

Т. к. $x \in B[x_v, p^{-n-m}]$ и поскольку в $\mathbb{Q}_p$ шары либо не пересекаются, либо шар с меньшим радиусом содержится в шаре с большим радиусом, то либо

$$B[x_v, p^{-n-m}] \cap B[a, p^{-m}] = \emptyset,$$

и тогда

$$I_{B[a, p^{-m}]}(x) = I_{B[a, p^{-m}]}(x_v) = 0,$$

либо

$$B[x_v, p^{-n-m}] \subset B[a, p^{-m}],$$

и тогда

$$I_{B[a, p^{-m}]}(x) = I_{B[a, p^{-m}]}(x_v) = 1.$$

В обоих случаях имеем

$$I_{B[a, p^{-m}]}(x) = I_{B[a, p^{-m}]}(x_v).$$

Отсюда, учитывая (10) и (11), получим равенство:

$$\left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = |\lambda_v|_p \frac{1}{\left| |x - x_v|_p \right|_p^\alpha}, \quad x \in \mathbb{Z}_p. \quad (12)$$

Возьмем максимум от обеих частей, при этом получим:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = |\lambda_v|_p \frac{1}{\left| |x^* - x_v|_p \right|_p^\alpha}, \quad x^* \in B[x_v, p^{-m-n}],$$

где x^* – точка, в которой достигается максимум правой части равенства (12), согласно лемме 1 о непрерывности функции $\varphi_\alpha(x)$ в $\mathbb{Z}_p$. Чтобы значение правой части (12) было максимальным, необходимо и достаточно, чтобы $x^* \in S[x_v, p^{-m-n}]$ и было максимальным число $|\lambda_v|_p$. Удовлетворив этим требованиям, получим утверждение леммы.

Используя результаты леммы 2, получаем теорему о равномерном приближении характеристической функции шара с помощью p -адического сплайна.

Теорема 3. Пусть $\alpha \in \mathbb{Q}$. Тогда справедливы соотношения:

$$1) \max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = \frac{1}{p^{(\alpha-1)(n+1)}} \text{ для } \alpha > 2.$$

$$2) \max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, 2) \right|_p = \frac{1}{p^{(n+1)}} \text{ для } \alpha = 2.$$

$$3) \max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = \frac{p^{(2-\alpha)m+\alpha-3}}{p^{(\alpha-1)n}} \text{ для } 1 < \alpha < 2.$$

$$4) \max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[0,1]}(x) - L_{n,m}(x, 1) \right|_p \geq \frac{1}{p} \text{ для } \alpha = 1.$$

$$5) \max_{x \in \mathbb{Z}_p} |I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha)|_p = \frac{1}{p^\alpha} \text{ для } 0 < \alpha < 1.$$

где сплайн $L_{n,m}(x, \alpha) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \frac{\lambda_k}{|x-k|_p^\alpha}$, $\alpha > 1, \alpha \in \mathbb{Q}$, $\lambda_k \in \{1, \dots, p^{n+m}\}$.

В $\mathbb{Q}_p$ норма $|p^\alpha|_p = p^{-\alpha}$ принимает дискретные значения, равные целой степени p . Но т. к. $\alpha \in \mathbb{Q}$, то в данном случае функция f будет принимать значения не из поля $\mathbb{Q}_p$, а из поля K , являющегося трансцендентным расширением поля $\mathbb{Q}_p$, содержащего $\mathbb{Q}_p$ и p^α .

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает из леммы 2. Надо лишь найти значение $\max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p$ и подставить его в выражение (9). Для вычисления максимума нужно воспользоваться формулами (5), (6) и утверждением 2.

Вначале докажем теорему для случая, когда $\alpha \geq 2$. Из формул (3), (4) следует, что

$$|a_k|_p = p^{-\alpha(n+m-k-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n+m-1, \quad |a_{n+m}|_p = 1. \quad (13)$$

Подставим в формулу (7) значения b_k , $k = 0, 1, \dots, n+m$, в соответствии с равенствами (6):

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \sum_{k=0}^n b_k p^k + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^n \frac{-a_k p^k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} + \\ &+ p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sum_{i=0}^k a_i p^i} - \frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i} \right) + \\ &+ p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} = \frac{1}{a_0} + \left(\frac{1}{\sum_{i=0}^1 a_i p^i} - \frac{1}{a_0} \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{\sum_{i=0}^2 a_i p^i} - \frac{1}{\sum_{i=0}^1 a_i p^i} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} - \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i} \right) + \\ &+ p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i}. \end{aligned}$$

