21. Шепелевич, В. В. Запись и считывание голограмм в кубических гиротропных фоторефрактивных пьезокристаллах (Обзор) / В. В. Шепелевич // ЖПС. – 2011. – Т. 78, № 4. – С. 493–515.

22. Петров, М. П. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике / М. П. Петров, С. И. Степанов, А. В. Хоменко. – СПб. : Наука, 1992. – 320 с.

23. Gunter, P. Clamped-unclamped electro-optic coefficient dilemma in photorefractive phenomena / P. Gunter, M. Zgonik // Opt. Lett. – 1991. – Vol. 16. – P. 1826–1828.

24. Energy exchange optimization in (110)-cut BTO crystal by choice of interacting waves polarization / A. E. Zagorskiy [et al.] // Opt. Mat. – 2001. – Vol. 18. – P. 131–133.

25. Сиротин, Ю. И. Основы кристаллофизики / Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. – М. : Наука, 1979. – 639 с.

26. Сонин, А. С. Курс макроскопической кристаллофизики / А. С. Сонин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 256 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.10.2019

Naunyka V. N., Amanova M. A., Shepelevich V. V., Yudzitski U. V. **Variation of Components of the Inverse Permittivity Tensor in $Bi_{12}TiO_{20}$ Crystal by Electric Space Charge Field**

Variation of the inverse permittivity tensor components of the cubic photorefractive crystals of class 23 by electric space charge field of the volume holographic grating is studied. The primary and secondary electrooptic effects are taken into consideration. Normal component surfaces of the inverse permittivity tensor of $Bi_{12}TiO_{20}$ crystal for typical orientations of the strength vector of the electric space charge field in the crystallographic coordinate system used for forming the holographic grating are constructed. Sections of surfaces are obtained and the crystallographic directions along which the normal component of the inverse permittivity tensor tends to extreme values are defined. It is shown that the secondary electrooptic effect for fixed strength vector of the electric space charge field can increase as well as decrease the normal component of the inverse permittivity tensor.

УДК 539.12:530.145

В. А. Плетюхов[1], И. В. Капица[2], В. В. Кисель[3], В. М. Редьков[4]
[1]д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]студент V курса физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[3]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики
Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
[4]д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник лаборатории теоретической физики
Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси
e-mail: otf@brsu.brest.by

P-НЕИНВАРИАНТНОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ И ТРЕМЯ МАССАМИ

В подходе Гельфанда – Яглома получены четыре типа P-неинвариантного релятивистского волнового уравнения для частицы со спином $s = \frac{1}{2}$ *и тремя различными массами. Каждое из них может представить интерес в качестве классической основы для описания трех поколений нейтрино, рассматриваемых как единый физический объект.*

Введение

В настоящее время наличие у нейтрино массы (хотя и весьма малой, но все-таки ненулевой) считается твердо установленным фактом. В пользу этого свидетельствуют, например, осцилляции нейтрино, которые невозможны для строго безмассовых частиц. Таким образом, обычно используемое в классической теории поля описание нейтрино посредством безмассового уравнения Дирака является, строго говоря, некорректным.

В работе [1] было построено релятивистское волновое уравнение (РВУ) первого порядка, не распадающееся по группе Лоренца, для микрочастицы со спином $s = \frac{1}{2}$ и тремя различными значениями массы, которое рассматривалось как альтернатива уравнению Дирака с точки зрения описания всех трех сортов нейтрино с единых позиций. Важной чертой указанного РВУ является его инвариантность относительно операции пространственного отражения.

Здесь необходимо сделать небольшой исторический экскурс. В те годы, когда формировался постулативный базис теории РВУ (подробнее см. [2]), считалось, что «правильные» уравнения, описывающие физические процессы в микромире, должны быть инвариантными не только в смысле собственной группы Лоренца, но и по отношению к операции пространственного отражения (так называемая P-инвариантность или P-четность). Поэтому требование P-инвариантности, наряду с требованиями лоренцевской инвариантности и возможности лагранжевой формулировки, включалось в систему обязательных постулатов теории РВУ [2; 3]. Однако впоследствии выяснилось, что в процессах, идущих с участием нейтрино, например при β-распаде ядер, закон сохранения P-четности может не выполняться.

В контексте обсуждаемой проблемы это означает, что при описании нейтрино в подходе теории РВУ требование P-инвариантности соответствующего уравнения можно опустить. В свою очередь, отказ от этого требования существенно расширяет границы применимости методов теории РВУ в нейтринной физике.

