$$\vec{H} = \frac{IRdl}{4\pi r^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\vec{\alpha} \left(\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}\right).$$
(18)

Расчет плотности тока *j* в образце проведен для случая, когда импульсный ток в образце имеет только одну составляющую Ax(y,z), Iy = 0, Iz = 0.

Тогда можно использовать решения для потенциала собственного магнитного поля в трех областях.

Для верхней:

$$\vec{A}_{1} = \frac{\mu_{0}I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-\lambda|z-h|} + \vec{j}_{1}e^{-\lambda|z+h|} \right) \frac{e^{2j\lambda y}}{\lambda} d\lambda .$$
<sup>(19)</sup>

/

``

Для второй области:

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0 \mu_2 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{q_2 z} + \vec{j}_2 e^{-q_2 z} \right) \frac{e^{\lambda(2jy-h)}}{\lambda} d\lambda \,. \tag{20}$$

Для нижней:

$$\vec{A}_{3} = \frac{\mu_{0}I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{j}_{3} \frac{e^{\lambda(2jy+z-h)}}{\lambda} d\lambda.$$
(21)

Решение уравнений (19–21) возможно с учетом:

$$k^{2} = -J\sigma\omega\mu\mu_{0}; \ q^{2} = \lambda^{2} - k^{2}$$

$$(22)$$

$$\vec{J}_{1} = \frac{\left(\lambda^{2} \mu_{2}^{2} - q_{2}^{2}\right) \left(e^{q_{2}T} - e^{-q_{2}T}\right)}{\left(\lambda \mu_{2} + q_{2}\right)^{2} e^{q_{2}T} - \left(\lambda \mu_{2} - q_{2}\right)^{2} e^{-q_{2}T}},$$
(23)

$$\vec{J}_{2} = \frac{2q_{2}(q_{2} - \lambda\mu_{2})e^{-q_{2}T} + 2q_{2}(q_{2} + \lambda\mu_{2})e^{q_{2}T}}{(\lambda\mu_{2} + q_{2})^{2}e^{q_{2}T} - (\lambda\mu_{2} - q_{2})^{2}e^{-q_{2}T}},$$
(24)

$$\vec{J}_{3} = \frac{4\lambda q_{2}\mu_{2}e^{\lambda T}}{\left(\lambda\mu_{2} + q_{2}\right)^{2}e^{q_{2}T} - \left(\lambda\mu_{2} - q_{2}\right)^{2}e^{-q_{2}T}}.$$
(25)

Плотность токов можно определить через потенциал:

$$\vec{j} = -J\sigma \omega A_2. \tag{26}$$

Как видно из уравнений (19–26), основными параметрами, определяющими формирование токов, являются магнитная проницаемость, электрическая проводимость материала образца и частота тока.

Расчет в математическом пакете MatLab с исходными данными для поставленной задачи (рисунок 3).

📝 Edit	tor - D:\RAS4ET_MP.m		
<u>F</u> ile <u>E</u>	dit <u>T</u> ext <u>G</u> o <u>C</u> ell T <u>o</u> ols De <u>b</u> ug <u>D</u> esktor	) <u>W</u> indow <u>H</u> elp →	7 N
1 6	3 🖬   X 🐂 🛱 🤊 🕫   🌢 🗃 ·	·   🏘 🗢 🔶 🍂   🚬 - 🗟 🏖 🖷 🛍 🗊 🕮 🕮 🔽   💌	
1	% исходные данные		<b>A</b>
2 -	$c = 3 * 10^{10};$	% см/с, электродинамическая постоянная	
3 -	si = 3.7*10^7;	% Ом/м, удельная проводимость алюминия	
4 -	$m = 1.2566*10^{(-6)};$	% Н/А^2, магнитная постоянная для алюминия	
5 -	j = 10^3;	% А/мм^2, плотность тока	
6 -	S = 4;	% мм^2, площадь поперечного сечения проводника	
7 -	r1 = 0.4;	% мм, радиус образца #1	
8 -	r2 = 1.9;	% мм, радиус образца #2	
9 -	$t = 10^{(-4)};$	% с, длительность импульсов тока	
10 -	w1 = 500;	% Гц, частота следования импульсов #1	
11 -	w2 = 700;	% Гц, частота следования импульсов #2	
12 -	w3 = 900;	% Гц, частота следования импульсов #3	
13 -	DM	🖇 коэффициент магнитной диффузии	
14 -	Hz(x,t)	🗞 значение магнитного поля в образце	-
		script In 18 Col 54 O	WR //

Рисунок 3. – Исходные данные для решения задачи

Рассмотрим уравнение, которое согласуется с уравнением диффузии, выбрав проекцию на ось Z (рисунок 4). Т. к. поле вне образца изменяется по гармоническому закону, следующая Z-проекция магнитного поля образца будет на границе при x = 0. Гармоническая зависимость определяет скин-эффект в стационарном состоянии.



Рисунок 4. – Постановка исходной задачи

Поскольку уравнение линейно и содержит вещественные коэффициенты, то его можно упростить, перейдя к комплексной записи, и искать решение другой вспомогательной задачи с заменой  $\cos(\omega t)$  на комплексную экспоненту. Решение исходной задачи с вещественным полем можно получить из решения вспомогательной задачи с комплексным полем путем отделения вещественной части.