В итоге выражение (7) примет вид

$$\lambda_i = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i}. \quad (14)$$

Вычислим p -адический модуль от слагаемых в (14), используя равенства (13). Тогда $|a_i p^i|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)i}$ и, используя утверждение 1, имеем

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i p^i \right|_p = \left| a_0 + \sum_{i=1}^n a_i p^i \right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)n}. \quad (15)$$

В результате первое слагаемое (14) примет вид:

$$\left| \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \right|_p = p^{\alpha(n+m-1)-(\alpha-1)n} = p^{\alpha(m-1)+n}. \quad (16)$$

Для того чтобы найти p -адический модуль $|b_k|_p$, вычислим p -адические модули выражений

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \right|_p &= \left| a_0 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i p^i \right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)(k-1)}, \\ \left| \sum_{i=0}^k a_i p^i \right|_p &= \left| a_0 + \sum_{i=1}^k a_i p^i \right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)k}. \end{aligned}$$

Тогда окончательный результат для $|b_k|_p$ будет следующим:

$$|b_k|_p = \left| \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} \right|_p = \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)k}}, \text{ где } k = n+1, \dots, n+m-1. \quad (17)$$

Теперь вычислим $|b_{n+m}|_p$. Для этого нужно вычислить p -адические модули

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p &= \left| a_0 + \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p = \max \left\{ \left| -p^{-\alpha(n+m-1)} \right|_p, \left| \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p \right\} = \\ &= \max \left\{ p^{-\alpha(n+m-1)}, \left| \sum_{i=1}^{n+m-1} p^{\alpha(n+m-1)} \cdot (p^\alpha - 1) \cdot p^{(1-\alpha)i} \right|_p \right\} = \\ &= \max \{ p^{-\alpha(n+m-1)}, p^{-n-m+1} \} = p^{-n-m+1}, \\ \left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i \right|_p &= \left| a_0 + \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i + a_{n+m} p^{n+m} \right|_p = \\ &= \max \left\{ \left| -p^{-\alpha(n+m-1)} \right|_p, \left| \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p, |a_{n+m} p^{n+m}|_p \right\} = \\ &= \max \{ p^{-\alpha(n+m-1)}, p^{-n-m+1}, p^{-n-m} \} = p^{-n-m+1}. \end{aligned}$$

В итоге получим:

$$|b_{n+m}|_p = \left| \frac{-1}{\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i} \right|_p = p^{-2(n+m-1)}. \quad (18)$$

Рассмотрим два случая. Если $\alpha > 2$, то $|b_{n+1}|_p$ больше всех остальных $|b_k|_p$, $k = n+2, \dots, n+m$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m} \right|_p = \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k \right|_p, |b_{n+m}|_p \right\} = \\ &= \max \left\{ \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)(n+1)}}, p^{-2(n+m-1)} \right\} = \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)(n+1)}} = |b_{n+1}|_p. \end{aligned}$$

Отсюда при $\alpha > 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{-n} \cdot |b_{n+1}|_p = p^{-n} \cdot \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)(n+1)}} = p^{\alpha(m-1)+n+1}. \quad (19)$$

Если $\alpha = 2$, то $|b_{n+1}|_p = |b_{n+2}|_p = \dots = |b_{n+m-1}|_p = p^{2m+2n-1} > |b_{n+m}|_p$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m} \right|_p \leq \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k \right|_p, |b_{n+m}|_p \right\} = \\ &= \max \left\{ p^{2(n+m)-1}, p^{-2(n+m-1)} \right\} = p^{2(n+m)-1} = |b_{n+1}|_p. \end{aligned}$$

При $\alpha = 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p \leq p^{-n} \cdot |b_{n+1}|_p = p^{-n} \cdot \frac{p^{2(n+m)-1}}{p^{(2-2)(n+1)}} = p^{2m+n-1}. \quad (20)$$

Очевидно, что значение модуля из формулы (19) и формулы (20) больше модуля из формулы (16). Поэтому модуль правой части равенства (14) для $\alpha > 2$ равен $p^{\alpha(m-1)+n+1}$, а для $\alpha = 2$ не превосходит p^{2m+n-1} . По доказанному видно, что для $\alpha > 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k \right|_p \leq \left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1}$$

для всех $N = 1, \dots, m$, а для $\alpha = 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k \right|_p \leq \left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{2m+n-1}$$

для всех $N = 1, \dots, m$. Отсюда вытекает равенство

$$\max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1}, \quad \text{где } \alpha > 2. \quad (21)$$

В силу (20) имеем неравенство

$$\max_{k=1,\dots,p^{n+m}} |\lambda_k|_p \leq p^{2m+n-1}, \quad \text{где } \alpha = 2. \quad (22)$$

Подставляя (21) в (9), для $\alpha > 2$ получим:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1} \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}} = \frac{1}{p^{(\alpha-1)(n+1)}}. \quad (23)$$

Это эквивалентно утверждению 1 теоремы.