В данной работе мы исследуем возможность построения P-неинвариантного РВУ для микрообъекта со спином $s = \frac{1}{2}$ и тремя массовыми состояниями в подходе Гельфанда – Яглома [3; 4].

1. Некоторые сведения из теории РВУ

Как известно [2; 3], теория РВУ для частиц с ненулевой массой базируется на стандартной матрично-дифференциальной форме уравнения первого порядка

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \quad (\mu = 1 \div 4), \tag{1}$$

где $\psi(x)$ – многокомпонентная волновая функция, Γ_μ – квадратные числовые матрицы, m – массовый параметр. Релятивистская инвариантность уравнения (1) предполагает, что волновая функция $\psi(x)$ преобразуется по приводимому представлению T собственной группы Лоренца, состоящему из зацепляющихся неприводимых компонент $\tau \sim (l_1,\ l_2)$. В описании спина s участвуют представления τ, удовлетворяющие условию

$$|l_1 - l_2| \le s \le l_1 + l_2 . \tag{2}$$

Среди матриц Γ_μ основную роль играет матрица Γ_4 в том смысле, что алгебраические свойства этой матрицы определяют как спин, так и возможные значения массы частицы, описываемой уравнением (1). Наиболее удобным в указанном смысле является канонический базис $\xi^{(\tau)}_{s,s_3}$, называемый иногда базисом Гельфанда – Яглома [4], в котором матрица Γ_4 имеет блочную структуру

$$\Gamma_4 = \oplus \sum_s C^s \otimes I_{2s+1} . \tag{3}$$

Блоки C^s в (3) формируются представлениями $\tau \sim (l_1,\ l_2)$, удовлетворяющими условию (2). При этом, если блок C^s имеет отличные от нуля вещественные собственные значения $\lambda_i^{(s)}$ (хотя бы одно), то микрочастица обладает спином s, а возможные значения ее массы вычисляются по формуле

$$m_i^{(s)} = \frac{m}{\left|\lambda_i^{(s)}\right|} . \tag{4}$$

2. Основное содержание

Для построения интересующего нас уравнения будем исходить из набора неприводимых представлений группы Лоренца

$$\left(0,\frac{1}{2}\right)\oplus\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,\frac{1}{2}\right)'\oplus\left(\frac{1}{2},0\right)'\oplus\left(1,\frac{1}{2}\right)\oplus\left(\frac{1}{2},1\right), \tag{5}$$

где знак «штрих» введен для различения кратных (повторяющихся) компонент. В соответствии с (2) представления, содержащиеся в наборе (5), могут описывать спины $s=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$. Следовательно, матрица Γ_4 (3) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\Gamma_4=\left(C^{1/2}\otimes I_2\right)\oplus\left(C^{3/2}\otimes I_4\right)=\Gamma_4^{1/2}\oplus\Gamma_4^{3/2}. \tag{6}$$

Для удобства и упрощения записи дальнейших формул и выражений введем нумерацию представлений, содержащихся в (5), которая одновременно будет служить и для обозначения строк и столбцов спиновых блоков C^s:

$$\left(0,\frac{1}{2}\right)\sim 1,\ \left(\frac{1}{2},0\right)\sim 2,\ \left(0,\frac{1}{2}\right)'\sim 3,\ \left(\frac{1}{2},0\right)'\sim 4,\ \left(1,\frac{1}{2}\right)\sim 5,\ \left(\frac{1}{2},1\right)\sim 6. \tag{7}$$

В обозначениях (7) получаем следующие самые общие выражения для спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$, соответствующие выбранному нами набору представлений (5):

$$C^{1/2}=\begin{pmatrix} 0 & C_{12}^{1/2} & 0 & C_{14}^{1/2} & 0 & C_{16}^{1/2}\\ C_{21}^{1/2} & 0 & C_{23}^{1/2} & 0 & C_{25}^{1/2} & 0\\ 0 & C_{32}^{1/2} & 0 & C_{34}^{1/2} & 0 & C_{36}^{1/2}\\ C_{41}^{1/2} & 0 & C_{43}^{1/2} & 0 & C_{45}^{1/2} & 0\\ 0 & C_{52}^{1/2} & 0 & C_{54}^{1/2} & 0 & C_{56}^{1/2}\\ C_{61}^{1/2} & 0 & C_{63}^{1/2} & 0 & C_{65}^{1/2} & 0 \end{pmatrix},\quad C^{3/2}=\begin{pmatrix} 0 & C_{56}^{1/2}\\ C_{65}^{1/2} & 0\end{pmatrix}, \tag{8}$$

где на данном этапе компоненты блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ – произвольные комплексные числа.