Рисунок 5. – Решение исходной задачи с вещественным полем

Т. к. магнитное поле вне образца пропорционально  $e^{-i\omega t}$ , то решение вспомогательной задачи следует искать в виде, показанном на рисунке 5. Подставляя эту зависимость в уравнение с частными производными, можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение. Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами находится в виде суммы экспонент  $Ae^{ikx}$  с постоянными коэффициентами A и  $k^2$ . Коэффициент k находится подстановкой  $e^{ikx}$  в исходное уравнение. Получившееся алгебраическое уравнение  $k^2 = \frac{2i}{\delta^2}$  имеет два корня  $k_{\pm} = \frac{1+i}{\delta}$ :  $k_+$  отвечает убывающему, а  $k_-$  нарастающему вглубь образца (при  $x \to \infty$ ) переменному магнитному полю. Нарастающее к оси об-

разца магнитное поле следует опустить, т. к. оно отвечает бессмысленному увеличению магнитного поля вплоть до бесконечного значения при удалении от источника.

Таким образом, внутри проводника решение вспомогательной задачи имеет вид, как показано на рисунке 6.



Рисунок 6. – Решение вспомогательной задачи с вещественным полем

Коэффициент A можно найти из условия непрерывности тангенциальной проекции напряженности магнитного поля на границе образца при x = 0.

Поскольку вне проводника при x = 0 напряженность магнитного поля изменяется по закону  $H_z(0,t) = H_0 e^{-i\omega t}$ , заключаем, что  $A = H_0$ . Определяя вещественную часть комплексной функции, найдем вещественное магнитное поле в образце (рисунок 7).



Рисунок 7. – Нахождение вещественного магнитного поля H<sub>z</sub>

Как видно из графических изображений (рисунок 8), в образце деформационного алюминия наблюдается изменение магнитного поля, причем при перемещении от центра к поверхности образца напряженность магнитного поля увеличивается и достигает значения 225 Э, на расстоянии в 1 мм от центра поперечного сечения образца напряженность магнитного поля принимает наибольшее значение в 25 Э.



Рисунок 8. – Изменение магнитного поля в образце

Построение графических изображений распределения электрического поля и плотности электрического тока при вторичных пондеромоторных факторах в явлении электропластичности (рисунки 9а, 9б) показали, что напряженность электрического поля изменяется от оси к стенкам и достигает максимального значения 0,025 В/мм, на расстоянии в 1 мм от центра поперечного сечения образца напряженность электрического поля принимает значение в 0,01 В/мм. Плотность тока будет также неравномерно распределяться по сечению образца. Как видно из рисунка 96, при перемещении от центра  $\kappa$  поверхности образца плотность тока увеличивается и достигает максимального значения 320 А/мм<sup>2</sup>.



Рисунок 9. – Электрическое поле и плотность тока: а – распределение электрического поля; б – плотности тока в образце

## Заключение

Рассмотрены физические условия создания пондеромоторных эффектов при электропластической деформации проводящих материалов. Импульсный ток большой плотности, пропущенный через зону деформации, обусловливает виброакустические колебания кристаллической решетки в различных направлениях и дополнительные деформационные напряжения. В условиях электропластичности реализация оптимальных значений пондеромоторных факторов достигается при частотах, когда магнитное поле не успевает существенно проникать в материал, при этом скорость диффузии будет зависеть как от проводимости металла, так и частоты тока. С ростом частоты следования импульсов тока магнитное и электрическое поля смещаются к поверхности образца, а с увеличением радиуса образца наблюдается рост напряженности магнитного поля и уменьшение плотности тока. При одной и той же геометрии образцов пинч-эффект выражен сильнее на материале с более высокой электропроводностью.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савенко, В. С. Вклад пондеромоторных факторов в реализацию электропластической деформации / В. С. Савенко, О. А. Троицкий, А. Г. Силивонец // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2017. – № 1. – С. 85–91. 2. Троицкий, О. А. Физические и технологические основы электропластической деформации металлов : монография / О. А. Троицкий, В. В. Савенко. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2016. – 208 с.

3. Bennett, W. H. Magnetically self-focussing streams / W. H. Bennett // Phys. Rev. – 1934. – No 45. – P. 890.

4. Рощупкин, А. М. О влиянии электрического тока и магнитного поля на взаимодействие дислокаций с точечными дефектами в металлах / А. М. Рощупкин, И. Л. Батаронов // Физика твердого тела. – 1988. – Т. 30, № 11. – С. 3311–3318.

5. Савенко, В. С. Механическое двойникование и электропластичность металлов в условиях внешних энергетических воздействий : монография / В. С. Савенко. – 2-е изд., доп. и перераб. – Минск : БГАФК, 2003. – 203 с.

6. Физические основы электроимпульсной и электропластической обработок и новые материалы / Ю. И. Баранов [и др.]. – М. : МГИУ, 2001. – 844 с.

7. Батаронов, И. Л. О механизме влияния электрического тока на пластическую деформацию металлов / И. Л. Батаронов, А. М. Рощупкин // Физика прочности и пластичности металлов и сплавов : тез. докл. 11 Всесоюз. конф. – Куйбышев, 1986. – С. 87–88.

8. Савенко, В. С. К расчету плотности тока и напряженности магнитного поля в условиях электропластичности / В. С. Савенко, О. А. Троицкий // Электромагнитное поле и материалы : материалы 26-й Междунар. конф. – М. : МЭИ, 2018. – С. 134–138.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.02.2019

## Savenko V. S., Stepaneev N. V. Calculation of Pre-Motor Factors and Their Graphic Images at Electroplastic Deformation of Metals Using the Matlab Package

The physical conditions for the creation of ponderomotive effects during electroplastic deformation are studied to obtain materials with a complex of high physicomechanical and service characteristics. It is shown that under electroplasticity conditions, the realization of optimal values of ponderomotive factors is achieved at frequencies when the magnetic field does not have time to significantly penetrate the material, and the diffusion rate will depend on both the conductivity of the metal and the frequency of the current. With increasing pulse repetition frequency, the magnetic and electric fields shift to the sample surface, and with increasing sample radius, the magnetic field strength increases and the current density decreases.