УДК 517.9

А. Н. Сендер
канд. физ.-мат. наук, доц.,
зав. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: alexander_sender@tut.by

P-АДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ КАК АППАРАТ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЛОКАЛЬНО-ПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$

Рассматривается приближение непрерывных p-адических функций p-адического аргумента с помощью сплайнов, имеющих следующий вид: $L_{n,m}(x,\alpha) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \frac{\lambda_k}{|x-k|_p^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, *где их параметры определяются из интерполяционных отношений с помощью приближенной функции. Теорема о равномерной сходимости приближения непрерывной функции с помощью сплайнов доказывается для различных* $\alpha \in \mathbb{Q}$.

В теории чисел наряду с полем действительных чисел огромную роль играет поле p-адических чисел [1; 2], на котором возможно построение нетривиального анализа. А.М. Островский доказал, что на поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ имеются только два существенно разных нормирования: обычный модуль $|\cdot|$ и p-адическая норма $|\cdot|_p$.

Пусть p – простое число, $x \in \mathbb{Q}$. В поле $\mathbb{Q}$ введем норму по правилу

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\gamma(x)}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

где $\gamma(x)$ определяется из представления $x = p^{\gamma}\dfrac{m}{n}$, $m, n,$ $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Q}$ и числа m и n взаимно просты с p.

Норма $|x|_p$ обладает следующими свойствами:

1) $|x|_p \geq 0$, если $|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$;

3) $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

В случае когда $|x|_p \neq |y|_p$, мы имеем равенство $|x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$. Определенная таким образом норма $|x|_p$ называется *p-адической нормой*. Поле $\mathbb{Q}$, пополненное по p-адической норме, называется полем p-адических чисел. Поле $\mathbb{Q}$, пополненное по обычному модулю называется полем вещественных чисел.

Существует несколько реализаций p-адических чисел, одну из которых мы только что упомянули. Приведем другую их реализацию. P-адическим числом называется формальный степенной ряд вида $x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k$, где $0 \leq x_k \leq p-1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{Z}$ и $x_N \neq 0$. Множество таких чисел обозначается через $\mathbb{Q}_p$. Целой частью p-адического числа называется число вида $[x]_p = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k$, а дробной частью – число вида

$\{x\}_p = \sum_{k=N}^{-1} x_k p^k$. Множество чисел с нулевой дробной частью называется целыми p-адическим числами и обозначается через $\mathbb{Z}_p$.

Теперь, когда мы уже определили p-адические числа как формальные степенные ряды, то норму в $\mathbb{Q}_p$ можно переписать в виде:

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-N}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, формальные степенные ряды, являющиеся элементами $\mathbb{Q}_p$, сходятся по p-адической норме. Теперь приведем основные свойства $\mathbb{Q}_p$: все треугольники равнобедренные и остроугольные, т. е. если одна сторона треугольника меньше другой, то третья равна большей; каждый шар в $\mathbb{Q}_p$ является открыто-замкнутым; каждая точка шара является его центром; для двух шаров в $\mathbb{Q}_p$ возможны две ситуации: два шара либо не пересекаются, либо шар с меньшим радиусом содержится в шаре с большим радиусом; $\mathbb{Z}_p = \{x \in Q_p : |x|_p \leq 1\}$ – компактное открытое множество (обычно компакт замкнут).

Следует отметить, что $\mathbb{Q}_p$ и R являются полными и локально-компактными, но R – является связным, а $\mathbb{Q}_p$ – вполне несвязно. Из указанных свойств $\mathbb{Q}_p$ как ультраметрического пространства вытекает его полная несвязность.

Сформулируем теорему о равномерном приближении непрерывной функции локально-постоянной функцией.

Теорема 1 [3]. *Пусть $X \subset \mathbb{Z}_p$ и $f : X \to \mathbb{Q}_p$ – непрерывная функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая локально-постоянная функция g, что для любого $x \in X$ $|f(x) - g(x)|_p < \varepsilon$.*

Теорией аппроксимации в неархимедовом анализе (в частности, p-адическом) занимались многие математики, однако большинство работ по p-адической интерполяции и аппроксимации посвящены обобщению интерполяционных теорем Дьедонне и Малера либо являются частными случаями теоремы Стоуна – Вейерштрасса.

Одной из *задач* исследования является нахождение сплайна, который равномерно приближал бы функцию из пространства $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$. По теореме 1 любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить локально-постоянной функцией. Исследуемые непрерывные функции рассматриваются на $\mathbb{Z}_p$. Но т. к. $\mathbb{Z}_p$ является компактом, то локально-постоянная функция есть конечная линейная комбинация индикаторов шаров. Более того, индикатор является непрерывной функцией и конечные линейные комбинации индикаторов шаров плотны в $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$. Поэтому чтобы равномерно приблизить сплайнами произвольную непрерывную функцию, достаточно уметь приближать p-адическими сплайнами индикатор шара, лежащего в единичном шаре, т. е. в $\mathbb{Z}_p$.