Как показано в [5], зацепления между кратными представлениями в (5) могут быть «разорваны», т. е., не уменьшая общности, можно положить

$$C_{14}^{1/2}=C_{23}^{1/2}=C_{32}^{1/2}=C_{41}^{1/2}=0. \tag{9}$$

Далее, поскольку нас интересует только спин $s=\frac{1}{2}$, надо выбрать

$$C_{56}^{3/2}=C_{65}^{3/2}=0, \tag{10}$$

откуда автоматически следует:

$$C_{56}^{1/2}=C_{65}^{1/2}=0. \tag{11}$$

С учетом (9) – (11) спиновые блоки $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ (8) принимают вид:

$$C^{1/2}=\begin{pmatrix} 0 & C_{12}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & C_{16}^{1/2} \\ C_{21}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & C_{25}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{34}^{1/2} & 0 & C_{36}^{1/2} \\ 0 & 0 & C_{43}^{1/2} & 0 & C_{45}^{1/2} & 0 \\ 0 & C_{52}^{1/2} & 0 & C_{54}^{1/2} & 0 & 0 \\ C_{61}^{1/2} & 0 & C_{63}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C^{3/2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

С точки зрения физических приложений излагаемой теории интерес представляют только такие уравнения, с которыми можно инвариантно связать наблюдаемые величины, например заряд, энергию, импульс и другие. Иными словами, помимо релятивистской инвариантности строящегося уравнения, обязательным требованием является возможность его получения из некоторой лоренц-инвариантной функции Лагранжа.

Лагранжиан уравнения (1) имеет вид

$$L=-\psi^{+}\eta\left(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m\right)\psi, \tag{13}$$

где η – матрица вещественной лоренц-инвариантной билинейной формы $\psi^{+}\eta\psi$, имеющая в базисе Гельфанда – Яглома структуру, аналогичную (6):

$$\eta=\left(\eta^{1/2}\otimes I_{2}\right)\oplus\left(\eta^{3/2}\otimes I_{4}\right). \tag{14}$$

P-инвариантности билинейной формы и лагранжиана (13) при этом не требуется. Требование лоренц-инвариантности и вещественности формы означает, что ненулевые элементы $\eta^{s}_{\tau\dot{\tau}}$ матрицы η должны удовлетворять условиям [2]:

$$\left(\eta^{s}_{\tau\dot{\tau}}\right)^{*}=\eta^{s}_{\dot{\tau}\tau}, \tag{15}$$

$$\eta^{s}_{\tau\dot{\tau}}=-\eta^{s+1}_{\tau\dot{\tau}}. \tag{16}$$

Не уменьшая общности, условию (15) можно удовлетворить, полагая, например:

$$\eta^{1/2}_{12}=-\eta^{1/2}_{21}=\eta^{1/2}_{34}=-\eta^{1/2}_{43}=i,\ \eta^{1/2}_{56}=-\eta^{1/2}_{65}=if\quad\left(f=\pm1\right). \tag{17}$$

В общем случае требование возможности лагранжевой формулировки РВУ вида (1) приводит к условию

$$C^{s}_{\tau\tau'}\eta^{s}_{\tau'\dot{\tau}'}=\left(C^{s}_{\dot{\tau}'\dot{\tau}}\right)^{*}\eta^{s}_{\tau\dot{\tau}}, \tag{18}$$

которое применительно к нашему случаю при выборе (17) элементов матрицы η накладывает следующие ограничения на компоненты спинового блока $C^{1/2}$:

$$C^{1/2}_{12},\ C^{1/2}_{21},\ C^{1/2}_{34},\ C^{1/2}_{43}\ \text{– чисто мнимые;} \tag{19}$$

$$C^{1/2}_{61}=-f\left(C^{1/2}_{25}\right)^{*},\ C^{1/2}_{52}=-f\left(C^{1/2}_{16}\right)^{*}, \tag{20}$$

$$C^{1/2}_{63} = -f\left(C^{1/2}_{45}\right)^*,\ C^{1/2}_{54} = -f\left(C^{1/2}_{36}\right)^*. \tag{21}$$

