые непрерывные функции рассматриваются на множестве целых p-адических чисел. Но поскольку известно, что $\mathbb{Z}_p$ является компактом, то локально постоянная функция есть конечная линейная комбинация характеристических функций шаров. Следовательно, данную функцию можно равномерно приблизить конечной линейной комбинацией характеристических функций шаров, т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]} \rightrightarrows f(x), \quad \max_{k=1,\ldots,N} m_k \to \infty, \; \mu_k = f(a_k) \in \mathbb{K}.$$

На основании теоремы 1 и данных рассуждений покажем справедливость следующей теоремы о равномерной сходимости p-адического сплайна к непрерывной $\mathbb{Q}_p$-значной функции, заданной на $\mathbb{Z}_p$, если параметр $\alpha > 1$ и $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Теорема 3. *Для любой функции* $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ *существует последовательность* $L_{n,m}(x,\alpha)$, *где* $\alpha > 1$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in Q_p} \left| L_{n,m}(x,\alpha) - f(x) \right|_p = 0. \tag{43}$$

Доказательство. Т. к. функцию $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ можно равномерно приблизить линейной комбинацией характеристических функций шаров, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $N \ge N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\max_{x\in\mathbb{Z}_p} \left| \sum_{k=1}^{N} \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - f(x) \right|_p < \varepsilon, \text{ для всех } x \in \mathbb{Z}_p. \tag{44}$$

Запишем сильное неравенство треугольника для $|\cdot|_p$:

$$\begin{aligned} &\left| L_N(x,\alpha) - f(x) \right|_p = \\ &= \left| L_N(x,\alpha) - \sum_{k=1}^{N} \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) + \sum_{k=1}^{N} \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - f(x) \right|_p \le \\ &\le \max\left\{ \left| L_N(x,\alpha) - \sum_{k=1}^{N} \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) \right|_p, \left| \sum_{k=1}^{N} \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - f(x) \right|_p \right\}, \end{aligned} \tag{45}$$

где

$$L_N(x,\alpha) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k L_{n_k, m_k}(x,\alpha).$$

Т. к. по теореме 3 p-адический сплайн равномерно приближает характеристическую функцию шара, то справедливы следующие оценки:

существует такой номер ν_1, что для любого $n_1 > \nu_1$

$$\left| I_{B[a_1, p^{-m_1}]}(x) - L_{n_1, m_1}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1,\ldots,N} |\mu_1|_p},$$

существует такой номер ν_2, что для любого $n_2 > \nu_2$

$$\left| I_{B[a_2, p^{-m_2}]}(x) - L_{n_2, m_2}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1,\ldots,N} |\mu_2|_p},$$

$$\ldots$$

существует такой номер ν_k, что для любого $n_k > \nu_k$

$$\left| I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1,\ldots,N} |\mu_k|_p},$$

$$\ldots$$

существует такой номер ν_N, что для любого $n_N > \nu_N$

$$\left| I_{B[a_N, p^{-m_N}]}(x) - L_{n_N, m_N}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1,\ldots,N} |\mu_N|_p},$$

для $k = 1, \ldots, N$. Т. к. этих номеров конечное число, то выберем из них максимальный такой, что

$$\nu = \max\left\{N_\varepsilon, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N\right\}.$$

Тогда для любого $n_k > \nu$ будем иметь

$$\left| I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1,\ldots,N} |\mu_k|_p}.$$

Поэтому

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - \sum_{k=1}^{N} \mu_k L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{N} \mu_k \left(I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right) \right|_p \le$$

$$\le \max_{1,\ldots,N} |\mu_k|_p \cdot \left| I_{B[a_k, p^{-m_k}]} - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p \le \varepsilon. \qquad (46)$$

Т. к. первый член неравенства (45) меньше ε согласно неравенству (44), а второй меньше ε согласно выражению (46), то данное неравенство примет вид

$$\left| L_N(x,\alpha) - f(x) \right|_p \le \varepsilon,$$

что эквивалентно выражению (42).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schikhof, W. Ultrametric calculus / W. Schikhof. – Cambridge : University Press, 1984.
2. *P*-адический анализ и математическая физика / В. С. Владимиров [и др.]. – М. : Наука, 2001. – 352 с.
3. Радына, А. Я. Элементарныя ўводзіны ў *p*-адычны аналіз : дапаможнік / А. Я. Радына, Я. В. Радына. – Мінск : БДПУ, 2006. – 82 с.
4. Khrennikov, A. p-Adic interpolation and approximation of a continuous function by linear combi-nations of shifts of p-adic valuations / A. Khrennikov, A. Radyna // Journal of Approximation Theory. – 2003. – № 120. – P. 124–135.
5. Радына, А. Я. Інтэрпаляцыя и набліжэнне р-адычнымі лінейнымі сплайнамі функцыі класа $C(Z_p;R)$ / А. Я. Радына // Вес. НАН Беларусі. – 2004. – № 2. – С. 21–24.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 30.09.2019

Sender A. N. **P-adic Splines for Approximation of Local Constant Functions from** $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$

The article is devoted to approximation of continuous p-adic function of p-adic argument by p-adic splines that is functions of the form $L_{n,m}(x,\alpha) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \frac{\lambda_k}{|x-k|_p^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ *where their parameters are defined from interpolation relations by a function to be approximated. The theorem about uniform approximation of a continuous function by such splines is proved for different* $\alpha \in \mathbb{Q}$.