Данная работа посвящена приближению непрерывной функции $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{K}$, где $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$, по норме $\| f \| = \max_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|_p$. $\mathbb{K}$ – трансцендентное расширение поля $\mathbb{Q}_p$, содержащее $\mathbb{Q}_p$ и p^{α}, т. е.

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p((p^{\alpha})) = \left\{ x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^{\alpha k}, x_k \in \mathbb{Q}_p \right\} =$$

$$= \left\{ x = \sum_{k=N}^{\infty} \left(\sum_{j=n_k}^{\infty} x_{k,j} p^j \right) p^{\alpha k}, x_{k,j} \in \{0,1,\ldots,p-1\} \right\} =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{(k,j)\in Q(x)\subset \mathbb{Z}^2/\sim} x_{k,j} p^{j+\alpha k}, & \textit{если } \alpha - \text{рациональный}, \\ \sum\limits_{(k,j)\in Q(x)\subset \mathbb{Z}^2} x_{k,j} p^{j+\alpha k}, & \textit{если } \alpha - \text{иррациональный}, \end{cases}$$

где $Q(x)$ – множество индексов, по которым идет суммирование. По теоремам о существовании и единственности продолжения неархимедовой нормы норма $|p^{\alpha}|_p = p^{-\alpha}$, заданная на $\mathbb{Q}_p$, продолжается на все поле $\mathbb{K}$.

Приближение будет осуществляться линейными комбинациями сдвигов функции $\frac{1}{|x|_p^{\alpha}}$ методом интерполяции: значение аппроксиманта должно совпадать со значениями функции на дискретном множестве (чаще всего на конечном). Эти соотношения интерполяции всегда приводят к системе линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей. В качестве аппроксиманта будем брать функцию

$$\varphi_{\alpha}(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^{\alpha}}, & r > 0, \\ 0, & r = 0, \end{cases}$$

где α – положительное рациональное число. В итоге аппроксимант будет иметь вид:

$$L_{n,m}(x,\alpha) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \lambda_k \varphi_{\alpha}(|x - x_k|_p), \tag{1}$$

где x_k – узлы интерполяции (в нашем случае числа $\{0, 1, 2, \ldots, p^{n+m} - 1\}$, занумерованные в лексикографическом порядке), а коэффициенты λ_k находятся из системы линейных уравнений (соотношений интерполяции):

$$\sum_{k=1}^{p^{n+m}} \lambda_k \varphi_{\alpha}(|x_i - x_k|_p) = f(x_i), \; i = 1,\ldots, p^{n+m}. \tag{2}$$

Аппроксимант вида (1) называется p-адическим сплайном.

Следующая лемма является вспомогательной при доказательстве утверждения леммы 2.

Лемма 1. *Функция* $\varphi_{\alpha}(x) = |x|_p^{-\alpha}$ *является непрерывной в* $\mathbb{Z}_p$.

Доказательство. Т. к. функция $\varphi_{\alpha}|_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}}$ – локально-постоянная, то она непрерывна. Проверим непрерывность функции φ_{α} в точке нуль. Для этого нужно показать, что $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_{\alpha}(x) = 0$. Бесконечно малая величина x представляется в виде

$$x = ap^{l(n)},$$

где

$$|a|_p = 1 \text{ и } l(n) \to +\infty \text{ при } n \to +\infty.$$

Тогда

$$\left|\varphi_\alpha(x)\right|_p = \left|\left|ap^{l(n)}\right|_p^{-\alpha}\right|_p = p^{-\alpha l(n)}.$$

Если $x \to 0$, то $l(n) \to +\infty$ и $\left|\varphi_\alpha(x)\right|_p \to 0$. Поэтому $\varphi_\alpha \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$, что и требовалось доказать.

В данной статье исследуется расстояние в пространстве $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ между характеристической функцией шара $B[a, p^{-m}]$ (m – фиксированное неотрицательное целое число) и соответствующим p-адическим сплайном в зависимости от параметра α. Показано, что при $0 < \alpha \le 1$ расстояние неуменьшаемо, а при $\alpha > 1$ расстояние вычисляется точно либо оценивается сверху величиной, стремящейся к нулю, когда n стремится к бесконечности.

Мы будем рассматривать случай, когда $f = I_{B[a,p^{-m}]}$, где $I_{B[a,p^{-m}]}$ – характеристическая функция шара $B[a, p^{-m}]$. Такой выбор функции f не ограничивает общности, поскольку $I_{B[a,p^{-m}]} \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ и конечные линейные комбинации характеристических функций шаров плотны в $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$. Задача интерполирования состоит в том, чтобы найти коэффициенты λ_k для функции вида (1) из равенства (2).