Условиям (19) – (21) можно удовлетворить, полагая, например:

$$\begin{gathered} C^{1/2}_{12} = -C^{1/2}_{21} = iC_1,\ C^{1/2}_{34} = -C^{1/2}_{43} = iC_3, \\ C^{1/2}_{16} = -C^{1/2}_{25} = iC_2,\ C^{1/2}_{36} = -C^{1/2}_{45} = iC_4, \end{gathered} \tag{22}$$

где C_1, C_3 – произвольные вещественные, C_2, C_4 – произвольные комплексные числа. Спиновой блок $C^{1/2}$ при этом принимает вид

$$C^{1/2} = i\begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & C_2 \\ -C_1 & 0 & 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & C_4 \\ 0 & 0 & -C_3 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & fC_2^* & 0 & fC_4^* & 0 & 0 \\ -fC_2^* & 0 & fC_4^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma^{1/2}_4 = C^{1/2} \otimes I_2 = C \otimes i\gamma_5\gamma_4, \tag{23}$$

где γ_4, γ_5 – матрицы Дирака и

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & C_3 & C_4 \\ fC_2^* & fC_4^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Спектр массовых состояний обсуждаемой микрочастицы связан с корнями λ_i матрицы C (24) соотношением (4). Характеристическое уравнение для матрицы C имеет вид

$$\lambda^3 - \lambda^2(C_1 + C_3) + \lambda(C_1C_3 - f|C_2|^2 - f|C_4|^2) + f|C_2|^2 C_3 + f|C_4|^2 C_1 = 0. \tag{25}$$

Из (25) вытекает следующая система уравнений для λ_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{gathered} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = C_1 + C_3, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 = C_1C_3 - f|C_2|^2 - f|C_4|^2, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -f|C_2|^2 C_3 - f|C_4|^2 C_1. \end{gathered} \tag{26}$$

Как видно из (4), в силу произвольности массового параметра m, один из корней λ_i, не уменьшая общности, можно выбрать равным 1. Пусть

$$\lambda_3 = 1. \tag{27}$$

Тогда для нахождения двух оставшихся корней получим уравнение

$$\lambda^2 - \lambda(C_1 + C_3 - 1) - f|C_2|^2 C_3 - f|C_4|^2 C_1 = 0, \tag{28}$$

где произвол в выборе параметров C_1, C_2, C_3, C_4 ограничен условием

$$C_1C_3 - C_1 - C_3 + 1 + f|C_2|^2 (C_3 - 1) + f|C_4|^2 (C_1 - 1) = 0. \tag{29}$$

Условие (29) выполняется, например, при

$$C_1 = C_3 = 1. \tag{30}$$

На параметры C_2, C_4 при этом никаких ограничений не накладывается.

Уравнение (28) при условии (30) трансформируется к виду

$$\lambda^2 - \lambda - f|C_2|^2 - f|C_4|^2 = 0, \tag{31}$$

откуда следует:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + f|C_2|^2 + f|C_4|^2}. \tag{32}$$

Поскольку корни $\lambda_{1,2}$ должны быть вещественными и разными, то при $f = -1$ на параметры уравнения C_2, C_4 накладывается ограничение

$$|C_2|^2 + |C_4|^2 < \frac{1}{4}. \tag{33}$$

В случае же, когда $f = 1$, выбор C_2, C_4 ничем не ограничен.

Помимо (17) матрицу билинейной формы можно задать иным, неэквивалентным способом, а именно:

$$\eta_{12}^{1/2} = -\eta_{21}^{1/2} = -\eta_{34}^{1/2} = \eta_{43}^{1/2} = i,\ \eta_{56}^{1/2} = -\eta_{65}^{1/2} = if \quad (f = \pm 1). \tag{34}$$

При этом условие (19) не изменится, а (20), (21) трансформируются так:

$$C_{61}^{1/2} = -f(C_{25}^{1/2})^*,\ C_{51}^{1/2} = -f(C_{16}^{1/2})^*, \tag{35}$$

$$C_{63}^{1/2} = f(C_{45}^{1/2})^*,\ C_{54}^{1/2} = f(C_{36}^{1/2})^*. \tag{36}$$

Вводя по-прежнему обозначения (22), для спинового блока $C^{1/2}$ получим в этом случае выражение