УДК 512.542

А. А. Трофимук[1], В. О. Лукьяненко[2]
[1]канд. физ.-мат. наук,
доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Информатика»
Гомельского государственного технического университета имени П. В. Сухого
e-mail:[1]alexander.trofimuk@gmail.com

О СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Подгруппа A группы G называется tcc-подгруппой в G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и для любых $X \le A$ и $Y \le T$ существует элемент $u \in \langle X, Y\rangle$ такой, что $XY^u \le G$. Устанавливается сверхразрешимость группы G в каждом из следующих случаев: все максимальные подгруппы являются tcc-подгруппами в G; все 2-максимальные подгруппы являются tcc-подгруппами в G.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1; 2].

Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой, если в G найдется такая максимальная подгруппа M, в которой H является максимальной подгруппой.

Запись $H \le G$ означает, что H – подгруппа группы G. Подгруппы A и B груп-пы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Заметим, что равенство $AB = BA$ равносильно тому, что $AB \le G$.

Исследования, связанные с изучением максимальных подгрупп, относятся к одному из самых перспективных направлений в теории групп. Это связано прежде всего с тем, что многие известные классы групп допускают описания на основе свойств максимальных подгрупп. Отметим, например, что группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы нормальны; сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы всех ее максимальных подгрупп являются простыми числами (Б. Хупперт [2]).

По мере развития теории максимальных подгрупп многими авторами предпринимались также попытки изучения и применения 2-максимальных подгрупп. При этом как и для максимальных подгрупп, рассматривались группы с различными ограничениями на способ вложения обобщенно максимальных подгрупп в эти группы. Пожалуй, наиболее ранний результат, относящийся к этому направлению, был получен Б. Хуппертом [3], установившим сверхразрешимость группы, в которой все 2-максимальные подгруппы нормальны. Сверхразрешимость разрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами, была установлена Агравалем [4, теорема 6.5], а в работе [5] Л. Я. Поляков доказал, что группа сверхразрешима, если любая ее 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами этой группы. Подгруппа H из G называется *квазинормальной* в G, если H перестановочна со всеми подгруппами из G. Группы, все 2-максимальные подгруппы которых являются квазинормальными, были рассмотрены в работе А. Манна [6]. Очевидно, что если все максимальные подгруппы квазинормальны, то группа сверхразрешима, т. к. из квазинормальности подгруппы следует ее субнормальность. В [6] также было установлено, что ранг разрешимой группы G не превышает 1 при условии, что каждая ее 2-максимальная подгруппа является квазинормальной в G. Легко увидеть, что в этом случае группа G также сверхразрешима. Подробный обзор результатов, связанных с перестановочностью максимальных подгрупп и их обобщений, представлен в [7].

Одной из фундаментальных работ последнего десятилетия, посвященных перестановочности обобщенно максимальных подгрупп, является работа [8], в которой В. Го, К. Шум и А. Н. Скиба ввели понятие *tcc-перестановочной* подгруппы: подгруппа A группы G называются *tcc-перестановочной*, если для произвольной подгруппы B группы G и любых $X \le A$ и $Y \le B$ существует элемент $u \in \langle X, Y\rangle$ такой, что $XY^u \le G$. Из работы [9] вытекает сверхразрешимость *группы* G*, у которой все максимальные (2-максимальные) подгруппы tcc-перестановочны.*

Введем следующее

Определение 1. *Подгруппа* A *группы* G *называется tcc-подгруппой в* G*, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) *в* G *существует подгруппа* T *такая, что* $G = AT$*;*

2) *для любых* $X \le A$ *и* $Y \le T$ *существует элемент* $u \in \langle X, Y\rangle$ *такой, что* $XY^u \le G$.

Подгруппу T в дальнейшем будем называть *tcc-добавлением* к подгруппе A в группе G.

Следующая теорема развивает результаты работы [9].

Теорема 3.1. *1. Если в группе* G *все максимальные подгруппы являются tcc-подгруппами, то* G *сверхразрешима.*

2\. *Если в группе* G *все 2-максимальные подгруппы являются tcc-подгруппами, то* G *сверхразрешима.*

1. Вспомогательные результаты

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах.

Если $H \le G$ и $H \ne G$, то пишем $H < G$. Через G', $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p- и p'-подгруппы соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G. Элементарная абелева группа порядка p^t и циклическая группа порядка m обозначаются E_{p^t} и Z_m соответственно, а $[A]B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

Пусть G – группа и

$$|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}, p_1 > p_2 > \ldots > p_k, \ a_i \in \mathbb{N}.$$

Пусть G_{p_i} – силовская p_i-подгруппа группы G.

Говорят, что группа G обладает силовской башней сверхразрешимого типа, если существует цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \le G_1 \le G_2 \le \ldots \le G_{k-1} \le G_k = G$$