Формула (2) – это система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов λ_i, $i = 1, 2, \ldots, p^{n+m}$, причем элементы матрицы этой системы равны

$$A_{ij} = \varphi_\alpha(|x_i - x_j|_p), i, j = 1, \ldots, p^{n+m}.$$

Матрица A имеет вид

$$A = \sum_{k=1}^{n+m} (I_k - I_{k-1}) p^{\alpha(n+m-k)},$$

где $I_k = \left(\delta_{\left[\frac{i-1}{p^k}\right], \left[\frac{j-1}{p^k}\right]}\right)_{i,j=1}^{p^{n+m}}$, $k = 0, 1, \ldots, n+m$ – блочно-диагональная матрица размерности $p^{n+m} \times p^{n+m}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$ (подробнее в [4; 5]).

Более наглядно матрицу I_k можно изобразить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

Матрица A для случая, когда $p = 3$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3^\alpha & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 0 & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 3^\alpha & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3^\alpha & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 0 & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 3^\alpha & 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 3^\alpha & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 0 & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 3^\alpha & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

Преобразуем матрицу к виду $A = \sum_{k=0}^{n+m} a_k I_k$. Тогда имеем следующую цепочку равенств:

$$A = \sum_{k=1}^{n+m} (I_k - I_{k-1}) p^{\alpha(n+m-k)} = (I_1 - I_0) p^{\alpha(n+m-1)} + (I_2 - I_1) p^{\alpha(n+m-2)} + \dots +$$
$$+(I_{n+m} - I_{n+m-1}) p^{\alpha(n+m-n-m)} = -I_0 p^{\alpha(n+m-1)} +$$
$$+I_1 p^{\alpha(n+m-2)} (p^\alpha - 1) + \dots + I_k p^{\alpha(n+m-k+1)} (p^\alpha - 1) + \dots + I_n p^{\alpha(n+m-n-m)},$$

откуда получим значения коэффициентов:

$$a_0 = -p^{\alpha(n+m-1)}, \quad a_k = p^{\alpha(n+m-k-1)} (p^\alpha - 1), \quad k = 1, \dots, n+m-1, \tag{3}$$

$$a_{n+m} = 1. \tag{4}$$

Тогда для матрицы A (см. [2]) существует обратная матрица

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{n+m} b_k I_k, \tag{5}$$

где

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_k = -\frac{a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{k} a_i p^i}, \quad k = 1,\ldots,n+m. \tag{6}$$

Справедлива следующая теорема о вычислении коэффицентов λ_k для сплайна вида (1).

Теорема 2. *Задача* (2) *имеет единственное решение для любой правой части, а для* $f = I_{B[a,p^{-m}]}$ *коэффициенты* λ_i *вычисляются по следующим формулам:*

$$\lambda_i = \sum_{k=0}^{n} b_k p^k + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k, \quad 1 \le i \le p^{n+m} : x_i \in B[a, p^{-m}], \tag{7}$$

$$\lambda_i = p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k, \quad 1 \le i \le p^{n+m} : x_i \in S[a, p^{-m+N}], где\ N = 1,\ldots,m. \tag{8}$$

Для доказательства теоремы о приближении функции из пространства $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ p-адическим сплайном вида (1) нам потребуется следующее утверждение, являющееся обобщением утверждения: *если* $|x|_p > |y|_p$, *то* $|x+y|_p = |x|_p$, которое доказывается методом математической индукции [3].

Утверждение 1. *Если* $|x_1|_p > \ldots > |x_n|_p$, *то* $|x_1 + \ldots + x_n|_p = |x_1|_p$.

Чтобы доказать равномерную сходимость данного p-адического сплайна к характеристической функции шара, нужно вначале показать справедливость следующей леммы.

Лемма 2. *Справедлива следующая формула:*

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha) \right|_p = \max_{k=1,\ldots p^{n+m}} |\lambda_k|_p \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}}. \tag{9}$$

Доказательство. Возьмем произвольный $x \in \mathbb{Z}_p = \coprod_{k=1}^{p^{n+m}} B[x_k, p^{-n-m}]$. Очевидно, что x попадет в некоторый шар $B[x_\nu, p^{-n-m}]$, $\nu \in \{1, 2, \ldots, p^{n+m}\}$. Рассмотрим модуль разности:

$$\left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha) \right|_p = \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - \sum_{i=1}^{p^{n+m}} \lambda_i \varphi_\alpha(|x - x_i|_p) \right|_p. \tag{10}$$

Поскольку $|x - x_i|_p = |x_i - x_\nu|_p$, $\forall i \ne \nu$, $i = 1,\ldots,p^{n+m}$ (утверждение 1), то левая часть равенства (10) приведется к виду:

$$\left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \lambda_i \varphi_\alpha(|x_\nu - x_i|_p) - \sum_{i=\nu+1}^{p^{n+m}} \lambda_i \varphi_\alpha(|x_\nu - x_i|_p) - \lambda_\nu \varphi_\alpha(|x - x_\nu|_p) \right|_p =$$

$$= \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x_\nu,\alpha) - \lambda_\nu \varphi_\alpha(|x - x_\nu|_p) \right|_p =$$

$$= \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - I_{B[a,p^{-m}]}(x_\nu) - \lambda_\nu \varphi_\alpha(|x - x_\nu|_p) \right|_p. \tag{11}$$