Подставляя (22) в (9), для $\alpha = 2$ имеем:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p \leq p^{2m+n-1} \cdot \frac{1}{p^{2(n+m)}} = \frac{1}{p^{n+1}}. \quad (24)$$

Это эквивалентно утверждению 2 теоремы.

Теперь рассмотрим случай $1 < \alpha < 2$.

Значение p -адического модуля для коэффициентов из формул (3) и (4) будет равно:

$$|a_i|_p = p^{-\alpha(n+m-i-1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n+m-1, \quad |a_{n+m}|_p = 1. \quad (25)$$

Вычислим p -адический модуль от слагаемых в (14), используя формулы (25).

Получим: $|a_i p^i|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)i}$, $i = 0, 1, \dots, n+m-1$,

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i p^i \right|_p = |a_n p^n|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)n}, \quad (26)$$

$$\left| \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \right|_p = p^{\alpha(n+m-1)-(\alpha-1)n} = p^{\alpha(m-1)+n}. \quad (27)$$

Чтобы найти p -адические модули коэффициентов $|b_k|_p$, вычислим p -адические модули приведенных ниже сумм для случая, когда $1 < \alpha < 2$:

$$\left| \sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \right|_p = |a_{k-1} p^{k-1}|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)(k-1)},$$

$$\left| \sum_{i=0}^k a_i p^i \right|_p = |a_k p^k|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)k}.$$

Тогда значение p -адического модуля для $|b_k|_p$ для данного случая будет иметь вид:

$$|b_k|_p = \left| \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} \right|_p = \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)k}}, \quad \text{где } k = n+1, \dots, n+m-1. \quad (28)$$

Теперь вычислим $|b_{n+m}|_p$. Для этого нужно вычислить p -адические модули следующих сумм:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p &= \left| a_{n+m-1} p^{n+m-1} \right|_p = p^{-(n+m-1)}. \\
\left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i \right|_p &= \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i + a_{n+m} p^{n+m} \right|_p = \max \left\{ \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p, \left| a_{n+m} p^{n+m} \right|_p \right\} = \\
&= \max \{ p^{-(n+m-1)}, p^{-n-m} \} = p^{-(n+m-1)}.
\end{aligned}$$

В итоге получим значение p -адического модуля для b_{n+m} :

$$\left| b_{n+m} \right|_p = \left| \frac{-1}{\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i} \right|_p = p^{2(n+m-1)}. \quad (29)$$

Если $1 < \alpha < 2$, то $|b_{n+1}|_p$ больше всех остальных $|b_k|_p$, $k = n+2, \dots, n+m$. Тогда

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m} \right|_p = \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k \right|_p, |b_{n+m}|_p \right\} = \\
&= \max \{ p^{2(n+m)+\alpha-3}, p^{2(n+m-1)} \} = p^{2(n+m)+\alpha-3} = |b_{n+1}|_p.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{-n} \cdot |b_{n+m-1}|_p = p^{-n} \cdot p^{2(n+m)+\alpha-3} = p^{n+2m+\alpha-3}. \quad (30)$$

Очевидно, что p -адический модуль (30) больше p -адического модуля (27). Поэтому модуль правой части равенства (14) для $1 < \alpha < 2$ равен $p^{n+2m+\alpha-3}$. Из доказанного видно, что для $1 < \alpha < 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k \right|_p \leq \left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{n+2m+\alpha-3} \quad \text{для всех } N=1, \dots, m.$$

Тогда

$$\max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p = p^{n+2m+\alpha-3}. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (9), имеем:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = p^{n+2m+\alpha-3} \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}} = \frac{p^{(2-\alpha)m+\alpha-3}}{p^{(\alpha-1)n}}. \quad (32)$$

В каждом из условий 1–3 теоремы 3 справа стоит некоторая вещественнозначная функция ошибки, зависящая от параметра α . Найдем пределы слева и справа в точке $\alpha = 2$. Тогда из соотношений 1 и 3 теоремы 3 имеем:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2+0} \frac{1}{p^{(\alpha-1)(n+1)}} = \frac{1}{p^{n+1}},$$